ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 3 Выпуск 1 (2002)

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ ДВУХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. А. Иванова (г. Иваново)

Аннотация

Получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечно порожденных абелевых групп.

1. Напомним (см. [1]), что группа G называется аппроксимируемой в некотором классе групп $\mathcal{K}$, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу X из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ $g\varphi$ элемента g отличен от единицы. В данной работе рассматриваются условия аппроксимируемости в классе всех нильпотентных групп свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами.

Пусть H и K — некоторые группы, A — подгруппа группы H, B — подгруппа группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $G = (H * K; A = B, \varphi)$ — свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. В работе [2] показано, что если группы H и K локально нильпотентны и $A \neq H$ и $B \neq K$, то необходимым условием аппроксимируемости группы G нильпотентными группами является существование такого простого числа p, что подгруппы A и B являются p'-изолироваными в группах H и K соответственно.

(Напомним, что если p — простое число, подгруппа X некоторой группы Y называется p'-изолированной, если для любого элемента $y \in Y$ и любого простого числа $q \neq p$ из $y^q \in X$ следует $y \in X$.)

В работе [3] доказано, в частности, что условие p'-изолированности объединяемых подгрупп для некоторого простого p является и достаточным для аппроксимируемости группы G нильпотентными группами, если H и K абелевы группы с конечным числом порождающих, причем все элементы конечного порядка этих групп являются p-элементами (т. е. их порядки являются степенями числа p). Здесь будет показано, что в действительности ограничение на порядки элементов свободных сомножителей группы G не является существенным, а именно имеет место

Теорема. *Пусть* H *и* K — *конечно порожденные абелевы группы,* A *и* B — *подгруппы групп* H *и* K *соответственно, причем* $A \neq H$ *и* $B \neq K$*, и* φ — *изоморфизм подгруппы* A *на подгруппу* B*. Группа* $G = (H*K; A = B, \varphi)$ *аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда найдется такое простое число* p*, что подгруппы* A *и* B *являются* p'*-изолированными в группах* H *и* K *соответственно.*

2. В этом пункте напомним ряд известных понятий и результатов, необходимых для доказательства теоремы.

Пусть $G = (H*K; A = B, \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечных нильпотентных групп H и K. Для данного простого числа p пусть $S_p(H)$ и $S_p(K)$ — силовские p-подгруппы групп H и K соответственно и $G(p)$ — подгруппа группы G, порождаемая подгруппами $S_p(H)$ и $S_p(K)$. Заметим, что поскольку, как легко видеть, $(S_p(H) \cap A)\varphi = S_p(K) \cap B$, из теоремы Х. Нейман (см., напр., [4]) следует, что группа $G(p)$ является свободным произведением групп $S_p(H)$ и $S_p(K)$ с объединенными относительно φ подгруппами $S_p(H) \cap A$ и $S_p(K) \cap B$. Имеет место

Предложение 1. *(Теорема 1 из [3]) Если* H *и* K — *конечные нильпотентные группы, то группа* $G = (H * K; A = B, \varphi)$ *аппроксимирума нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа* p *выполнены следующие два условия:*

1. подгруппы A *и* B p'*-изолированы в группах* H *и* K *соответственно;*

2. группа $G(p)$ *аппроксимируема конечными* p*-группами.*

Пусть снова H и K — произвольные группы с изоморфными подгруппами A и B и φ — изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Следуя Г. Баумслагу [5], подгруппы $R \leq H$ и $S \leq K$ назовем (A, B, φ)-совместимыми, если $(A \cap R)\varphi = B \cap S$.

Легко видеть, что если нормальные подгруппы $R \leq H$ и $S \leq K$ (A, B, φ)-совместимы, то изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\varphi_{R,S}$ подгруппы AR/R фактор-группы H/R на подгруппу BS/S фактор-группы K/S, определенный по правилу $(aR)\varphi_{R,S} = (a\varphi)S$ $(a \in A)$. Поэтому можно построить свободное произведение $G_{R,S} = (H/R*K/S; AR/R = BS/S, \varphi_{R,S})$ групп H/R и K/S с объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$ подгруппами AR/R и BS/S. Естественные гомоморфизмы групп H и K на фактор-группы H/R и K/S согласованы с отображением φ на объединяемых подгруппах A и B группы $G = (H * K; A = B, \varphi)$, и потому существует продолжающий их гомоморфизм $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

Если (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S имеют конечный индекс в группах H и K соответственно, то группа $G_{R,S}$ является финитно аппроксимируемой ([5], теорема 1). Отсюда следует, что группа $G = (H * K; A = B, \varphi)$ будет финитно аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такая пара (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S конечного индекса, что $g\rho_{R,S}$ является неединичным элементом группы $G_{R,S}$. Достаточное условие выполнимости этого свойства в группе G (предложение 2 работы [5]) состоит, в частности, в том, что в каждом из свободных множителей группы G семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса, (A, B, φ)-совместимых с некоторой нормальной подгруппой конечного индекса другого множителя, является фильтрацией, т. е. в том, что пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой.

Приведенное выше предложение 1 подсказывает, что для получения аналогичного признака аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенными подгруппами может служить следующая модификация понятия (A, B, φ)-совместимости:

Пусть H и K — некоторые группы с изоморфными подгруппами A и B и φ — изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Пусть p — фиксированное простое число. Назовем нормальные подгруппы $R \leq H$ и $S \leq K$ (A, B, φ, p, N)-совместимыми, если выполняются следующие условия:

1. Подгруппы R и S являются (A, B, φ)-совместимыми.
2. Фактор-группы H/R и K/S являются конечными нильпотентными группами
3. Подгруппы AR и BS p'-изолированы в группах H и K соответственно.
4. Подгруппа $G_{R,S}(p)$ группы $G_{R,S}$ аппроксимирума конечными p-группами.

Из предложения 1 следует, что если подгруппы R и S являются (A, B, φ, p, N)-совместимыми, то группа $G_{R,S}$ аппроксимируема нильпотентными группами. Поэтому, как и в случае финитной аппроксимируемости, для доказательства аппроксимируемости нильпотентными группами группы $G = (H * K; A = B, \varphi)$ достаточно показать, что для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такая пара (A, B, φ, p, N)-совместимых нормальных подгрупп R и S конечного индекса, что $g\rho_{R,S}$ является неединичным элементом группы $G_{R,S}$. Именно это и устанавливается при доказательстве следующего утверждения, совершенно аналогичном доказательству вышеупомянутого предложения 2 из [5]:

Предложение 2. *Пусть H и K — некоторые группы с изоморфными подгруппами A и B и φ — изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ, p, N)-совместимых подгрупп групп H и K, где p — некоторое простое число. Предположим также, что выполнены следующие условия:*

1. Каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

2. Для любого конечного семейства h_1, h_2, ..., h_m элементов группы H, не входящих в подгруппу A, и любого конечного семейства k_1, k_2, ..., k_n элементов группы K, не входящих в подгруппу B, существует такое $\lambda \in \Lambda$, что элементы h_1, h_2, ..., h_m не входят в подгруппу AR_λ и элементы k_1, k_2, ..., k_n не входят в подгруппу BS_λ.

Тогда группа $G = (H * K; A = B, \varphi)$ *аппроксимируема нильпотентными группами.*

3. Переходя непосредственно к доказательству сформулированной выше теоремы, предположим, что H и K — конечно порожденные абелевы группы, A — p'-изолированная подгруппа группы H, B — p'-изолированная подгруппа группы K и φ — изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Покажем, что семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех пар (A, B, φ, p, N)-совместимых подгрупп групп H и K удовлетворяет требованиям 1 и 2 предложения 2. Начнем с доказательства следующего вспомогательного утверждения:

Лемма. *Пусть* H *— конечно порожденная абелева группа и* A *—* p'*-изолированная подгруппа группы* H*. Для любой подгруппы* U *группы* H*, входящей в подгруппу* A *и имеющей в* A *конечный индекс, найдется подгруппа* R *конечного индекса группы* H *такая, что* $A \cap R = U$ *и подгруппа* AR *является* p'*-изолированной в группе* H*.*

Для любого элемента $h \in H$*, не принадлежащего подгруппе* U*, подгруппу* R *с указанными свойствами можно выбрать так, чтобы* $h \notin R$*.*

Для любых элементов h_1*,* h_2*, …,* h_m *группы* H*, не принадлежащих подгруппе* A*, подгруппу* R *с указанными свойствами можно выбрать так, чтобы элементы* h_1*,* h_2*, …,* h_m *не входили в подгруппу* AR*.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{A}$ изолятор подгруппы A в группе H, т. е. множество всех таких элементов $h \in H$, что $h^n \in A$ для некоторого целого числа $n > 0$. Индекс подгруппы A в группе $\overline{A}$ конечен, и так как A p'-изолирована в группе H, этот индекс является p-числом. Поскольку фактор-группа $H/\overline{A}$ не имеет кручения, группа H раскладывается в прямое произведение подгруппы $\overline{A}$ и свободной абелевой группы M. Выбрав в группе M произвольную подгруппу M_0 конечного p-индекса, полагаем $R = UM_0$. Очевидно тогда, что индекс подгруппы R в группе H конечен, $A \cap R = U$ и индекс подгруппы $AR = AM_0$ в группе H является p-числом. Следовательно, подгруппа AR p'-изолирована в H, и подгруппа R является искомой.

Пусть теперь элемент $h \in H$, не принадлежит подгруппе U. Запишем его в виде $h = xy$, где $x \in \overline{A}$, $y \in M$. Если $y \neq 1$, то поскольку группа M аппроксимирума конечными p-группами, подгруппу M_0 можно выбрать так, чтобы $y \notin M_0$. Очевидно, что тогда $h \notin R$. Если $y = 1$, то $x \notin U$, и при любом выборе подгруппы M_0 условие $h \notin R$ будет выполняться.

Аналогично, если элемент $h \in H$, не принадлежит подгруппе A и $h = xy$, где $x \in \overline{A}$, $y \in M$, то выбирая при $y \neq 1$ подгруппу M_0 так, чтобы $y \notin M_0$, будем, очевидно иметь, $h \notin AR$. Если же $y = 1$, то $x \notin A$, и условие $h \notin AR$ при любом выборе подгруппы M_0 будет выполняться.

Наконец, пусть h_1, h_2, …, h_m — элементы группы H, не принадлежащие подгруппе A. Как показано в предыдущем абзаце, для каждого $i = 1, \ldots, m$ можно выбрать подгруппу M_i конечного p-индекса группы M так, чтобы при

$R_i = UM_i$ элемент h_i не принадлежал подгруппе $AR_i = AM_i$. Очевидно, что полагая $M_0 = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$, получим подгруппу $R = NM_0$ с требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ, p, N)-совместимых подгрупп групп H и K. Пусть h — неединичный элемент подгруппы H. Так как группа H финитно аппроксимируема, в ней найдется подгруппа N конечного индекса, не содержащая элемента h. Тогда этот элемент не будет входить в подгруппу $U = A \cap N$, имеющую конечный индекс в группе A, и по лемме существует подгруппа R конечного индекса группы H такая, что $A \cap R = U$, подгруппа AR является p'-изолированной в группе H и $h \notin R$. Так как подгруппа $V = U\varphi$ имеет конечный индекс в группе B, применяя лемму к группе K и ее подгруппам B и V, получаем существование в группе K такой подгруппы S конечного индекса, что $B \cap S = V$ и подгруппа BS является p'-изолированной в группе K.

Утверждается, что подгруппы R и S являются (A, B, φ, p, N)-совместимыми. Действительно, выполнимость первых трех условий из определения (A, B, φ, p, N)-совместимости очевидна, а выполнимость четвертого вытекает из работы [6], основной результат которой гарантирует, в частности, аппроксимирумость конечными p-группами свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных абелевых p-групп.

Таким образом, для подходящего $\lambda \in \Lambda$ имеем $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$, так что произвольный неединичный элемент $h \in H$ не входит в некоторую подгруппу R_λ. Следовательно, семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией, и аналогично доказывается, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. Выполнимость требования 1 предложения 2 доказана.

Для доказательства выполнимости требования 2 предположим, что h_1, h_2, $\ldots$, h_m — произвольные элементы группы H, не входящие в подгруппу A, k_1, k_2, $\ldots$, k_n — произвольные элементы группы K, не входящие в подгруппу B. Пусть U — какая-нибудь подгруппа конечного индекса группы A и $V = U\varphi$. По лемме существует подгруппа R конечного индекса группы H такая, что $A \cap R = U$, подгруппа AR является p'-изолированной в группе H и элементы h_1, h_2, $\ldots$, h_m не входят в подгруппу AR. Аналогично, в группе K существует подгруппа S конечного индекса такая, что $B \cap S = V$, подгруппа BS является p'-изолированной в группе K и элементы k_1, k_2, $\ldots$, k_n не входят в подгруппу BS. Поскольку, как и выше, $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$ для подходящего $\lambda \in \Lambda$, требование 2 предложения 2 выполняется, и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин–та. Иваново, 1958. т. 18. С. 49–60.

[2] Азаров Д. Н., Иванова Е. А. К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. Вып. 2. Иваново. 1999. С. 5–7.

[3] Иванова Е. А. Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Вестник молодых ученых ИвГУ. Вып. 2. Иваново. 2002. С. 106–113.

[4] Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503–554.

[5] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

[6] Higman G. Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.

Ивановский государственный университет
Поступило 5.10.2002 г.