ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 512.543

Иванова Елена Александровна

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
профессор Д. И. Молдаванский

Иваново — 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Говорят, что группа G аппроксимируема группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируема), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу X из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-группу), при котором образ элемента g отличен от единицы.

Изучение $\mathcal{K}$-аппроксимируемости и ряда других аппроксимационных свойств группы является одним из заметных направлений современной комбинаторной теории групп. Наиболее изученным и хронологически первым здесь является свойство финитной аппроксимируемости, т. е. аппроксимируемости в классе $\mathcal{F}$ всех конечных групп. В данной диссертационной работе применительно к конструкции обобщенного свободного произведения групп, т. е. свободного произведения групп с объединенными подгруппами, рассматривается свойство аппроксимируемости в классе $\mathcal{N}$ всех нильпотентных групп и в его подклассе $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп.

Первым результатом об $\mathcal{N}$-аппроксимируемости групп является, по-видимому, известная теорема Магнуса [23], согласно которой произвольная свободная группа является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой. $\mathcal{N}$-аппроксимируемость обычного свободного произведения групп изучалась А. И. Мальцевым в работе [9], где были получены необходимые, а также достаточные условия для того, чтобы свободное произведение $\mathcal{N}$-аппроксимируемых групп являлось $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой. Доказано при этом, что найденные необходимые условия оказываются и достаточными, если все свободные множители являются нильпотентными группами; соответствующий критерий при дополнительном предположении о конечной порожденности перемножаемых групп допускает следующую равносильную формулировку:

Свободное произведение $H * K$ неединичных конечно порожденных нильпотентных групп H и K является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа

p периодические части групп H и K являются p-группами.

В работах, посвященных аппроксимационным свойствам обобщенных свободных произведений и других свободных конструкций групп (таких, как древесное произведение, HNN-расширение), а также групп, строение которых описывается с помощью свободных конструкций (например, групп с одним определяющим соотношением), в качестве аппроксимационного класса рассматривался, в основном, класс всех конечных групп. Достаточные условия $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с объединенными циклическими подгруппами получены в работах Г. Баумслага [14] и Д. Н. Азарова [1]. В работе Д. Варсоса [29] рассматривалась $\mathcal{N}$-аппроксимируемость фундаментальной группы графа групп. Критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной группы получен в статье Е. Раптиса и Д. Варсоса [26]. Характеризация $\mathcal{N}$-аппроксимируемых групп с одним определяющим соотношением, обладающих нетривиальным центром, дана в работе Маккарона [24]. В большинстве же работ по данной тематике речь идет об аппроксимируемости в классе конечных p-групп, и здесь центральным результатом, несомненно, является теорема Г. Хигмана [20], содержащая критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп.

Переходя к изложению основных результатов данной работы, приведем, прежде всего, необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух нильпотентных групп:

Теорема 1. *Пусть H и K — произвольные нильпотентные группы с подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$ и пусть $\varphi : A \to B$ — изоморфизм группы A на группу B. Предположим также, что $A \neq H$ и $B \neq K$. Если свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, то суще-

ствует простое число p такое, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно.

Напомним, что если p — простое число, то подгруппа A некоторой группы H называется p-изолированной в группе H, если для любого элемента $h \in H$ из того, что $h^p \in A$ следует, что $h \in A$. Подгруппа A называется p'-изолированной в H, если она q-изолирована в H для всех простых чисел $q \neq p$.

Предположение о нильпотентности групп H и K в формулировке этой теоремы опустить нельзя, поскольку, например, известно, что если группы H и K являются свободными, а подгруппы A и B циклическими, причем A является максимальной циклической в H, то группа $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ $\mathcal{N}$-аппроксимируема (доказано Г. Баумслагом [14] в предположении цикличности группы K и обобщено Д. Н. Азаровым [1]).

Понятно также, что доставляемое теоремой 1 необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения нильпотентных групп не является достаточным. Действительно, как заметил Г. Хигман [20], обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой в точности тогда, когда оно аппроксимируемо конечными p-группами. Так как в любой конечной p-группе произвольная подгруппа является, очевидно, p'-изолированной, существование не $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемого обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп свидетельствует о справедливости этого утверждения.

Тем не менее, в диссертации доказано, что $\mathcal{N}$-аппроксимируемость свободного произведения

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

групп H и K с собственными объединяемыми подгруппами A и B равносильна p'-изолированности подгрупп A и B для некоторого простого числа p в следующих случаях:

(1) группы H и K являются конечно порожденными абелевыми

(теорема 5);

(2) группы H и K являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, а A и B — центральными подгруппами групп H и K соответственно (следствие из теоремы 6).

(3) группы H и K являются конечно порожденными нильпотентными, а подгруппы A и B циклическими (теорема 7);

Легко видеть, что всякая конечная подгруппа $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группы должна быть нильпотентной. В частности, если обобщенное свободное произведение двух конечных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, то оба свободных множителя должны быть нильпотентными группами. При выполнении этого условия критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть H и K — конечные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно, причем $A \neq H$ и $B \neq K$, и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для некоторого простого делителя p порядков групп H и K выполнены следующие два условия:

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(2) *подгруппа $G(p)$ группы G, порожденная силовскими p-подгруппами групп H и K соответственно, является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

В действительности, эта теорема является частным случаем теоремы 6 из работы Д. Варсоса [29], а также вытекает из доказываемой здесь более общей теоремы 4, формулировка которой будет приведена несколько ниже. Причина, по которой это утверждение выделено в отдельную теорему, состоит в следующем.

Г. Баумслаг в работе [13] предложил идею, с помощью которой получено подавляющее большинство известных результатов о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. В основе этой идеи лежит понятие совместимой пары нормальных подгрупп свободных множителей, а именно, если

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$$

— обобщенное свободное произведение групп H и K, то совместимость нормальных подгрупп $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ фактически означает, что фактор-группа $G_{R,S}$ группы G по нормальному замыканию объединения подгрупп R и S является, в свою очередь, обобщенным свободным произведением фактор-групп H/R и K/S. Если теперь запас таких пар совместимых подгрупп R и S, что группа $G_{R,S}$ заведомо является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, достаточно богат (в определенном смысле), то это будет гарантировать $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G. Для реализации этой идеи необходим, очевидно, критерий $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения групп, принадлежащих некоторому классу. В случае финитной аппроксимируемости таким критерием служит доказанная Баумслагом [13] теорема, согласно которой обобщенное свободное произведение двух конечных групп является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, а в случае $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости — упоминавшаяся выше теорема Хигмана. В данной же работе эту роль играет теорема 2, и именно на этом пути получено доказательство теоремы 5, приведенной выше.

К. Грюнберг [19] показал, что конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является конечной p-группой. Им же доказано, что (обычное) свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп снова является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Отсюда и из приведенного выше критерия А. И. Мальцева $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп следует, что (обычное) свободное произведение двух неединичных конечно порожденных нильпотентных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p. Аналогичная связь свойств $\mathcal{N}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости имеет место и в ряде других случаев. Так, в работе Маккарона [24] показано, что произвольная группа, определяемая одним соотношением и обладающая нетривиальным центром, $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p. Об этом же говорится и в упомянутом выше замечании Г. Хигмана [20]: обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда оно аппроксимируемо конечными p-группами. Последнее утверждение может быть распространено на произвольные конечно порожденные нильпотентные группы в следующем виде.

Теорема 3. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B. Если для некоторого простого числа p периодические части групп H и K являются p-группами, то группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказано также (следствие из теоремы 15), что обобщенное свободное произведение двух конечно порожденных свободных абелевых групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда оно аппроксимируемо конечными p-группами для некоторого простого p.

С другой стороны, критерий, доставляемый теоремой 2, позволяет привести простой пример обобщенного свободного произведения двух конечных абелевых групп, являющегося группой, $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, но не $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого p.

Для формулировки упомянутого выше обобщения теоремы 2 необходимо ввести некоторые обозначения. Если X — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа, для любого простого числа p символом $X^{(p)}$ будет обозначаться подгруппа группы X, порождаемая всеми силовскими q-подгруппами периодической части группы X, где $q \neq p$. Если $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — обобщенное свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K, то G_p обозначает фактор-группу группы G по нормальному замыканию объединения подгрупп $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ (являющуюся обобщенным свободным произведением фактор-групп $H/H^{(p)}$ и $K/K^{(p)}$).

Теорема 4. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B, причем $A \neq H$ и $B \neq K$.*

Если группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Обратно, пусть существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно, и пусть для любого простого делителя q порядка периодической части группы H или для любого простого делителя q порядка периодической части группы K группа G_q $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема. Тогда группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Таким образом, теорема 4 для обобщенного свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с конечными объединяемыми подгруппами дает необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости, а также — достаточное условие.

Легко видеть, однако, что в том случае, когда подгруппы A и B совпадают с периодическими частями групп H и K соответственно, для любого простого числа p, взаимно простого с порядком подгруппы A, подгруппы A и B оказываются p'-изолированными в группах H и K, а группа G_p — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Поэтому построенный в работе пример свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с объединенными периодическими частями, не являющегося $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, показывает, что необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости в теореме 4 не является достаточным.

Очевидно, с другой стороны, что если, скажем, подгруппа A не совпадает с периодической частью группы H и является p'-изолированной, то число p является делителем порядка периодической части группы H. С помощью этого замечания можно показать, что утверждение теоремы 3 в случае, когда хотя бы одна из объединяемых подгрупп отлична от периодической части соответствующего свободного множителя, выводимо из теоремы 4. Напомним также, что, как уже отмечалось, теорема 2 вытекает из теоремы 4.

Вопрос о том, является ли доставляемое теоремой 4 достаточное условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с конечными объединяемыми подгруппами и необходимым, остается открытым.

В результатах, перечисленных до сих пор, в основном речь шла об условиях $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с конечными объединяемыми подгруппами. В следующем утверждении без предположения о конечности объединяемых подгрупп даны достаточные условия для выполнения более сильного, чем $\mathcal{N}$-аппроксимируемость, свойства аппроксимируемости конечными p-группами.

Теорема 6. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Пусть для некоторого простого числа p подгруппы A и B являются p'-изолированными в

группах H и K соответственно. Предположим также, что выполнено одно из следующих условий:
а) A и B — бесконечные циклические группы;
б) группы H и K не имеют p'-кручения, а A и B являются центральными подгруппами групп H и K соответственно.

Тогда группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Следует отметить, что в случае а) p'-кручение в группах H и K также отсутствует, как и в любой группе, обладающей p'-изолированной подгруппой без кручения.

Выше уже упоминалась теорема 7, согласно которой свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными циклическими подгруппами A и B (где $A \neq H$ и $B \neq K$) является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно. В том случае, когда группы A и B бесконечные, это утверждение является следствием именно теоремы 6, а если A и B конечны, оно вытекает из теоремы 4.

Кроме того, в условиях теоремы 6 и при отсутствии кручения в группах H и K к утверждению о равносильности этих двух свойств можно добавить третье:

Следствие. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, A и B — собственные циклические или центральные подгруппы групп H и K и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными подгруппами A и B. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) *группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой;*

(2) *существует такое простое число p, что подгруппы A и B являются p'-изолироваными в группах H и K соответственно;*

(3) *существует такое простое число p, что группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Перечисленные результаты содержатся в первой главе диссертации. Во второй главе рассматривается аппроксимируемость групп относительно сопряженности.

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X, образы элементов a и b относительно которого не сопряжены в X.

Очевидно, что произвольная группа, $\mathcal{K}$-аппроксимируемая относительно сопряженности, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Поскольку обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, представляет интерес нахождение классов групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость которых влечет их $\mathcal{K}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. Так, К. Грюнберг [19] показал, что конечно порожденные нильпотентные группы $\mathcal{F}$-аппроксимируемы, а затем Н. Блэкберн [15] установил их $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. С другой стороны, известная теорема Ф. Холла утверждает финитную аппроксимируемость любой конечно порожденной метабелевой группы, но существует построенный М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко [4] пример конечно порожденной метабелевой группы, не являющейся $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Усиливая результат Г. Баумслага об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп, Дж. Дайер [17] доказала, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. В связи с этим возникает вопрос о существовании примера обобщенного свободного произведения, являющегося $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, но не являющегося группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Такой пример приводится в работе.

Говоря более точно, в работе указаны такие группы H и K с подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$ и изоморфизмом $\varphi : A \to B$, что имеют место следующие утверждения:

(1) Группы H и K $\mathcal{F}$-аппроксимируемы относительно сопряженности.

(2) Свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

(3) Группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Остальные результаты второй главы диссертации относятся к условиям $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенных свободных произведений групп. Единственным исключением является следующий результат, показывающий, насколько более сильным ограничением на группу, чем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, является свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности.

Действительно, напомним еще раз, что конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является p-группой. С другой стороны, имеет место

Теорема 8. *Конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является p-группой, а фактор-группа $G/\tau(G)$ абелева.*

Элемент g группы G назовем *сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым* (или, короче, *$C_{\mathcal{K}}$-отделимым*), если для любого элемента a этой группы, не сопряженного с элементом g, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X такой, что в группе X элемент $a\varphi$ не сопряжен с элементом $g\varphi$. Очевидно, что группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы $C_{\mathcal{K}}$-отделим.

Доказательство упомянутой выше теоремы Дж. Дайер об $\mathcal{F}$-

аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенного свободного произведения двух конечных групп проводилось ею по следующей схеме. П. Стиб [28] показал, что если группа G является конечным расширением свободной группы, то произвольный элемент бесконечного порядка группы G является $C_{\mathcal{F}}$-отделимым. Распространив это утверждение и на элементы конечного порядка, Дайер доказала тем самым, что конечное расширение свободной группы является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Это влечет, в частности, требуемый результат, поскольку, как заметил Б. Нейман [25], обобщенное свободное произведение двух конечных групп является почти свободной группой.

В диссертации по той же схеме и с использованием идей и некоторых результатов работы Дайер доказано (теорема 12), что если обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то оно является и группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности. А именно, сначала установлен (в теореме 9) следующий аналог теоремы Стиба:

Если группа G является расширением свободной группы при помощи конечной p-группы, то в группе G каждый элемент бесконечного порядка $C_{\mathcal{F}_p}$-отделим.

Затем доказывается соответствующий аналог теоремы Дайер:

Теорема 11. *Любое расширение свободной группы при помощи конечной p-группы является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Ввиду теоремы 9 для доказательства теоремы 11 достаточно показать, что для любых двух элементов a и b группы G, имеющих конечный порядок и не сопряженных в G, существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, образы относительно которого элементов a и b не сопряжены. Доказательство этого является определенной модификацией доказательства Дайер, использующего тот известный факт, что произвольная почти свободная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп, все вершинные группы которого конечны. Дайер свела общую ситуацию сначала к фундаментальной группе графа групп с двумя вершинами, а затем — к фундаментальной группе графа групп, у которого две вершины и не более двух ребер. Первая часть этого сведения проходит и в нашем случае, и этого для нас уже достаточно, поскольку система подгрупп примарной циклической группы линейно упорядочена по включению.

Теорема 12 является непосредственным следствием теоремы 11 в силу следующего простого замечания (см., напр., [10, лемма 2.1]):

Обобщенное свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$ конечных p-групп H и K является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда G есть расширение некоторой свободной группы при помощи конечной p-группы.

Отметим, что с помощью этого замечания и с использованием конструкции обобщенного прямого произведения групп утверждение теоремы 12 при дополнительном предположении центральности объединяемых подгрупп может быть выведено уже из теоремы 9. С помощью этого ослабленного варианта теоремы 12 доказывается, что свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп H и K с объединенными конечными центральными подгруппами A и B является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности (теорема 10). Отсюда, в свою очередь, следует, что (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Теорема 10 допускает некоторое обобщение (теорема 13), где вместо конечности объединяемых подгрупп (при сохранении требования центральности) предполагается отделимость в классе конечных p-групп тех подгрупп свободных множителей, которые лежат в объединяемых подгруппах и имеют в них конечный p-индекс. Частным случаем теоремы 13 является

Теорема 14. *Пусть*

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$$

— свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных нильпотентных групп H и K, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности, причем A и B — p'-изолированные центральные подгруппы групп H и K соответственно. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.

Отсюда, в свою очередь, вытекает

Теорема 15. *Пусть*

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$$

— свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп H и K, причем $A \neq H$ и $B \neq K$. Если группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы (т. е. их периодические части являются p-группами), то следующие утверждения равносильны:

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(2) *группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности;*

(3) *группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Из этой теоремы вытекает утверждение, часть которого уже приводилась выше.

Следствие. *Пусть $G = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных свободных абелевых групп H и K, причем $A \neq H$ и $B \neq K$. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема;*

(2) *для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(3) *для некоторого простого числа p группа G* $\mathcal{F}_p$*-аппроксимируема относительно сопряженности;*

(4) *для некоторого простого числа p группа G* $\mathcal{F}_p$*-аппроксимируема.*

В заключение отметим, что если в обобщенном свободном произведении $G = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$ объединяемые подгруппы принадлежат центрам соответствующих свободных множителей, то необходимым условием $\mathcal{K}$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемость относительно сопряженности каждого из свободных множителей H и K. В общем случае это, по-видимому, не так, но о существовании соответствующего примера автору ничего не известно.

Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре Ивановского государственного университета, на XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 17—22 апреля 2000 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодая наука–XXI веку”(Ивановский государственный университет, Иваново, 19—20 апреля 2001 г.), на Научных конференциях фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодая наука в классическом университете”(Ивановский государственный университет, Иваново, 15—19 апреля 2002 г., 21—25 апреля 2003 г., 20—23 апреля 2004 г.) и на V Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”(Тула, 19—24 мая 2003 г.). Основные результаты опубликованы в работах [30–40].

ГЛАВА I

Аппроксимируемость нильпотентными группами обобщенного свободного произведения групп

§ 1. Предварительные замечания

В этом параграфе напоминается определение свободного произведения групп с объединенными подгруппами и приводятся необходимые для дальнейшего свойства этой теоретико-групповой конструкции. Кроме того, здесь будут приведены основные понятия, предложенные Г. Баумслагом для изучения финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами [13], и их аналоги для свойства аппроксимируемости конечными p-группами.

Пусть H и K — некоторые группы, A — подгруппа группы H, B — подгруппа группы K. Предположим, что подгруппы A и B изоморфны и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм группы A на группу B. *Свободным произведением групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ*, называется группа

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big),$$

порождаемая объединением (непересекающихся) систем образующих групп H и K и определяемая в этой системе порождающих всеми определяющими соотношениями этих групп и всевозможными соотношениями вида $a = a\varphi$, где $a \in A$.

Для краткости мы будем называть также группу G обобщенным свободным произведением групп H и K; очевидно, что если подгруппы A и B единичны, G является обычным свободным произведением групп H и K.

Непосредственно из определения видно, что тождественные отображения множеств порождающих групп H и K в множество порождающих группы G продолжаемы до гомоморфизмов этих групп в группу G, и первым из основных свойств конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами является (см., напр., [5, теорема 2.6] или [7, теорема 4.3]) инъективность этих гомоморфизмов. Иначе говоря, подгруппы группы G, порождаемые в ней образующими групп H и K, изоморфны этим группам, и потому мы можем (и будем) считать H и K подгруппами группы G (и называть их *свободными множителями группы* G). При этом, поскольку каждый элемент из подгруппы A отождествлен с его φ-образом из подгруппы B, в группе G подгруппы A и B совпадают.

Так как группа G порождается, очевидно, подгруппами H и K, произвольный элемент ее может быть выражен в виде произведения некоторых элементов из этих подгрупп. В действительности, произвольный элемент $g \in G$ может быть записан в виде

$$g = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

где $n \geqslant 1$, элементы $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ принадлежат попеременно одной из подгрупп H или K группы G и если $n > 1$, то каждый из элементов $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ не принадлежит подгруппе $A = B$. Такая запись элемента g называется *несократимой*, а число n называется *длиной* этой записи.

Очевидно, что элементы с несократимой записью длины 1 принадлежат одной из подгрупп H или K. С другой стороны, можно доказать (см. [5, теорема 2.6] или [7, теорема 4.4 и следствие 4.4.2]), что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью длины $n > 1$, то он является неединичным элементом группы G. Это утверждение является вторым из основных свойств конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами. Из него легко следует, в частности, что пересечение в группе G подгрупп H и K совпадает с подгруппой A.

Вообще говоря, элемент g группы $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ может обладать различными несократимыми записями; тем не менее, можно показать, что любые две несократимые записи элемента g должны иметь одну и ту же длину (называемую *длиной элемента* g и обозначаемую через $l(g)$), а их сомножители с одинаковыми номерами должны принадлежать одному и тому же свободному множителю H или K группы G. Это позволяет ввести следующее понятие:

Элемент g группы $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ называется *циклически несократимым*, если либо его длина равна 1, либо его длина больше 1 и в некоторой (а потому и любой) несократимой записи элемента g первый и последний сомножители не принадлежат одной и той же подгруппе H или K. Легко видеть, что произвольный элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом.

Отметим, что перечисленные выше свойства обобщенного свободного произведения $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ — вложимость групп H и K в группу G и неединичность произвольного элемента с несократимой записью длины, большей 1, — позволяют сформулировать внутреннее определение свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. А именно, если H и K — подгруппы некоторой группы G, $A = H \cap K$ и группа G порождается подгруппами H и K, то нетрудно видеть, что каждый элемент группы G обладает несократимой записью в определенном выше смысле. Если каждый элемент, обладающий несократимой записью длины, большей, чем 1, отличен от единицы группы G, то группа G изоморфна свободному произведению изоморфных копий групп H и K с объединенными подгруппами, соответствующими подгруппе A. В этом случае группу G естественно называть свободным произведением подгрупп H и K с объединенной подгруппой A.

В доказательстве равносильности этих определений обобщенного свободного произведения групп используется еще одно существенное и необходимое нам свойство конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами — свойство *продолжаемости гомоморфизмов* (см., напр., [7, стр. 235]):

Предложение 1.1.1. *Пусть $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ — свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Пусть гомоморфизмы $\sigma : H \to X$ и $\tau : K \to X$ групп H и K в некоторую группу X согласованы с изоморфизмом φ, т. е. для любого элемента $a \in A$ имеет место равенство $a\sigma = (a\varphi)\tau$. Тогда существует гомоморфизм*

$\rho : G \to X$ группы G в группу X, действие которого на подгруппе H совпадает с действием σ, а на подгруппе K — с действием τ.

Внутреннее определение обобщенного свободного произведения групп позволяет получить простое доказательство следующего утверждения, известного, как теорема Х. Нейман (см., напр., [25]):

Предложение 1.1.2. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Пусть подгруппы $M \leqslant H$ и $N \leqslant K$ таковы, что $(M \cap A)\varphi = N \cap B$. Тогда подгруппа F группы G, порожденная подгруппами M и N, в свою очередь, является свободным произведением групп M и N с объединенными относительно (ограничения) изоморфизма φ подгруппами $M \cap A$ и $N \cap B$.*

Приведем еще одну теорему Х. Нейман о подгруппах обобщенного свободного произведения групп (см., напр., [5, предложение 11.22])

Предложение 1.1.3. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Пусть G^* — подгруппа группы G, пересечения которой со всеми подгруппами, сопряженными с подгруппой $A = B$, тривиальны. Тогда группа G^* является (обычным) свободным произведением некоторой свободной группы и некоторого семейства подгрупп, каждая из которых сопряжена с какой-то подгруппой свободного множителя H или K.*

Отметим, наконец, необходимые нам свойства свободного произведения групп с объединенными подгруппами, связанные с отношением сопряженности. Критерий сопряженности элементов обобщенного свободного произведения, известный как теорема Солитэра (см. [7, теорема 4.6]), может быть сформулирован следующим образом:

Предложение 1.1.4. *Произвольный элемент группы*

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Если длины двух циклически несократимых элементов группы G различны, то эти элементы не являются сопряженными. Пусть f и g — циклически несократимые элементы группы G равной длины. Тогда

(1) *Если элемент f принадлежит подгруппе H и не сопряжен в этой подгруппе ни с каким элементом из подгруппы A, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент g также принадлежит подгруппе H и элементы f и g сопряжены в H. Аналогично, если элемент f принадлежит подгруппе K и не сопряжен в этой подгруппе ни с каким элементом из подгруппы B, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент g также принадлежит подгруппе K и элементы f и g сопряжены в K.*

(2) *Если элемент f принадлежит подгруппе A, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда существует такая последовательность элементов*

$$f = a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1} = g,$$

что для каждого $i = 0, 1, \ldots, n \quad a_i \in A$ и элементы a_i и a_{i+1} сопряжены в одной из подгрупп H или K.

(3) *Если длина элемента f больше 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент f сопряжен с некоторой циклической перестановкой g' элемента g при помощи элемента из подгруппы A.*

При этом, циклическими перестановками элемента g с несократимой записью $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ называются элементы вида

$$x_i x_{i+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Легко видеть, что в следующем частном случае теорема Солитэра приобретает более простую формулировку:

Предложение 1.1.5. *Пусть A и B — центральные подгруппы групп H и K соответственно и пусть f и g — циклически несократимые элементы равной длины группы $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$. Тогда*

(1) *если длина элемента f равна 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же подгруппе H или K и сопряжены в этой подгруппе;*

(2) *если длина элемента f больше 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент f совпадает с некоторой циклической перестановкой g' элемента g.*

Прежде, чем приступить к изложению идей и понятий, предложенных Г. Баумслагом для изучения аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений, сделаем несколько замечаний общего характера.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Говорят, что группа G аппроксимируема группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируема), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу X из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-группу), при котором образ элемента g отличен от единицы. Другими словами, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех нормальных подгрупп N группы G, фактор-группы G/N по которым являются $\mathcal{K}$-группами, совпадает с единичной подгруппой.

Напомним, что класс групп $\mathcal{K}$ называется наследственным (гомоморфно замкнутым), если каждая подгруппа (соответственно, каждый гомоморфный образ) произвольной $\mathcal{K}$-группы является $\mathcal{K}$-группой. Договоримся также называть класс $\mathcal{K}$ мультипликативно замкнутым, если прямое произведение произвольного конечного семейства $\mathcal{K}$-групп является $\mathcal{K}$-группой.

Если класс $\mathcal{K}$ наследственен и мультипликативно замкнут, то в силу теоремы Ремака (см., напр., [3, стр. 54]) в произвольной группе семейство всех нормальных подгрупп, фактор-группы по которым являются $\mathcal{K}$-группами, замкнуто относительно взятия пересечения любого конечного набора подгрупп. Это замечание делает очевидным

Предложение 1.1.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — наследственный и мультипликативно замкнутый класс групп. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то для любой ее конечной подгруппы H существует нормальная подгруппа N группы G такая, что $N \cap H = 1$ и фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-группой.*

Напомним далее (см. [8]), что подмножество M группы G называется отделимым в классе групп $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-отделимым), если для любого элемента g группы G, не лежащего в M, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что образ $g\varphi$ элемента g не принадлежит образу $M\varphi$ подмножества M. Нетрудно видеть, что $\mathcal{K}$-отделимость подмножества M равносильна выполнимости равенства $\bigcap MN = M$, где пересечение берется по всем нормальным подгруппам N группы G, фактор-группы по которым являются $\mathcal{K}$-группами.

Очевидно, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда единичная подгруппа группы G является $\mathcal{K}$-отделимой. Это замечание обобщается следующим образом:

Предложение 1.1.7. *Пусть класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут. Нормальная подгруппа N группы G $\mathcal{K}$-отделима в G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/N $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

В самом деле, если подгруппа N группы G $\mathcal{K}$-отделима и элемент gN фактор-группы G/N отличен от единицы, то $g \notin N$, и потому $g \notin NL$ для некоторой нормальной подгруппы L группы G такой, что фактор-группа G/L является $\mathcal{K}$-группой. Это означает, что образ $g(NL)$ элемента gN при естественном гомоморфизме группы G/N на группу G/NL отличен от единицы, и так как группа

$$G/NL \simeq \big(G/L\big)/\big(NL/L\big)$$

является в силу условия предложения $\mathcal{K}$-группой, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G/N доказана.

Обратно, если фактор-группа G/N $\mathcal{K}$-аппроксимируема и элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе N, т. е. gN — неединичный элемент группы G/N, то существует нормальная подгруппа L/N группы G/N такая, что $gN \notin L/N$ и фактор-группа $\bigl(G/N\bigr)/\bigl(L/N\bigr)$ является $\mathcal{K}$-группой. Таким образом, элемент g не принадлежит подгруппе NL для некоторой нормальной подгруппы L группы G такой, что фактор-группа G/L является $\mathcal{K}$-группой, и $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы N доказана.

Замечание перед формулировкой предложения 1.1.6 делает очевидным и

Предложение 1.1.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — наследственный и мультипликативно замкнутый класс групп. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то любая ее конечная подгруппа $\mathcal{K}$-отделима.*

Из предложений 1.1.7 и 1.1.8 сразу получаем

Предложение 1.1.9. *Пусть класс $\mathcal{K}$ наследственен и гомоморфно и мультипликативно замкнут. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то фактор-группа группы G по любой ее нормальной конечной подгруппе также $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

В рассмотрении аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп наиболее изученным является свойство финитной аппроксимируемости, т. е. свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп. Началом систематических исследований финитной аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенными подгруппами следует считать основополагающую работу Г. Баумслага [13]. Приведем необходимые нам понятия и результаты из этой работы.

Будем говорить, что семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G является *фильтрацией*, если

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = 1.$$

Если H — подгруппа группы G, то фильтрация $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется *H-фильтрацией* при условии, что

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HN_\lambda = H.$$

Таким образом, группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда семейство всех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$, является фильтрацией. Подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы отделима в классе $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда указанное семейство является H-фильтрацией.

Основой изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп является

Предложение 1.1.10. (Теорема 2 из [13].) *Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Если группы H и K конечны, то группа G является финитно аппроксимируемой.

Эта теорема Г. Баумслага используется в доказательствах практически всех известных к настоящему времени результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой, причем соответствующие рассуждения так или иначе следуют методике, также предложенной Г. Баумслагом в той же работе [13]. Центральным понятием в этой методике является понятие совместимых подгрупп.

Пусть H и K — некоторые группы, A — подгруппа группы H, B — подгруппа группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ называются (A, B, φ)-*совместимыми*, если выполнено равенство $(A \cap R)\varphi = B \cap S$.

Значение этого понятия проясняется следующим утверждением, справедливость которого хорошо известна и может быть без труда проверена: пункты (1) и (3) проверяются непосредственно, а пункт (2) вытекает из предложения 1.1.1.

Предложение 1.1.11. *Пусть H и K — некоторые группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Тогда*

(1) *Если нормальные подгруппы R и S групп H и K соответственно являются (A, B, φ)-совместимыми, то отображение*
$$\varphi_{R,S} : AR/R \to BS/S,$$
определяемое по правилу
$$(aR)\varphi_{R,S} = (a\varphi)S \qquad (a \in A),$$
хорошо определено и является изоморфизмом подгруппы AR/R фактор-группы H/R на подгруппу BS/S фактор-группы K/S.

(2) *Пусть $G = \big(H{*}K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, R и S — нормальные (A, B, φ)-совместимые подгруппы групп H и K соответственно и*
$$G_{R,S} = \big(H/R * K/S;\ AR/R = BS/S,\ \varphi_{R,S}\big)$$
— свободное произведение групп H/R и K/S с подгруппами AR/R и BS/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы H на фактор-группу H/R и группы K на фактор-группу K/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

(3) *Пересечения произвольной нормальной подгруппы группы $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ с подгруппой H и с подгруппой K являются нормальными (A, B, φ)-совместимыми подгруппами. Поэтому каждый гомоморфизм группы G в некоторую группу проходит через гомоморфизм вида $\rho_{R,S}$ для подходящих (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S.*

Легко видеть также, что если подгруппы R_1 и S_1 групп H и K соответственно (A, B, φ)-совместимы и подгруппы R_2 и S_2 (A, B, φ)-совместимы, то и подгруппы $R_1 \cap R_2$ и $S_1 \cap S_2$ являются (A, B, φ)-совместимыми. С помощью этого замечания и предложений 1.1.10 и

1.1.11 нетрудно доказать следующее утверждение, фактически совпадающее с предложением 2 из работы [13]:

Предложение 1.1.12. *Пусть H и K — некоторые группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп H и K и пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Тогда

(1) *Если группа G финитно аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.*

(2) *Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.*

Рассмотрим теперь вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами, где $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь ситуация оказывается более сложной, так как свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p-групп далеко не всегда является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, т. е. аналог предложения 1.1.10 не имеет места. Необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных p-групп указаны Г. Хигманом в работе [20]. Этот результат можно сформулировать следующим образом:

Предложение 1.1.13. *Пусть H и K — конечные p-группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существуют главные ряды

$$1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_k = H \quad \text{и} \quad 1 = K_0 \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant K_l = K$$

групп H и K соответственно такие, что изоморфизм φ отображает множество пересечений $A \cap H_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ на множество пересечений $B \cap K_j$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$

При этом, как обычно, *главным рядом* группы мы называем ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Легко видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда порядок каждого его фактора равен числу p.

Отметим вытекающие из этого критерия простые достаточные условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп.

Предложение 1.1.14. *Если в условиях предложения 1.1.13 группы A и B являются циклическими или A и B являются центральными подгруппами групп H и K соответственно, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. В частности, обобщенное свободное произведение двух конечных абелевых p-групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Нам понадобится еще одно замечание из работы [20]. Напомним, что $\mathcal{N}$ обозначает класс всех нильпотентных групп.

Предложение 1.1.15. *Обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Предложение 1.1.13 подсказывает, что при изучении аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с объединенной подгруппой аналогом (A, B, φ)-совместимости будет служить следующее понятие.

Пусть снова H и K — произвольные группы с изоморфными подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$ и изоморфизмом $\varphi : A \to B$, p — некоторое простое число. Подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ будем называть *(A, B, φ, p)-совместимыми*, если существуют последовательности подгрупп

$$R = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_k = H \quad \text{и} \quad S = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \dots \leqslant S_l = K$$

групп H и K соответственно такие, что

(1) $R_i \trianglelefteq H$ и $S_j \trianglelefteq K$ $(i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, l)$;

(2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p$ $(i = 0, 1, \dots, k-1;\ j = 0, 1, \dots, l-1)$;

(3) φ отображает множество пересечений $A \cap R_i$ $(i = 0, 1, \dots, k)$ на множество пересечений $B \cap S_j$ $(j = 0, 1, \dots, l)$.

Легко видеть (см., напр., [6]), что произвольные (A, B, φ, p)-совместимые подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ являются (A, B, φ)-совместимыми нормальными подгруппами групп H и K соответственно. Поэтому для произвольной пары (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ можно говорить о группе $G_{R,S}$ и гомоморфизме $\rho_{R,S}$, введенных в предложении 1.1.11. Оказывается, что если R и S — произвольные (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы конечного индекса групп H и K, то группа $G_{R,S}$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой в точности тогда, когда подгруппы R и S (A, B, φ, p)-совместимы. Более того, имеет место следующий аналог предложения 1.1.12:

Предложение 1.1.16. (Предложение 6 из [6]) *Пусть H и K — некоторые группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп групп H и K и пусть $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ — свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Тогда*

(1) *Если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией.*

(2) *Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является B-фильтрацией, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Как пример применения предложения 1.1.16 приведем

Предложение 1.1.17. *Свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп H и K с объединенными конечными центральными подгруппами A и B является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Покажем, в самом деле, что если $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп групп H и K, то семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией.

Пусть M — произвольная нормальная подгруппа группы H, индекс которой в H конечен и равен степени числа p. В соответствии с предложением 1.1.6 выберем в группе H нормальную подгруппу N так, чтобы $A \cap N = 1$ и фактор-группа H/N являлась конечной p-группой. Аналогично, пусть S — нормальная подгруппа группы K такая, что $B \cap S = 1$ и K/S — конечная p-группа. Тогда подгруппы $R = M \cap N$ и S являются, очевидно, (A, B, φ)-совместимыми, и так как группа $G_{R,S}$ в силу предложения 1.1.14 является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, из замечания перед формулировкой предложения 1.1.16 следует, что R и S (A, B, φ, p)-совместимы. Следовательно, $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$ для подходящего $\lambda \in \Lambda$.

Таким образом, каждая нормальная подгруппа M группы H, индекс которой в H конечен и равен степени числа p, содержит некоторую подгруппу из семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Поэтому из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы H следует, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией, а так как подгруппа A в силу предложения 1.1.8 $\mathcal{F}_p$-отделима, оно является A-фильтрацией. Аналогично доказывается, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией.

§ 2. Необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух нильпотентных групп

В этом параграфе будет доказана следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть H и K — произвольные нильпотентные группы с подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$ и пусть $\varphi : A \to B$ — изоморфизм группы A на группу B. Предположим также, что $A \neq H$ и $B \neq K$. Если свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, то существует простое число p такое, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно.

Напомним, что если p — простое число, подгруппа A некоторой группы H называется p-изолированной в группе H, если для любого элемента $h \in H$ из того, что $h^p \in A$ следует, что $h \in A$. Подгруппа A называется изолированной в H, если она p-изолирована для любого простого числа p. Подгруппа A называется p'-изолированной в H, если она q-изолирована в H для всех простых чисел $q \neq p$.

Заметим, что предположение о нильпотентности групп H и K в формулировке теоремы 1 является существенным, как показывает следующее утверждение:

Пусть H и K — свободные группы, A и B — циклические подгруппы групп H и K соответственно. Если подгруппа A является максимальной циклической в H, то группа $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ $\mathcal{N}$-аппроксимируема.

Этот результат был получен Г. Баумслагом [14] в предположении цикличности группы K, а в приведенном виде доказан Д. Н. Азаровым [1].

Таким образом, если подгруппа B группы K порождается элементом вида x^{qr}, где q и r — различные простые числа, то она не является p'-изолированной ни для какого простого числа p, но группа $G = \bigl(H*K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$ является, тем не менее, $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Доказательство теоремы начнем с двух предварительных замечаний.

Предложение 1.2.1. *Пусть $G = \bigl(H * K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$ — свободное произведение некоторых групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Для произвольных элементов $h \in H \setminus A$ и $k \in K \setminus B$ определим последовательность u_1, u_2, ... коммутаторов, полагая $u_1 = k$ и $u_{n+1} = [h, u_n]$ (где, как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$). Тогда для любого $n \geqslant 2$ $\quad l(u_n) = 2^n$ и элемент u_n обладает несократимой записью вида $h^{-1}k^{-1}rhk$ для некоторого элемента $r \in G$.*

Действительно, при $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть для некоторого $n \geqslant 2$ $\ l(u_n) = 2^n$ и одна из несократимых записей элемента u_n имеет вид $h^{-1}k^{-1}rhk$ (т. е. либо $r = 1$, либо первый слог несократимой записи элемента r принадлежит подмножеству $H \setminus A$, а последний — подмножеству $K \setminus B$). Тогда

$$u_{n+1} = h^{-1} \cdot k^{-1}h^{-1}r^{-1}kh \cdot h \cdot h^{-1}k^{-1}rhk = \\ = h^{-1}k^{-1}h^{-1}r^{-1}khk^{-1}rhk,$$

так что несократимая запись элемента u_{n+1} имеет вид $h^{-1}k^{-1}r_1hk$, где $r_1 = h^{-1}r^{-1}khk^{-1}r$. Поэтому

$$l(u_{n+1}) = l(r_1) + 4 = (2l(r) + 4) + 4 = 2(l(r) + 4) = 2l(u_n) = 2^{n+1},$$

и предложение доказано.

Предложение 1.2.2. *Пусть H — нильпотентная группа, A — подгруппа группы H и x и y — такие элементы группы H, не принадлежащие подгруппе A, что для некоторых взаимно простых чисел m и n выполнены включения $x^m \in A$ и $y^n \in A$. Тогда элементы*

x и y принадлежат разным правым смежным классам группы H по подгруппе A.

Покажем, в самом деле, что из равенства $Ax = Ay$ следует включение $x \in A$.

Если A является нормальной подгруппой группы H, это очевидно, так как в фактор-группе H/A из равенств

$$(Ax)^m = A \qquad \text{и} \qquad (Ax)^n = (Ay)^n = A$$

с учетом того, что $(m, n) = 1$, следует равенство $Ax = A$.

Таким образом, мы располагаем основанием индукции по длине ряда

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_s = H$$

последовательных нормализаторов подгруппы A. Так как A_{s-1} является нормальной подгруппой группы H и из равенства $Ax = Ay$ следует равенство $A_{s-1}x = A_{s-1}y$, в силу предыдущего замечания имеем $x \in A_{s-1}$ и $y \in A_{s-1}$. Применяя теперь к подгруппе A_{s-1} индуктивное предположение, получаем требуемое включение $x \in A$. Предложение 1.2.2 доказано.

Переходя теперь непосредственно к доказательству теоремы 1, покажем сначала, что при выполнении условий из ее формулировки найдется такое простое число p, что подгруппа A p'-изолирована в группе H.

Утверждение о p'-изолированности подгруппы A в группе H для некоторого простого числа p равносильно, очевидно, тому, что множество всех простых чисел r таких, что A не является r-изолированной в H, содержит не более одного элемента. Следовательно, рассуждая от противного, мы можем предположить, что для некоторых различных простых чисел p и q и элементов $x \in H \setminus A$ и $y \in H \setminus A$ выполнены включения $x^p \in A$ и $y^q \in A$. Фиксируем еще элемент $k \in K \setminus B$ и обозначим через U подгруппу группы G, порождаемую элементами x, y и k, а через V — подгруппу, порождаемую элементами x^p, y^q и k. Заметим, что V, будучи подгруппой нильпотентной группы K, является нильпотентной группой. Пусть c — ступень нильпотентности V.

Определим далее, как в предложении 1.2.1, две последовательности коммутаторов $u_1, u_2, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots$, полагая $u_1 = k$ и $u_{n+1} = [x, u_n]$, $v_1 = k$ и $v_{n+1} = [y, u_n]$. Фиксируем также целое число m, удовлетворяющее неравенству $m > c$, и полагаем $w = [u_m, v_m]$. Тогда в соответствии с предложением 1.2.1 длина каждого из элементов u_m и v_m равна 2^m и несократимые записи этих элементов имеют вид $u_m = x^{-1}k^{-1}rxk$ и $v_m = y^{-1}k^{-1}syk$ для подходящих элементов r и s группы G. Поскольку в силу предложения 1.2.2 элемент yx^{-1} группы H не принадлежит ее подгруппе A, длина элемента

$$w = k^{-1}x^{-1}r^{-1}kx \cdot k^{-1}y^{-1}s^{-1}ky \cdot x^{-1}k^{-1}rxk \cdot y^{-1}k^{-1}syk$$

равна $4 \cdot 2^m - 1$, и потому w — неединичный элемент группы G и ее подгруппы U.

Так как по условию группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, $\mathcal{N}$-аппроксимируемой является и ее подгруппа U. Поэтому существует гомоморфизм ρ группы U на некоторую нильпотентную группу R такой, что образ $w\rho$ элемента w отличен от единицы. Группа R, являясь гомоморфным образом конечно порожденной группы U, конечно порождена, и так как конечно порожденные нильпотентные группы финитно аппроксимируемы, а потому аппроксимируемы конечными группами примарных порядков (см. [19]), существует гомоморфизм σ группы R на некоторую конечную примарную группу S такой, что образ $(w\rho)\sigma$ элемента $w\rho$ отличен от единицы. Таким образом, мы указали гомоморфизм $\tau = \rho\sigma$ группы U на конечную группу S примарного порядка такой, что $w\tau \neq 1$.

С другой стороны, хотя бы одно из чисел p или q должно быть взаимно простым с порядком группы S; пусть этим числом является p. Поскольку в силу включения $x^p \in V$ имеет место включение $(x\tau)^p \in V\tau$ и циклические подгруппы, порождаемые в группе S элементами $x\tau$ и $(x\tau)^p$, совпадают, получаем $x\tau \in V\tau$. Очевидная индукция показывает теперь, что для любого $n \geqslant 1$ элемент $u_n\tau$ принадлежит n-му члену $\gamma_n(V\tau)$ нижнего центрального ряда группы $V\tau$.

В силу выбора числа m имеем поэтому $u_m\tau = 1$, откуда и $w\tau = 1$, что противоречит выбору гомоморфизма τ.

Итак, существование простого числа p такого, что подгруппа A p'-изолирована в группе H, доказано. Аналогично показывается, что для некоторого простого числа q подгруппа B является q'-изолированной в группе K. Остается показать, что или подгруппа A в группе H является q'-изолированной, или подгруппа B в группе K является p'-изолированной.

Предположим, напротив, что A не является q'-изолированной в H и B не является p'-изолированной в K. Тогда $p \neq q$ и так как A p'-изолирована в группе H, она не является p-изолированной, т. е. для некоторого элемента $h \in H \setminus A$ выполнено включение $h^p \in A$. Аналогично, для некоторого элемента $k \in K \setminus B$ справедливо включение $k^q \in B$. Пусть теперь U обозначает подгруппу, порождаемую в группе G элементами h и k, V_1 и V_2 — ее подгруппы, порожденные элементами h^p и k и элементами h и k^q соответственно. Тогда поскольку $V_1 \leqslant K$ и $V_2 \leqslant H$, обе подгруппы V_1 и V_2 нильпотентны, и мы фиксируем целое число m, большее ступени нильпотентности каждой из них. Снова определим последовательность коммутаторов $u_1 = k$ и $u_{n+1} = [h, u_n]$ из предложения 1.2.1 и, рассуждая как выше, укажем гомоморфизм τ группы U на конечную группу S примарного порядка такой, что $u_m\tau \neq 1$. С другой стороны, опять считая без потери общности, что число p взаимно просто с порядком группы S, приходим к заключению о том, что элемент $h\tau$ принадлежит подгруппе $V_1\tau$, и потому для любого $n \geqslant 1$ элемент $u_n\tau$ принадлежит n-му члену $\gamma_n(V_1\tau)$ нижнего центрального ряда группы $V_1\tau$. В силу выбора числа m имеем поэтому $u_m\tau = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

§ 3. Нильпотентная аппроксимируемость обобщенного свободного произведения нильпотентных групп с конечным объединением

Так как класс $\mathcal{N}$ всех нильпотентных групп является наследственным и мультипликативно замкнутым, то в силу предложения 1.1.6 всякая конечная подгруппа $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группы должна быть нильпотентной. В частности, если обобщенное свободное произведение двух конечных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, то оба свободных множителя должны быть нильпотентными группами. При выполнении этого условия критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть H и K — конечные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно, причем $A \neq H$ и $B \neq K$, и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для некоторого простого делителя p порядков групп H и K выполнены следующие два условия:

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(2) *подгруппа $G(p)$ группы G, порожденная силовскими p-подгруппами групп H и K соответственно, является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Эта теорема является частным случаем теоремы 6 из работы Д. Варсоса [29]. Здесь мы ее выведем из доказываемой ниже более общей теоремы 4, а в следующем параграфе, основываясь на ее формулировке, получим аналог предложений 1.1.12 и 1.1.16.

Напомним ряд обычных соглашений, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем. Для некоторого фиксированного множества π простых чисел целое число n называют π-числом, если оно делится лишь на простые числа, принадлежащие множеству π. Если m — фиксированное целое, то m-числами называются $\pi(m)$-числа, где $\pi(m)$ — множество всех простых делителей числа m. Кроме того, через π' здесь обозначается множество всех простых чисел, не принадлежащих множеству π; вместо $\{p\}'$ будем писать p'.

π-элементом некоторой группы будем называть элемент конечного порядка, являющегося π-числом. Аналогичный и очевидный смысл имеют выражения “группа без π-кручения”, “подгруппа конечного π-индекса”и т. п. $\pi(X)$ будет обозначать множество всех простых делителей порядка конечной группы X.

Как отмечалось во введении, А. И. Мальцев в работе [9] показал, в частности, что обычное свободное произведение $H * K$ неединичных конечно порожденных нильпотентных групп H и K является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах H и K все элементы конечного порядка являются p-элементами для некоторого простого числа p. Поскольку конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является конечной p-группой, и (обычное) свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп снова является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой (см. [19]), из этого результата Мальцева следует, что (обычное) свободное произведение двух неединичных конечно порожденных нильпотентных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p. Для обобщенных свободных произведений нильпотентных групп это утверждение не имеет места, как показывает следующий простой пример.

Пусть

$$H = \langle a, c;\ [a, c] = a^2 = c^3 = 1\rangle$$

и

$$K = \langle b, d;\ [b, d] = b^2 = d^3 = 1\rangle$$

— прямые произведения двух циклических групп порядков 2 и 3, A — подгруппа группы H, порожденная элементом a, B — подгруппа группы K, порожденная элементом b, и $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ — свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с очевидным изоморфизмом $\varphi : A \to B$. Очевидно, что подгруппа A $3'$-изолирована в H и подгруппа B $3'$-изолирована в K. Кроме того, подгруппа $G(3)$, являясь свободным произведением двух циклических групп порядка 3 (порождаемых элементами c и d соответственно), $\mathcal{F}_3$-аппроксимируема. Таким образом, по теореме 2 группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой. Тем не менее, она не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p, поскольку содержит элементы порядков 2 и 3.

С другой стороны, ввиду замечания Г. Хигмана (см. предложение 1.1.15) обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Это утверждение допускает следующее обобщение:

Теорема 3. *Пусть $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B. Если для некоторого простого числа p периодические части групп H и K являются p-группами, то группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными подгруппами A и B, причем подгруппы A и B конечны. Предположим также, что в группах H и K все элементы конечного порядка являются p-элементами для некоторого простого числа p. Так как достаточность условия ввиду нильпотент- ности произвольной конечной p-группы очевидна, следует доказать лишь, что при выполнении условий теоремы 3 из $\mathcal{N}$-аппроксимируемости группы G следует ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость.

Итак, предположим, что группа G аппроксимируема нильпотентными группами. Поскольку ее подгруппа $A = B$ конечна, ввиду предложения 1.1.6 найдется нормальная подгруппа N группы G такая, что фактор-группа $\overline{G} = G/N$ нильпотентна и $N \cap A = 1$. Обозначим через $\overline{T}$ периодическую часть группы $\overline{G}$, а через $\overline{T}_p$ — подгруппу, состоящую из всех p'-элементов группы $\overline{T}$. Тогда фактор-группа $\overline{G}/\overline{T}_p$ нильпотентна и не имеет p'-кручения. Записывая подгруппу $\overline{T}_p$ в виде $\overline{T}_p = T_p/N$ для некоторой подгруппы T_p группы G, содержащей подгруппу N, мы видим, что фактор-группа G/T_p, изоморфная группе $\overline{G}/\overline{T}_p$, нильпотентна и не имеет p'-кручения. Кроме того, поскольку пересечение подгрупп $\overline{T}_p$ и $\overline{A} = AN/N$ совпадает, очевидно, с единичной подгруппой, имеем $T_p \cap AN = N$.

Так как группа G/T_p является конечно порожденной нильпотентной группой без p'-кручения, она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и потому содержит нормальную подгруппу M/T_p, имеющую конечный p-индекс и тривиально пересекающуюся с (конечной) подгруппой AT_p/T_p. Таким образом, мы нашли нормальную подгруппу M конечного p-индекса группы G такую, что $M \cap AT_p = T_p$.

Поскольку, далее,

$$M \cap A = M \cap A \cap AT_p = A \cap T_p = A \cap AN \cap T_p = A \cap N = 1,$$

нормальная подгруппа M группы $G = \bigl(H * K;\ A = B, \varphi\bigr)$ тривиально пересекается с объединяемыми подгруппами A и B. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см. предложение 1.1.3) группа M является свободным произведением некоторой свободной группы и некоторого семейства подгрупп, каждая из которых сопряжена с некоторой подгруппой или группы H или группы K, т. е. — свободным произведением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп. Таким образом, группа G содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую нормальную подгруппу конечного p-индекса и потому является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Теорема 3 доказана.

Сформулированная выше теорема 2 дает необходимое и достаточное условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Получить окончательный критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп в предположении конечности лишь объединяемых подгрупп не удалось. Для этого случая сейчас будут указаны необходимые условия $\mathcal{N}$-аппроксимируемости, а также — достаточные условия. Для формулировки этого результата необходимо ввести некоторые обозначения.

Если X — конечная нильпотентная группа и p — простое число, входящее в $\pi(X)$, то символом $S_p(X)$ будем обозначать единственную силовскую p-подгруппу группы X. Иногда нам будет удобно использовать это обозначение и в тех случаях, когда число p не является делителем порядка группы X; тогда $S_p(X)$ обозначает, разумеется, единичную подгруппу. Это соглашение используется, в частности, в формулировке следующего утверждения:

Предложение 1.3.1. *Пусть X — конечная нильпотентная группа. Тогда для любой подгруппы $Y \leqslant X$ и любого простого числа $p \in \pi(X)$ имеет место равенство $S_p(Y) = S_p(X) \cap Y$.*

В самом деле, включение правой части этого равенства в левую очевидно ввиду единственности силовских подгрупп. С другой стороны, поскольку фактор-группа $Y/(S_p(X) \cap Y)$ изоморфно вкладывается в фактор-группу $X/S_p(X)$, индекс подгруппы $S_p(X) \cap Y$ в группе Y является p'-числом.

Если X — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа, договоримся писать $S_p(X)$ вместо $S_p(\tau(X))$ (где, разумеется, $\tau(X)$ обозначает периодическую часть группы X). Так как для любой подгруппы $Y \leqslant X$ очевидно имеем $Y \cap \tau(X) = \tau(Y)$, в предложении 1.3.1 требование конечности можно ослабить до требования конечной порожденности.

Из предложений 1.3.1 и 1.1.2 непосредственно следует

Предложение 1.3.2. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответ-*

ственно и φ *— некоторый изоморфизм группы* A *на группу* B*. Тогда для любого простого числа* p *подгруппы* $S_p(H)$ *и* $S_p(K)$ *являются* (A, B, φ)*-совместимыми. В частности, подгруппа* $G(p)$ *группы*

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\, \varphi\bigr),$$

порожденная подгруппами $S_p(H)$ *и* $S_p(K)$*, является свободным произведением групп* $S_p(H)$ *и* $S_p(K)$ *с подгруппами* $S_p(A)$ *и* $S_p(B)$*, объединенными относительно изоморфизма* φ*.*

(Здесь и ниже мы используем символ φ и для обозначения ограничений отображения φ на подгруппы группы A.)

Если снова X — произвольная конечно порожденная нильпотентная группа, для любого простого числа p символом $X^{(p)}$ будем обозначать подгруппу группы X, порожденную всеми силовскими q-подгруппами из $\tau(X)$, где $q \neq p$. Очевидно, что пересечение всех подгрупп вида $X^{(p)}$, где $p \in \pi(\tau(X))$, совпадает с единичной подгруппой. Заметим также, что для любого простого числа p подгруппа $X^{(p)}$ является нормальной в группе X, так как она состоит в точности из всех p'-элементов этой группы.

Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Так как для произвольного простого числа p пересечение $A \cap H^{(p)}$ совпадает с множеством всех p'-элементов подгруппы A и пересечение $B \cap K^{(p)}$ совпадает с множеством всех p'-элементов подгруппы B, имеем

$$(A \cap H^{(p)})\varphi = B \cap K^{(p)}.$$

Следовательно, подгруппы $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ являются (A, B, φ)-совместимыми, и потому мы можем построить свободное произведение

$$G_p = \bigl(H/H^{(p)} * K/K^{(p)};\ AH^{(p)}/H^{(p)} = BK^{(p)}/K^{(p)},\, \varphi_p\bigr)$$

фактор-групп $H/H^{(p)}$ и $K/K^{(p)}$ с подгруппами $AH^{(p)}/H^{(p)}$ и $BK^{(p)}/K^{(p)}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом

$$\varphi_p : AH^{(p)}/H^{(p)} \to BK^{(p)}/K^{(p)},$$

действующим по правилу $(aH^{(p)})\varphi_p = (a\varphi)K^{(p)}$. Естественные отображения группы H на фактор-группу $H/H^{(p)}$ и группы K на фактор-группу $K/K^{(p)}$ продолжаемы до гомоморфизма ρ_p группы

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

на группу G_p.

Предложение 1.3.3. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Предположим, что для некоторого простого числа p подгруппы $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ содержатся в подгруппах A и B соответственно. Тогда $H^{(p)}\varphi = K^{(p)}$ и потому в группе*

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

подгруппа $H^{(p)}$ совпадает с подгруппой $K^{(p)}$ и является нормальной подгруппой. Фактор-группа $G/H^{(p)}$ изоморфна группе G_p.

В самом деле, в силу предложения 1.3.1 из включений $H^{(p)} \leqslant A$ и $K^{(p)} \leqslant B$ следует, что для любого $q \neq p$ $\ S_q(A) = S_q(H)$ и $S_q(B) = S_q(K)$. Так как $S_q(A)\varphi = S_q(B)$, $\ H^{(p)}\varphi = K^{(p)}$ и совпадение в группе G подгрупп $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ теперь очевидно. Очевидно также, что подгруппа $H^{(p)}$ содержится в ядре гомоморфизма ρ_p. Покажем, что она совпадает с этим ядром. Поскольку действие гомоморфизма ρ_p на подгруппах H и K совпадает с естественными отображениями группы H на фактор-группу $H/H^{(p)}$ и группы K на фактор-группу $K/K^{(p)}$, для этого достаточно показать, что ни один элемент группы G, длина которого больше 1, ядру этого гомоморфизма не принадлежит.

Если $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ — несократимая запись элемента $g \in G$ и $n > 1$, то каждый слог x_i этой записи либо принадлежит группе

H и не входит в подгруппу A, либо принадлежит группе K и не входит в подгруппу B. Но если $x_i \in H \setminus A$, то, поскольку $H^{(p)} \leqslant A$, $x_i\rho_p = x_iH^{(p)} \notin A/H^{(p)}$, а если $x_i \in K \setminus B$, то поскольку $K^{(p)} \leqslant B$, $x_i\rho_p = x_iK^{(p)} \notin B/K^{(p)}$. Следовательно, запись

$$g\rho_p = (x_1\rho_p)(x_2\rho_p)\cdots(x_n\rho_p)$$

элемента $g\rho_p$ является несократимой в группе G_p, и потому этот элемент отличен от единицы. Таким образом, $\operatorname{Ker}\rho_p = H^{(p)}$, и предложение 1.3.3 доказано.

Сформулируем теперь объявленный выше результат:

Теорема 4. *Пусть $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными конечными подгруппами A и B, причем $A \neq H$ и $B \neq K$.*

Если группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Обратно, пусть существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно, и пусть для любого простого делителя q порядка группы $\tau(H)$ или для любого простого делителя q порядка группы $\tau(K)$ группа G_q $\mathcal{F}_q$-аппроксимируема. Тогда группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

В работе Кима и Маккаррона [22] показано, что свободное произведение двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с объединенными конечными циклическими подгруппами является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. Поскольку в нашем случае для любого простого числа p группы $H/H^{(p)}$ и $K/K^{(p)}$ являются конечно порожденными нильпотентными без p'-кручения и потому в силу [19] $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, имеем

Следствие. *Свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединен-*

ными конечными циклическими подгруппами A и B (где $A \neq H$ и $B \neq K$) является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно.

Доказательство теоремы 4. Если группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, то ввиду теоремы 1 существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K. Это означает, очевидно, что подгруппа $H^{(p)}$ содержится в подгруппе A и подгруппа $K^{(p)}$ содержится в подгруппе B. Ввиду предложения 1.3.3 в группе G подгруппа $H^{(p)} = K^{(p)}$ является нормальной, и фактор-группа $G/H^{(p)}$ изоморфна группе G_p. Поскольку в силу предложений 1.1.7 и 1.1.8 фактор-группа произвольной $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группы по ее конечной нормальной подгруппе является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, отсюда следует, что группа G_p $\mathcal{N}$-аппроксимируема. Так как в группах $H/H^{(p)}$ и $K/K^{(p)}$ все элементы конечного порядка являются p-элементами, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G_p следует теперь из теоремы 3.

Обратно, предположим, что для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и что для любого $q \in \pi(\tau(H))$ группа G_q является $\mathcal{F}_q$-аппроксимируемой. Как и выше, в этом случае подгруппа $H^{(p)} = K^{(p)}$ является нормальной в группе G, и фактор-группа $G/H^{(p)}$ изоморфна группе G_p. Поэтому если $p \in \pi(\tau(H))$, то группа $G/H^{(p)}$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой в силу предположений. Если же $p \notin \pi(\tau(H))$, то $H^{(p)} = \tau(H)$, откуда следует, что $A = H^{(p)}$ и потому в силу предложения 1.3.3 $B = K^{(p)}$. Таким образом, в этом случае группа G_p является обычным свободным произведением конечно порожденных нильпотентных групп $H/H^{(p)}$ и $K/K^{(p)}$ без p'-кручения и потому $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Итак, в любом случае группа $G/H^{(p)}$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Поэтому если элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе $H^{(p)}$, существование гомоморфизма ρ группы G на нильпотентную группу, при котором $g\rho \neq 1$, очевидно.

Если же неединичный элемент $g \in G$ принадлежит подгруппе $H^{(p)}$, то поскольку пересечение всех подгрупп вида $H^{(q)}$ совпадает с единичной подгруппой, элемент g не принадлежит подгруппе $H^{(q)}$ для некоторого простого числа $q \in \pi(\tau(H))$. Так как действие на подгруппе H соответствующего гомоморфизма ρ_q группы G на группу G_q совпадает с естественным гомоморфизмом группы H на фактор-группу $H/H^{(q)}$, то $g\rho_q \neq 1$, и существование гомоморфизма ρ группы G на нильпотентную группу, для которого $g\rho \neq 1$, следует теперь из предположения об $\mathcal{F}_q$-аппроксимируемости группы G_q. Теорема 4 доказана.

Следует, однако заметить, что в том случае, когда подгруппы A и B совпадают с периодическими частями групп H и K соответственно, первое утверждение теоремы 4 выполняется автоматически, т. е. в этом случае всегда можно указать такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Действительно, так как фактор-группы H/A и K/B не имеют кручения, подгруппы A и B будут p'-изолированными при любом простом p. Если выбрать p не принадлежащим множеству $\pi(A)$, то подгруппы $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ совпадут с подгруппами A и B соответственно, и группа G_p окажется изоморфной обычному свободному произведению конечно порожденных нильпотентных групп без кручения H/A и K/B, т. е. — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Из этого замечания следует, что существование примера свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с объединенными периодическими частями, не являющегося $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой, покажет, что необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости в теореме 4 не является достаточным. Такой пример сейчас будет построен.

Пусть A — четверная группа Клейна, т. е. $A = U \times V$ — прямое произведение циклических групп U и V порядка 2 с порождающими u и v соответственно. Группа

$$H = \langle h, u, v;\ u^2 = v^2 = [u, v] = 1,\ h^{-1}uh = v,\ h^{-1}vh = u\rangle$$

является расщепляемым расширением группы A при помощи бесконечной циклической группы с порождающим h, причем сопряжение элементом h индуцирует автоморфизм группы A, меняющий местами элементы u и v и оставляющий неподвижным элемент $w = uv$. Циклическая подгруппа W, порождаемая в группе H элементом w, является центральной, а фактор-группа H/W абелева. Таким образом, H — нильпотентная группа, периодическая часть которой совпадает с подгруппой A.

Аналогично, группа

$$K = \langle k, u, v;\ u^2 = v^2 = [u, v] = 1,\ k^{-1}uk = uv,\ k^{-1}uvk = u\rangle$$

является расщепляемым расширением группы A при помощи бесконечной циклической группы с порождающим k, причем сопряжение элементом k индуцирует автоморфизм группы A, меняющий местами элементы u и $w = uv$ и оставляющий неподвижным элемент v. Здесь подгруппа V является центральной, и фактор-группа K/V абелева, так что K также является нильпотентной группой с периодической частью, равной A.

Покажем, что группа $G = \big(H * K;\ A\big)$, свободное произведение групп H и K с объединенной относительно тождественного изоморфизма подгруппой A, не является $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой. В силу теоремы 3 это и будет означать, что группа G не является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Пусть $g = hk$. Непосредственные вычисления показывают, что элемент g^3 принадлежит централизатору элемента u. Отсюда следует, как легко видеть, что если порядок образа $g\rho$ элемента g при гомоморфизме ρ группы G в некоторую группу не делится на 3, то элементы $g\rho$ и $u\rho$ перестановочны. Следовательно, при любом гомоморфизме группы G на конечную 2-группу ее неединичный элемент $[g, u] = uv$ переходит в единицу, и группа G действительно не является $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой.

Возвращаясь к формулировке теоремы 4, заметим, что, с другой стороны, если, скажем, $A \neq \tau(H)$, и подгруппа A p'-изолирована, то $p \in \pi(\tau(H))$, поскольку в противном случае все силовские подгруппы группы $\tau(H)$ лежали бы в подгруппе A. В частности, если подгруппы $\tau(H)$ и $\tau(K)$ являются p-группами и $A \neq \tau(H)$ или $B \neq \tau(K)$, то p оказывается единственным простым числом таким, что подгруппы A и B являются p'-изолированными. Кроме того, здесь подгруппы $H^{(p)}$ и $K^{(p)}$ оказываются единичными, и потому группа G_p изоморфна группе G. Следовательно, в этом случае теорема 4 утверждает, что $\mathcal{N}$-аппроксимируемость группы G равносильна ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, т. е. теорема 3 в случае, когда $A \neq \tau(H)$ или $B \neq \tau(K)$, содержится в теореме 4.

Покажем теперь, что теорема 2 является следствием теоремы 4.

Для этого заметим предварительно, что если группы H и K конечны и для некоторого простого делителя p порядков групп H и K подгруппы A и B p'-изолированы, то группа G_p изоморфна группе $G(p)$, а при $q \neq p$ группа G_q изоморфна фактор-группе $H/H^{(q)}$.

В самом деле, в этом случае $H = S_p(H) \times H^{(p)}$, $K = S_p(K) \times K^{(p)}$, и так как из p'-изолированности подгрупп A и B следуют включения $H^{(p)} \leqslant A$ и $K^{(p)} \leqslant B$, имеем

$$A = (S_p(H) \cap A) \times H^{(p)} \qquad \text{и} \qquad B = (S_p(K) \cap B) \times K^{(p)}.$$

Поскольку группа $G(p)$ в силу предложения 1.3.2 является свободным произведением

$$\big(S_p(H) * S_p(K);\ S_p(H) \cap A = S_p(K) \cap B, \varphi\big)$$

групп $S_p(H)$ и $S_p(K)$ с подгруппами $S_p(H) \cap A$ и $S_p(K) \cap B$, объединенными относительно изоморфизма φ, проектирования $\alpha : H \to S_p(H)$ группы H на подгруппу $S_p(H)$ и $\beta : K \to S_p(K)$ группы K на подгруппу $S_p(K)$ можно считать гомоморфизмами групп H и K в группу $G(p)$. Утверждается, что они согласованы с изоморфизмом φ.

Действительно, записывая элемент $a \in A$ в виде $a = xy$, где $x \in S_p(H) \cap A$ и $y \in H^{(p)}$, с учетом выполнимости в группе $G(p)$ равенства $x = x\varphi$, имеем

$$(a\varphi)\beta = (x\varphi y\varphi)\beta = x\varphi = x = a\alpha.$$

Из предложения 1.1.1 теперь следует существование гомоморфизма $\rho : G \to G(p)$ группы G в группу $G(p)$, продолжающего отображения α и β. Поскольку группа $G(p)$ порождается ρ-образами подгрупп H и K, этот гомоморфизм сюръективен. Можно показать, рассуждая так же, как и в доказательстве предложения 1.3.3, что его ядро совпадает с подгруппой $H^{(p)}$. Следовательно, группа $G(p)$ изоморфна фактор-группе $G/H^{(p)}$, и в силу предложения 1.3.3 имеем $G_p \simeq G(p)$.

Таким образом, первое из заявленных утверждений доказано. Второе следует из того, что при $q \neq p$ выполнены равенства $AH^{(q)} = H$ и $BK^{(q)} = K$, и потому в построении группы G_q как свободного произведения

$$G_q = \bigl(H/H^{(q)} * K/K^{(q)};\ AH^{(q)}/H^{(q)} = BK^{(q)}/K^{(q)},\, \varphi_q\bigr)$$

каждый из свободных множителей $H/H^{(q)}$ и $K/K^{(q)}$ совпадает с соответствующей объединяемой подгруппой $AH^{(q)}/H^{(q)}$ и $BK^{(q)}/K^{(q)}$.

Если теперь группа

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\, \varphi\bigr),$$

где H и K — конечные нильпотентные группы и $A \neq H$ и $B \neq K$, является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, то из теоремы 4 следует, что для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно и группа G_p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. При этом, как отмечено выше, число p является делителем порядков групп H и K, и так как $G_p \simeq G(p)$, небходимость условий теоремы 2 доказана.

Обратно, если для некоторого простого делителя p порядков групп H и K подгруппы A и B p'-изолированы и подгруппа $G(p)$ группы G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то ввиду сделанных только что замечаний выполнены условия соответствующей части теоремы 4, откуда и следует $\mathcal{N}$-аппроксимируемость группы G. Теорема 2 доказана.

§ 4. Нильпотентная аппроксимируемость обобщенного свободного произведения конечно порожденных абелевых групп

Необходимое условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения нильпотентных групп, доставляемое теоремой 1, не является достаточным. Это показывает пример, приведенный в предыдущем параграфе после теоремы 4. Тем не менее, здесь мы покажем, что если свободные множители являются конечно порожденными абелевыми группами, это условие оказывается и достаточным для $\mathcal{N}$-аппроксимируемости. А именно, в этом параграфе будет доказана следующая

Теорема 5. *Пусть H и K — конечно порожденные абелевы группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно, причем $A \neq H$ и $B \neq K$, и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

групп H и K с объединенными подгруппами A и B является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется достаточное условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп, аналогичное предложениям 1.1.12 и 1.1.16 . Начнем с введения соответствующей модификации понятия (A, B, φ)-совместимости.

Пусть снова H и K — некоторые группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и φ — изоморфизм группы A на группу B. Пусть

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными подгруппами A и B. Фиксируем также простое число p.

Нормальные подгруппы R и S групп H и K будем называть $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-*совместимыми*, если выполнены следующие условия:

(1) фактор-группы H/R и K/S являются конечными нильпотентными группами;

(2) подгруппы R и S (A, B, φ)-совместимы;

(3) подгруппы AR и BS p'-изолированы в H и K;

(4) подгруппа $G_{R,S}(p)$ группы $G_{R,S}$, порожденная силовскими p-подгруппами групп H/R и K/S соответственно, является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Так как в силу пункта (3) этого определения подгруппы AR/R и BS/S групп H/R и K/S p'-изолированы, непосредственно из теоремы 2 получаем

Предложение 1.4.1. *Если подгруппы R и S групп H и K $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-совместимы, то группа*

$$G_{R,S} = \big(H/R * K/S;\ AR/R = BS/S,\ \varphi_{R,S}\big)$$

является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Теперь мы можем сформулировать достаточное условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп.

Предложение 1.4.2. *Пусть H и K — некоторые группы, $A \leqslant H$, $B \leqslant K$ и φ — изоморфизм подгруппы A на подгруппу B. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-совместимых нормальных подгрупп групп H и K. Предположим, что*

(1) *каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией и*

(2) *для любых элементов $h_1, h_2, \ldots, h_m$ группы H, не принадлежащих подгруппе A, и для любых элементов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ группы K, не принадлежащих подгруппе B, найдется $\lambda \in \Lambda$ такое, что элементы $h_1, h_2, \ldots, h_m$ не входят в подгруппу AR_λ и элементы $k_1, k_2, \ldots, k_n$ не входят в подгруппу BS_λ.*

Тогда свободное произведение

$$G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$$

групп H и K с объединенными подгруппами A и B является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой.

Доказательство. Пусть g — неединичный элемент группы G и пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ — несократимая запись этого элемента.

Рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$, т. е. элемент g лежит в одной из подгрупп H или K группы G. Пусть, для определенности, $g \in H$. Так как семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, найдется $\lambda \in \Lambda$ такое, что подгруппа R_λ не содержит элемента g. Очевидно тогда, что образ элемента g при гомоморфизме $\rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ не равен единице в группе G_{R_λ, S_λ}. Эта группа ввиду предложения 1.4.1 является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, и поэтому существует гомоморфизм σ группы G_{R_λ, S_λ} на некоторую нильпотентную группу, при котором образ элемента $g\rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ отличен от единицы. Тогда отображение $\rho_{R_\lambda, S_\lambda}\sigma$ является гомоморфизмом группы G на нильпотентную группу, при котором образ элемента g отличен от единицы.

Пусть теперь $n > 1$. Опять для определенности предположим, что $x_1 \in H$ (случай, когда $x_1 \in K$, рассматривается совершенно аналогично). Тогда сомножители x_1, x_3, $\ldots$ несократимой записи элемента g с нечетными номерами лежат в группе H и не входят в ее подгруппу A, а сомножители x_2, x_4, $\ldots$ с четными номерами лежат в в группе K и не входят в ее подгруппу B. Ввиду условия (2) найдется $\lambda \in \Lambda$ такое, что элементы x_1, x_3, $\ldots$ не входят в подгруппу AR_λ и элементы x_2, x_4, $\ldots$ не входят в подгруппу BS_λ и потому запись

$$g\rho_{R_\lambda, S_\lambda} = x_1 R_\lambda \cdot x_2 S_\lambda \cdot x_3 R_\lambda \cdot \cdots$$

образа элемента g относительно отображения $\rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ является несократимой и имеет длину n. Следовательно, элемент $g\rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ является неединичным элементом группы G_{R_λ, S_λ}. Завершение доказательства существования гомоморфизма группы G на нильпотентную группу, при котором образ элемента g отличен от единицы, проходит теперь так же, как в первом случае. Предложение доказано.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Предложение 1.4.3. *Пусть H — конечно порожденная абелева группа, p — некоторое простое число и A — p'-изолированная подгруппа группы H. Тогда для любой подгруппы $C \leqslant A$ конечного индекса в A существует подгруппа $R \leqslant H$ конечного индекса в H такая, что $R \cap A = C$ и подгруппа AR имеет конечный p-индекс в H. Более того,*

(1) *если h — произвольный элемент группы H, не принадлежащий подгруппе C, то подгруппу R можно выбрать таким образом, чтобы, к тому же, $h \notin R$;*
(2) *если h_1, h_2, ... , h_m — произвольные элементы группы H, не принадлежащие подгруппе A, то подгруппу R можно выбрать таким образом, чтобы, к тому же, элементы h_1, h_2, ... , h_m не принадлежали подгруппе AR.*

Доказательство. Так как подгруппа A p'-изолирована в группе H, периодическая часть T/A фактор-группы H/A является конечной p-группой, а фактор-группа H/T, будучи конечно порожденной абелевой группой без кручения, является свободной абелевой группой. Поэтому группа H является прямым произведением, $H = T \times M$, группы T и некоторой свободной абелевой группы M. Выбрав произвольную подгруппу M_0 конечного p-индекса группы M, полагаем $R = CM_0$. Тогда $R = C \times M_0$ и, так как $AR = AM_0 = A \times M_0$, имеем $H/AR \simeq T/A \times M/M_0$. Следовательно, индекс подгруппы AR в группе H является p-числом. Кроме того, $R \cap A = (R \cap T) \cap A = C$, так что подгруппа R искомая.

Покажем теперь, что если h — элемент группы H, не принадлежащий подгруппе C, то при подходящем выборе подгруппы M_0 можно добиться того, чтобы $h \notin R$.

Запишем элемент h в виде $h = xy$, где $x \in T$ и $y \in M$. Если $y = 1$, то $x \notin C$, и потому при любом выборе подгруппы M_0 элемент h

не принадлежит подгруппе $R = C \times M_0$. Если же $y \neq 1$, то поскольку группа M $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, подгруппу M_0 можно выбрать так, чтобы $y \notin M_0$. Тогда снова имеем, очевидно, что $h \notin R = C \times M_0$, и утверждение (1) доказано.

Пусть, наконец, $h_1, h_2, \dots, h_m$ — элементы группы H, не принадлежащие подгруппе A, и пусть $h_i = x_i y_i$, где $x_i \in T$ и $y_i \in M$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Заметим, что если $y_i = 1$, то $x_i \notin A$ и потому соответствующий элемент h_i не принадлежит подгруппе $AR = A \times M_0$ при любом выборе подгруппы M_0. Если поэтому подгруппу M_0 выбрать так, чтобы она не содержала всех неединичных элементов из последовательности $y_1, y_2, \dots, y_m$, то все элементы $h_1, h_2, \dots, h_m$ не будут принадлежать подгруппе AR. Предложение доказано.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 5.

Необходимость условия следует непосредственно из теоремы 1. Докажем достаточность.

Предположим, что для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K. Мы покажем, что тогда семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ всех пар $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-совместимых нормальных подгрупп групп H и K удовлетворяет условиям предложения 1.4.2. Тем самым $\mathcal{N}$-аппроксимируемость группы G будет доказана.

Заметим сначала, что если R и S такие (A, B, φ)-совместимые подгруппы конечного индекса групп H и K, что подгруппы AR и BS p'-изолированы, то R и S являются $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-совместимыми. Действительно, так как фактор-группы H/R и K/S абелевы и конечны, условие (1) из определения $(A, B, \varphi, p, \mathcal{N})$-совместимости выполнено. Второе и третье условия выполняются автоматически ввиду предположений о подгруппах R и S. Наконец, подгруппа $G_{R,S}(p)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема в силу предложения 1.1.14.

Пусть h — произвольный неединичный элемент подгруппы H. Утверждается, что найдется подгруппа C конечного индекса группы A, не содержащая элемента h. Действительно, если $h \in A$, то существование такой подгруппы вытекает из финитной аппроксимируемости группы A, а если $h \notin A$, то может быть выбрана произвольная подгруппа конечного индекса группы A. В соответствии с предложением 1.4.3 существует подгруппа $R \leqslant H$ конечного индекса в H, не содержащая элемента h и такая, что $R \cap A = C$ и подгруппа AR имеет конечный p-индекс в H. Аналогично, в группе K существует подгруппа S конечного индекса такая, что $S \cap B = C\varphi$ и подгруппа BS имеет конечный p-индекс в K. Очевидно тогда, что подгруппы R и S являются (A, B, φ)-совместимыми, а так как H и K абелевы, подгруппы AR и BS p'-изолированы. Следовательно, ввиду замечания, сделанного выше, найдется $\lambda \in \Lambda$ такое, что $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$. Таким образом, произвольный неединичный элемент из подгруппы H не входит в некоторую подгруппу семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, и потому это семейство является фильтрацией. Аналогично доказывается, что и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией.

Докажем теперь выполнимость условия (2) предложения 1.4.2. Пусть h_1, h_2, ... , h_m — элементы группы H, не принадлежащие подгруппе A, и k_1, k_2, ... , k_n — элементы группы K, не принадлежащие подгруппе B. Возьмем произвольную подгруппу C конечного индекса группы A и в соответствии с предложением 1.4.3 выберем подгруппу $R \leqslant H$ конечного индекса в H такую, что $R \cap A = C$ и подгруппа AR p'-изолирована в H и не содержит элементов h_1, h_2, ... , h_m. Аналогично, выберем подгруппу $S \leqslant K$ конечного индекса в K такую, что $S \cap B = C\varphi$ и подгруппа BS p'-изолирована в K и не содержит элементов k_1, k_2, ... , k_n. Снова для подходящего $\lambda \in \Lambda$ имеют место равенства $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$, и требуемое свойство доказано. Одновременно закончено и доказательство теоремы 5.

§ 5. Аппроксимируемость конечными p-группами обобщенного свободного произведения нильпотентных групп

В параграфе 3 рассматривались условия $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с конечными объединяемыми подгруппами. Здесь мы дадим достаточное условие $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп, не предполагающее конечности объединяемых подгрупп. В действительности, эти условия гарантируют выполнимость более сильного свойства — аппроксимируемость конечными p-группами. А именно, целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения:

Теорема 6. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, A и B — подгруппы групп H и K соответственно и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Пусть для некоторого простого числа p подгруппы A и B являются p'-изолироваными в группах H и K соответственно. Предположим также, что выполнено одно из следующих условий:
а) A и B — бесконечные циклические группы;
б) группы H и K не имеют p'-кручения, а A и B являются центральными подгруппами групп H и K соответственно.

Тогда группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Следует отметить, что в случае а) p'-кручение в группах H и K также отсутствует, как и в любой группе, обладающей p'-изолированной подгруппой без кручения.

Для доказательства теоремы 6 нам необходимо два вспомогательных утверждения. Докажем, прежде всего,

Предложение 1.5.1. *Пусть p — простое число и пусть H — конечно порожденная нильпотентная группа, не имеющая p'-кручения. Пусть a — элемент бесконечного порядка группы H. Для любого целого числа $k \geqslant 0$ найдется нормальная подгруппа R конечного p-индекса группы H такая, что порядок элемента a по модулю R равен p^k.*

Доказательство. При $k = 0$ в качестве подгруппы R можно взять всю группу H.

Пусть далее $k \geqslant 1$. Поскольку группа H не имеет p'-кручения, то она является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, и так как для целого числа $k \geqslant 1$ $\ a^{p^{k-1}} \neq 1$, найдется нормальная подгруппа R_0 конечного p-индекса в H такая, что $a^{p^{k-1}} \notin R_0$. Если $a^{p^k} \in R_0$, то порядок элемента a по модулю R_0 равен p^k, и подгруппа $R = R_0$ является искомой.

Пусть $a^{p^k} \notin R_0$. Поскольку фактор-группа $\overline{H} = H/R_0$ является конечной p-группой, то в ней существует главный ряд

$$1 = \overline{R}_0 \leqslant \overline{R}_1 \leqslant \cdots \leqslant \overline{R}_s = \overline{H}.$$

Записывая каждый член этого ряда в виде $\overline{R}_i = R_i/R_0$ для подходящей подгруппы R_i группы H $(i = 0, 1, \ldots s)$, получаем возрастающую последовательность

$$R_0 \leqslant R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_s = H$$

нормальных подгрупп группы H, где для любого $i = 0, 1, \ldots s-1$ порядок фактор-группы R_{i+1}/R_i равен p. Выберем наименьший номер i_0 такой, что $a^{p^k} \in R_{i_0}$. Заметим, что поскольку $a^{p^k} \notin R_0$, $i_0 > 0$. Утверждается, что $a^{p^{k-1}} \notin R_{i_0}$. Действительно, в противном случае из того, что порядок фактор-группы R_{i_0}/R_{i_0-1} равен p, следовало бы, что элемент $(a^{p^{k-1}})^p = a^{p^k}$ принадлежит подгруппе R_{i_0-1}. Но это противоречит выбору числа i_0. Таким образом, порядок элемента a по модулю R_{i_0} равен p^k, и подгруппа $R = R_{i_0}$ является искомой. Предложение доказано.

Ниже это предложение будет использоваться в следующей равносильной формулировке:

Следствие. *Пусть p — простое число и пусть H — конечно порожденная нильпотентная группа без p'-кручения. Пусть A — бесконечная циклическая подгруппа группы H. Для любой подгруппы $C \leqslant A$ конечного p-индекса в A найдется нормальная подгруппа $R \leqslant H$ конечного p-индекса в H такая, что $R \cap A = C$.*

Аналогичное утверждение имеет место и для p'-изолированных центральных подгрупп конечно порожденной нильпотентной группы.

Предложение 1.5.2. *Пусть H — конечно порожденная нильпотентная группа, A — центральная p'-изолированная подгруппа группы H. Для любой подгруппы $C \leqslant A$ конечного p-индекса в A существует нормальная подгруппа $R \leqslant H$ конечного p-индекса в H такая, что $R \cap A = C$.*

Доказательство. Так как индекс подгруппы C в группе A является p-числом и A — абелева группа, то подгруппа C p'-изолирована в A, а значит и в H. Поэтому фактор-группа H/C не имеет p'-кручения и, следовательно, аппроксимируема конечными p-группами. Поскольку A/C — конечная подгруппа группы H/C, по предложению 1.1.6 найдется нормальная подгруппа R/C группы H/C конечного p-индекса такая, что $R/C \cap A/C = 1$. Очевидно, что тогда R является нормальной подгруппой конечного p-индекса в H и $R \cap A = C$.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 6.

Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы без p'-кручения, A и B — p'-изолированные подгруппы групп H и K соответственно, причем A и B или являются бесконечными циклическими, или принадлежат центру соответствующей группы H и K. В соответствии с предложением 1.1.16 для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

достаточно показать, что если $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп групп H и K, то семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

является A-фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является B-фильтрацией.

Для этого заметим, прежде всего, что произвольные нормальные (A,B,φ)-совместимые подгруппы R и S конечного p-индекса групп H и K являются (A,B,φ,p)-совместимыми. Действительно, так как в рассматриваемых случаях группа $G_{R,S}$ в силу предложения 1.1.14 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, это следует из замечания перед формулировкой предложения 1.1.16.

Покажем теперь, что каждая нормальная подгруппа конечного p-индекса группы H принадлежит семейству $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и каждая нормальная подгруппа конечного p-индекса группы K принадлежит семейству $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Пусть R — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы H. Тогда $R\cap A$ является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы A, и потому $C=(R\cap A)\varphi$ является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы B. Из предложения 1.5.2 и следствия к предложению 1.5.1 вытекает существование нормальной подгруппы S конечного p-индекса группы K такой, что $S\cap B=C$. Очевидно, что подгруппы R и S являются (A,B,φ)-совместимыми, и потому из замечания, сделанного выше, следует, что для подходящего $\lambda\in\Lambda$ выполнены равенства $R=R_\lambda$ и $S=S_\lambda$. Таким образом, подгруппа R действительно входит в семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Соответствующее утверждение для группы K доказывается аналогично.

Так как группы H и K, являясь группами без p'-кручения, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, утверждение о том, что семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрацией, теперь очевидно. А так как в конечно порожденной нильпотентной группе все p'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы (см. [6]) и потому подгруппы A и B являются $\mathcal{F}_p$-отделимыми, очевидно и то, что эти семейства являются A- и B-фильтрациями. Теорема 6 доказана.

Отметим очевидное

Следствие. *Пусть H и K — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, A и B — собственные циклические* *или центральные подгруппы групп H и K и φ — некоторый изоморфизм группы A на группу B. Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными подгруппами A и B. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) *группа G является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой;*

(2) *существует такое простое число p, что подгруппы A и B являются p'-изолироваными в группах H и K соответственно;*

(3) *существует такое простое число p, что группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

В заключение приведем критерий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением, вытекающий из теоремы 6 и следствия к теореме 4:

Теорема 7. *Свободное произведение $G = \big(H*K;\ A = B,\ \varphi\big)$ конечно порожденных нильпотентных групп H и K с объединенными циклическими подгруппами A и B (где $A \neq H$ и $B \neq K$) является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно.*

ГЛАВА II

Аппроксимируемость относительно сопряженности обобщенного свободного произведения групп

§ 1. Предварительные замечания. Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами конечно порожденных нильпотентных групп

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X, образы элементов a и b относительно которого не сопряжены в X.

Очевидно, что произвольная группа, $\mathcal{K}$-аппроксимируемая относительно сопряженности, является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой. Поскольку обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, представляет интерес нахождение классов групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость которых влечет их $\mathcal{K}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. Так, К. Грюнберг [19] показал, что конечно порожденные нильпотентные группы $\mathcal{F}$-аппроксимируемы, а затем Н. Блэкберн [15] установил их $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности. С другой стороны, известная теорема Ф. Холла утверждает финитную аппроксимируемость любой конечно порожденной метабелевой группы, но существует построенный М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко [4] пример конечно порожденной метабелевой группы, не являющейся $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Усиливая результат Г.Баумслага об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп (предложение 1.1.10), Дж. Дайер [17] доказала, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. В связи с этим представляет интерес существование примера обобщенного свободного произведения, являющегося $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, но не являющегося группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Говоря более точно, сейчас будут построены такие группы H и K с подгруппами $A \leqslant H$ и $B \leqslant K$ и изоморфизмом $\varphi : A \to B$, что имеют место следующие утверждения:

1. Группы H и K $\mathcal{F}$-аппроксимируемы относительно сопряженности.

2. Свободное произведение $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

3. Группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

При построении примера будет использоваться конструкция свободного произведения с одной объединяемой подгруппой произвольного семейства групп; определение этой конструкции и ее свойства аналогичны определению и свойствам обобщенного свободного произведения двух множителей. Теорема Х. Нейман (предложение 1.1.2) также справедлива в общем случае.

Пусть для каждого целого $l \geqslant 1$

$$F_l = \langle h_l, x_l;\ x_l^{-1} h_l x_l = h_l^{-1}, h_l^4 = 1, x_l^2 = 1\rangle$$

— группа диэдра порядка 8, A_l — циклическая группа порядка 4 с порождающим a_l и $H_l = F_l \times A_l$ — прямое произведение групп F_l и A_l . Обозначим еще через U_l циклическую подгруппу группы H_l, порожденную элементом $u_l = h_l a_l$. Определим теперь группу H как свободное произведение $H = \big(\Pi^* H_l;\ u_1 = u_2 = \cdots\big)$ групп H_l с объединенными относительно очевидных изоморфизмов подгруппами U_l, а через A обозначим ее подгруппу, порожденную подгруппами A_1, A_2, ... Так как для каждого l $\ U_l \cap A_l = 1$, то в силу теоремы Х. Нейман группа A является (обычным) свободным произведением подгрупп A_1, A_2, ...

Построим теперь группу K и ее подгруппу B. Для каждого целого числа $l \geqslant 1$ обозначим через K_l циклическую группу порядка 2^{l+1} с порождающим k_l, а через B_l — ее подгруппу, порожденную элементом $b_l = k_l^{2^{l-1}}$. Пусть $K = \Pi^* K_l$ — свободное произведение всех групп K_l, а B — ее подгруппа, порождаемая всеми элементами b_l. Так как $B = \Pi^* B_l$, отображение, переводящее a_l в b_l, определяет изоморфизм φ подгруппы $A \leqslant H$ на подгруппу $B \leqslant K$.

Покажем, что для построенных групп H и K, их подгрупп A и B и изоморфизма $\varphi : A \to B$ выполнены сформулированные выше утверждения.

Утверждение 1 справедливо, так как финитная аппроксимируемость относительно сопряженности группы H следует непосредственно из теоремы 1.1 работы [2], а группы K — из теоремы Ремесленникова [11], утверждающей, что свободное произведение групп наследует это свойство от сомножителей.

Для доказательства утверждения 2 введем в рассмотрение для каждого $l \geqslant 1$ группу $G_l = \big(H_l * K_l;\ a_l = b_l\big)$ — свободное произведение групп H_l и K_l с объединенными подгруппами A_l и B_l. Легко видеть, что группа $G = \big(H * K;\ A = B, \varphi\big)$ раскладывается также в свободное произведение $G = \big(\Pi^* G_l;\ u_1 = u_2 = \cdots\big)$ групп G_l с объединенными подгруппами U_l. Обозначим через N_l нормальное замыкание в группе G_l подгруппы K_l. Тогда фактор-группа G_l/N_l изоморфна группе F_l и $U_l \cap N_l = 1$. Так как, к тому же, каждая группа G_l, являясь свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, финитно аппроксимируема (предложение 1.1.10), то выполнены все условия теоремы 1.2 из [2], из которой и следует финитная аппроксимируемость группы G.

Покажем теперь, что группа G не является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Так как для любого $l \geqslant 1$ в группе G имеет место равенство

$$x_l^{-1} u_1 x_l u_1 = x_l^{-1} u_l x_l u_l = a_l^2 = k_l^{2^l},$$

элемент $x_l^{-1}u_1x_lu_1$ входит в подгруппу K_l, причем его порядок равен двум. Поэтому произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит элемент $x_l^{-1}u_1x_lu_1$ при достаточно большом l, а это означает, что образы элементов u_1 и u_1^{-1} группы G сопряжены в каждом ее конечном гомоморфном образе. Остается понять, что в группе G эти элементы не являются сопряженными.

Пусть C — фактор-группа группы K по нормальному замыканию всех элементов $k_lk_{l+1}^{-2}$; очевидно, что C является локально циклической и потому абелевой группой. Непосредственно проверяется, что отображение порождающих h_l, x_l, a_l и k_l группы G в группу C, тождественное на k_l и переводящее элементы h_l и x_l в единицу, а a_l — в $k_l^{2^{l-1}}$, определяет гомоморфизм группы G в группу C, инъективный на подгруппе A_1. Очевидно поэтому, что образы элементов u_1 и u_1^{-1} относительно этого гомоморфизма не сопряжены в группе C.

В этой главе рассматривается $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности обобщенных свободных произведений групп. Основной целью является получение определенного p-аналога результата Дайер, упомянутого выше. А именно будет доказано, что если обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то оно является и группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

В общем же случае, как показывает пример конечно порожденных нильпотентных групп, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности является существенно более сильным ограничением на группу, чем $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Действительно, напомним еще раз, что конечно порожденная нильпотентная группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является p-группой. С другой стороны, имеет место

Теорема 8. *Конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является p-группой, а* *фактор-группа $G/\tau(G)$ абелева.*

Доказательство этой теоремы предварим несколькими замечаниями общего характера.

Пусть снова $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Подмножество M группы G назовем *сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым* (или, короче, *$C_{\mathcal{K}}$-отделимым*), если для любого элемента a этой группы, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется гомоморфизм φ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу X такой, что в группе X элемент $a\varphi$ не сопряжен ни с одним элементом из $M\varphi$. Иначе говоря, подмножество M группы G является $C_{\mathcal{K}}$-отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется нормальная подгруппа N группы G такая, что фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-группой и в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из множества MN. Элемент $g \in G$ будем называть $C_{\mathcal{K}}$-отделимым, если $C_{\mathcal{K}}$-отделимо подмножество, единственным элементом которого является g.

Очевидно, что группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы $C_{\mathcal{K}}$-отделим.

Понятие $C_{\mathcal{K}}$-отделимости позволяет получить следующий аналог предложения 1.1.7:

Предложение 2.1.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс групп. Для любой группы G и произвольной ее нормальной подгруппы N фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы G по подгруппе N сопряженно $\mathcal{K}$-отделим.*

Доказательство. Покажем сначала, что если некоторый смежный класс группы G по подгруппе N не является $C_{\mathcal{K}}$-отделимым, то фактор-группа G/N не является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Действительно, если элемент a группы G не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN, то элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе. С другой стороны, если в каждом гомоморфном образе группы G, являющемся $\mathcal{K}$-группой, образ элемента a сопряжен с образом некоторого элемента из класса bN и если φ — гомоморфизм группы G/N на некоторую $\mathcal{K}$-группу X, то произведение естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G/N$ и гомоморфизма φ отображает группу G на группу X, и потому для некоторых элементов $g \in G$ и $c \in N$ имеет место равенство

$$(g(\varepsilon\varphi))^{-1}a(\varepsilon\varphi)g(\varepsilon\varphi) = (bc)(\varepsilon\varphi),$$

т. е. $((gN)\varphi)^{-1}(aN)\varphi(gN)\varphi = (bN)\varphi$. Следовательно, образы элементов aN и bN при любом гомоморфизме группы G/N на произвольную $\mathcal{K}$-группу оказываются сопряженными.

Обратно, пусть каждый смежный класс группы G по подгруппе N является $C_{\mathcal{K}}$-отделимым. Если элементы aN и bN фактор-группы G/N не сопряжены в этой группе, то в группе G элемент a не сопряжен ни с одним элементом из смежного класса bN, и потому элемент a не сопряжен в группе G ни с одним элементом из смежного класса bNL для некоторой нормальной подгруппы L группы G, фактор-группа G/L по которой является $\mathcal{K}$-группой. Это означает, что элементы aNL и bNL гомоморфного образа G/NL группы G/N не являются сопряженными. Остается заметить, что ввиду гомоморфной замкнутости класса $\mathcal{K}$ фактор-группа $G/NL \simeq (G/L)/(NL/L)$ является $\mathcal{K}$-группой.

Непосредственно из предложения 2.1.1 следует аналог предложения 1.1.9.

Предложение 2.1.2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, наследственен и мультипликативно замкнут. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема относительно сопряженности, то и фактор-группа G/N группы G по любой ее конечной нормальной подгруппе N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Доказательство. Действительно, из наследственности класса $\mathcal{K}$ и его замкнутости относительно прямых произведений конечного числа сомножителей следует, что в произвольной группе G семейство всех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым являются $\mathcal{K}$-группами, замкнуто относительно конечных пересечений.

Отсюда следует, очевидно, что если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема относительно сопряженности, то каждое ее конечное подмножество является $C_{\mathcal{K}}$-отделимым, и потому $C_{\mathcal{K}}$-отделимы все смежные классы группы G по произвольной ее конечной нормальной подгруппе N. Предложение доказано.

Докажем теперь теорему 8.

Пусть p — простое число и пусть конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности. Так как тогда группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, то ее периодическая часть $\tau(G)$ должна быть p-группой. Поскольку фактор-группа $G/\tau(G)$ не содержит элементов конечного порядка и ввиду предложения 2.1.2 является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, для доказательства необходимости условий теоремы остается доказать

Предложение 2.1.3. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Если для некоторого простого числа p группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, то она абелева.*

Доказательство. Пусть $1 = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \cdots \leqslant Z_r = G$ — верхний центральный ряд группы G. Если предположить, рассуждая от противного, что группа G не является абелевой, то $r \geqslant 2$. Выберем в подгруппе Z_2 элемент a, не принадлежащий подгруппе Z_1. Поскольку для любого элемента $g \in G$ коммутатор $[a, g]$ входит в Z_1, имеем $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$. Так как элемент a не принадлежит центру Z_1 группы G, найдется элемент $b \in G$, неперестановочный с элементом a, так что $b^{-1}ab = ac$ для некоторого неединичного элемента $c \in Z_1$.

Фиксируем теперь некоторое простое число q, отличное от p. Так как Z_1 является свободной абелевой группой и ее элемент c отличен от 1, то для некоторого целого числа $n \geqslant 1$ уравнение $x^{q^n} = c$ не имеет решений в группе Z_1. Утверждается, что тогда элементы a^{q^n} и $a^{q^n}c$ не сопряжены в группе G.

В самом деле, пусть для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $g^{-1}a^{q^n}g = a^{q^n}c$. Так как $g^{-1}ag = az$ для некоторого $z \in Z_1$, получаем тогда

$$a^{q^n}c = (g^{-1}ag)^{q^n} = a^{q^n}z^{q^n},$$

откуда $c = z^{q^n}$, что невозможно.

Покажем, с другой стороны, что образы элементов a^{q^n} и $a^{q^n}c$ при любом гомоморфизме группы G на произвольную конечную p-группу являются сопряженными.

Действительно, пусть N — такая нормальная подгруппа группы G, что $c^{p^m} \equiv 1 \pmod N$ для некоторого целого числа $m \geqslant 0$. Так как числа q^n и p^m взаимно просты, существует целое число k такое, что $q^nk \equiv 1 \pmod{p^m}$. Поскольку элемент c является центральным, то из равенства $b^{-1}ab = ac$ следует равенство $b^{-k}ab^k = ac^k$ и

$$a^{q^n}c \equiv a^{q^n}c^{q^nk} = (ac^k)^{q^n} = b^{-k}a^{q^n}b^k \pmod N.$$

Таким образом, группа G оказалась не $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, и предложение 2.1.3 доказано.

Переходя к доказательству достаточности условий теоремы 8, заметим, что поскольку из того, что периодическая часть $\tau(G)$ конечно порожденной нильпотентной группы G является p-группой, вытекает $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G, требуемое нам утверждение содержится в следующем несколько более общем результате:

Предложение 2.1.4. *Пусть группа G является расширением конечной группы при помощи конечно порожденной абелевой группы.*

Если для некоторого простого числа p группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то она является и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Доказательство. Пусть F — конечная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа G/F по которой является конечно порожденной абелевой группой. Ввиду предложения 1.1.9, из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G следует, что фактор-группа G/F также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Поэтому если для не сопряженных в группе G элементов a и b смежные классы aF и bF различны, то различными (и, следовательно, несопряженными) будут и их образы при подходящем гомоморфизме группы G/F на некоторую конечную p-группу.

Предположим, что $aF = bF$, т. е. $b = af$ для некоторого элемента $f \in F$. Из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G в силу предложения 1.1.6 следует существование в ней такой нормальной подгруппы N конечного p-индекса, что $N \cap F = 1$. Утверждается, что в фактор-группе G/N элементы aN и bN не являются сопряженными.

Действительно, в противном случае для некоторого элемента $g \in G$ должно выполняться сравнение $g^{-1}ag \equiv b \pmod N$. Поскольку фактор-группа G/F абелева, $g^{-1}ag = ax$ для некоторого $x \in F$. Таким образом, мы получаем сравнение $x \equiv f \pmod N$, из которого ввиду того, что $N \cap F = 1$, следует равенство $x = f$. Но это равенство означает сопряженность в группе G элементов a и b, что невозможно. Предложение 2.1.4 доказано, а вместе с тем доказана и теорема 8.

Доказательство упомянутой выше теоремы Дж. Дайер об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенного свободного произведения двух конечных групп проводилось ею по следующей схеме. П. Стиб [28] показал, что если группа G является конечным расширением свободной группы, то произвольный элемент бесконечного порядка группы G является $C_{\mathcal{F}}$-отделимым. Распространив это утверждение и на элементы конечного порядка, Дайер доказала тем самым, что конечное расширение свободной группы является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Это влечет, в частности, требуемый результат, поскольку, как заметил Б. Нейман [25], обобщенное свободное произведение двух конечных групп является почти свободной группой. В следующих параграфах по той же схеме и с использованием идей и некоторых результатов работы Дайер будет доказано, что если обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то оно является и группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

§ 2. Сопряженная отделимость в классе конечных p-групп элементов бесконечного порядка

В этом параграфе будет доказан аналог теоремы Стиба.

Теорема 9. *Если группа G является расширением свободной группы при помощи конечной p-группы, то в группе G каждый элемент бесконечного порядка $C_{\mathcal{F}_p}$-отделим.*

Начнем с доказательства следующего вспомогательного утверждения:

Предложение 2.2.1. *Пусть H — субнормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Если элемент $h \in H$ является $C_{\mathcal{F}_p}$-отделимым в группе H, то он является $C_{\mathcal{F}_p}$-отделимым и в группе G.*

Доказательство. Очевидная индукция по длине ряда

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_s = G,$$

где для каждого $i = 0, 1, \ldots, s-1$ H_i является нормальной подгруппой в H_{i+1}, позволяет ограничиться рассмотрением случая, когда H является нормальной подгруппой группы G.

Предположим, что элемент $h \in H$ является $C_{\mathcal{F}_p}$-отделимым в группе H, и пусть g — произвольный элемент группы G, не сопряженный с элементом h. Покажем, что для подходящей нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G в фактор-группе G/N элементы hN и gN не являются сопряженными.

Если элемент g не принадлежит подгруппе H, то подгруппа $N = H$ является, очевидно, искомой. Пусть $g \in H$. Фиксируем систему $c_1, c_2, \ldots, c_n$ представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H и полагаем для $i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad g_i = c_i^{-1} g c_i$. Так как каждый из элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ группы H не сопряжен в этой группе с элементом h, по предположению для любого $i = 1, 2, \ldots, n$

найдется такая нормальная подгруппа M_i конечного p-индекса группы H, что в фактор-группе H/M_i образ элемента g_i не сопряжен с образом элемента h. Из теоремы Ремака следует, что пересечение M подгрупп M_1, M_2, … , M_n также является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы H. Поскольку для любого $x \in H$ из сравнения $x^{-1}g_ix \equiv h \pmod{M}$ следует сравнение $x^{-1}g_ix \equiv h \pmod{M_i}$, в фактор-группе H/M образ каждого из элементов g_1, g_2, … , g_n не сопряжен с образом элемента h.

Пусть теперь $N_i = c_i^{-1}Mc_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как ввиду нормальности H в группе G сопряжение произвольным элементом группы G индуцирует некоторый автоморфизм группы H, каждая из подгрупп N_1, N_2, … , N_n нормальна в H и имеет в этой группе конечный p-индекс. Поэтому их пересечение N является подгруппой конечного p-индекса группы H, а потому имеет конечный p-индекс и в группе G. Очевидно, кроме того, что подгруппа N инвариантна в группе G.

Утверждается, что в фактор-группе G/N образ элемента g не сопряжен с образом элемента h. Действительно, если для некоторого элемента $u \in G$ имеет место сравнение $u^{-1}gu \equiv h \pmod{N}$, то, записывая элемент u в виде $u = c_ix$ для подходящих $i = 1, 2, \ldots, n$ и элемента $x \in H$, имеем $x^{-1}g_ix \equiv h \pmod{N}$, откуда ввиду включения $N \subseteq M$ следует, что в фактор-группе H/M образ элемента g_i сопряжен с образом элемента h. Предложение доказано.

Для доказательства теоремы 9 обозначим через F свободную нормальную подгруппу конечного p-индекса группы G. Пусть также a — элемент бесконечного порядка группы G. Если H — подгруппа группы G, порожденная подгруппой F и элементом a, то H имеет конечный p-индекс в группе G и является субнормальной, поскольку фактор-группа G/F нильпотентна. Поэтому ввиду предложения 2.2.1 можно без потери общности считать, что $G = H$. Это означает, в частности, что произвольный элемент $g \in G$ записывается в виде $g = a^kf$ для некоторого целого числа k и подходящего элемента $f \in F$.

Пусть b — произвольный элемент группы G, не сопряженный с элементом a. Если элементы a и b принадлежат разным смежным классам по подгруппе F, то, поскольку фактор-группа G/F является циклической, элементы aF и bF не сопряжены в конечной p-группе G/F.

Будем считать теперь, что $aF = bF$. Поскольку фактор-группа G/F является конечной p-группой, то для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ должно выполняться включение $a^{p^n} \in F$. Докажем, что элементы a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены в группе G.

Пусть, напротив, для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $b^{p^n} = g^{-1}a^{p^n}g$. Записывая элемент g в виде $g = a^k f$, где $f \in F$, имеем $b^{p^n} = f^{-1}a^{p^n}f$. Полагаем $a_1 = f^{-1}af$. Тогда $a_1F = aF$, и потому $b = a_1x$ для подходящего $x \in F$. Из равенства $(a_1x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, очевидно, перестановочность элементов a_1x и $a_1^{p^n}$, откуда, в свою очередь, вытекает, что элементы x и $a_1^{p^n}$ свободной группы F перестановочны. Следовательно, эти элементы должны принадлежать некоторой циклической подгруппе группы F, т. е. для некоторого элемента $y \in F$ и подходящих целых чисел r и s выполнены равенства $x = y^r$ и $a_1^{p^n} = y^s$. При этом, ввиду того, что порядок элемента a бесконечен, $s \neq 0$. В силу второго из этих равенств элементы a_1 и y^s являются перестановочными, откуда получаем $(a_1^{-1}ya_1)^s = a_1^{-1}y^sa_1 = y^s$. Так как $a_1^{-1}ya_1 \in F$ и в свободной группе извлечение корней однозначно, отсюда следует перестановочность элементов a_1 и y и, следовательно, — перестановочность элементов a_1 и x. Поэтому из равенства $(a_1x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, что $x^{p^n} = 1$, т. е. $x = 1$. Отсюда $b = a_1$, что невозможно, так как элементы a и b не являются сопряженными.

Итак, элемент b^{p^n} не сопряжен в группе G с элементом a^{p^n} из подгруппы F. Так как свободная группа для любого простого числа p является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности (см. [5], предложение 4.8), из предложения 2.2.1 следует существование такой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G, что в фактор-группе G/N образы элементов a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены. Очевидно, что тогда и образы элементов a и b в этой фактор-группе не являются сопряженными, и теорема 9 доказана.

Ниже будет показано, что ограничение на порядки элементов в формулировке теоремы 9 не является существенным. Тем не менее, уже с помощью этой теоремы можно получать содержательные результаты об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенных свободных произведений. Применение теоремы 9 к обобщенным свободным произведениям основано на следующем простом замечании (см., напр., [10, лемма 2.1]).

Предложение 2.2.2. *Обобщенное свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

конечных p-групп H и K является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда G есть расширение некоторой свободной группы при помощи конечной p-группы.

Теорема 10. *Свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\, \varphi\big)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп H и K с объединенными конечными центральными подгруппами A и B является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

Доказательство этой теоремы начнем с рассмотрения ее частного случая, когда подгруппы H и K являются конечными и потому (ввиду предположения об их $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) — конечными p-группами. В этом случае группа G по предложению 1.1.14 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, и потому в силу предложения 2.2.2 является расширением некоторой свободной группы при помощи конечной p-группы. Так как тогда ввиду теоремы 9 каждый элемент бесконечного порядка группы G $C_{\mathcal{F}_p}$-отделим, для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы G остается показать, что для любых ее несопряженных элементов f и g конечного порядка можно указать такой гомоморфизм группы G на конечную p-группу, при котором образы этих элементов не являются сопряженными. Поскольку все элементы конечного порядка обобщенного свободного произведения двух групп сопряжены с подходящими элементами свободных множителей, мы можем без потери общности считать, что каждый из элементов f и g лежит в одной из подгрупп H или K. Покажем, что искомым гомоморфным образом группы G может служить обобщенное прямое произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными относительно изоморфизма φ.

Напомним (см., напр., [25]), что если H и K — (произвольные) группы с центральными подгруппами A и B и изоморфизмом $\varphi : A \to B$, то *обобщенным прямым произведением групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B* называется фактор-группа P прямого произведения $H \times K$ групп H и K по подгруппе N, состоящей из всевозможных элементов вида $a(a\varphi)^{-1}$, где $a \in A$.

Без труда проверяется, что произведение α стандартного вложения группы H в группу $H \times K$ и естественного гомоморфизма группы $H \times K$ на группу P является вложением группы H в группу P; аналогично определяется вложение β группы K в группу P. Кроме того, $H\alpha \cap K\beta = A\alpha = B\beta$, произвольный элемент из подгруппы $H\alpha$, не принадлежащий подгруппе $A\alpha$, не сопряжен в группе P ни с одним элементом из подгруппы $K\beta$, и два элемента из подгруппы $H\alpha$ (или из подгруппы $K\beta$) сопряжены в группе P тогда и только тогда, когда они сопряжены в подгруппе $H\alpha$ (соответственно, в подгруппе $K\beta$).

Возвращаясь к нашей группе $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$, заметим, что поскольку для любого элемента $a \in A$

$$(a\varphi)\beta = (a\varphi)N = aN = a\alpha,$$

ввиду предложения 1.1.1 существует гомоморфизм ρ группы G в группу P, продолжающий отображения α и β. Если теперь элементы f и g лежат в одном и том же свободном множителе, скажем, — в подгруппе H, то поскольку они не сопряжены в H, а отображение α инъективно, элементы $f\rho$ и $g\rho$ подгруппы $H\alpha$ не сопряжены в этой подгруппе, а значит — и в группе P. Если же элементы f и g не принадлежат одному из свободных множителей, скажем, $f \in H \setminus A$ и $g \in K \setminus B$, то элемент $f\rho$ лежит в подгруппе $H\alpha$ и не входит в подгруппу $A\alpha$, элемент $g\rho$ лежит в подгруппе $K\beta$ и не входит в подгруппу $B\beta$, и в группе P эти элементы снова не сопряжены.

Таким образом, в случае, когда подгруппы H и K являются конечными, утверждение теоремы 10 доказано. Это, в частности, говорит о том, что для доказательства теоремы в полном объеме достаточно для произвольных элементов f и g группы G, не сопряженных в этой группе, указать пару (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп H и K, имеющих в этих группах конечные p-индексы, таких, что элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Итак, пусть H и K — произвольные группы, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые относительно сопряженности,

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение групп H и K с объединенными конечными центральными подгруппами A и B и f и g — элементы группы G, не сопряженные в этой группе. В соответствии с теоремой Солитэра (предложение 1.1.4), предполагая без потери общности элементы f и g циклически несократимыми, рассмотрим отдельно ряд случаев.

Случай 1. Длины элементов f и g различны.

Напомним (см. предложение 1.1.17), что группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, и потому в силу предложения 1.1.8 ее подгруппа A (совпадающая с B) $\mathcal{F}_p$-отделима. Следовательно, существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что все слоги несократимых записей элементов f и g (или одного из них, если длина другого равна 1) не принадлежат подгруппе AN. Тогда подгруппы $R = H \cap N$ и $S = K \cap N$ являются (A, B, φ)-совместимыми нормальными подгруппами конечных p-индексов групп H и K и образы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ элементов f и g являются циклически несократимыми элементами группы $G_{R,S}$, длины которых совпадают с длинами элементов f и g соответственно и потому различны. Следовательно, в силу теоремы Солитэра элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 2. $l(f) = l(g) = 1$ и элементы f и g принадлежат одному из свободных множителей, причем хотя бы один из них не входит в объединяемую подгруппу.

Будем для определенности считать, что f и g входят в подгруппу H и $f \notin A$. Так как элементы f и g не сопряжены в группе H и эта группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности, существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы H такая, что в фактор-группе H/M элементы fM и gM не сопряжены. Из предложения 1.1.8 следует существование нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы H такой, что элемент f не принадлежит подгруппе AN. Так же, как и в доказательстве предложения 1.1.17, теперь можно найти (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S конечных p-индексов групп H и K такие, что $R \leqslant M \cap N$. Тогда элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ принадлежат свободному множителю H/R группы $G_{R,S}$ (и не принадлежат ее подгруппе K/R) и не сопряжены в этом множителе. Поэтому в силу предложения 1.1.5 они не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 3. $l(f) = l(g) = 1$ и элементы f и g не лежат в одном и том же свободном множителе.

Снова для определенности будем считать, что $f \in H \setminus A$ и $g \in K \setminus B$. Из $\mathcal{F}_p$-отделимости подгрупп A и B в группах H и K следует существование нормальной подгруппы M конечного p-индекса группы H и нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы K таких, что $f \notin AM$ и $g \notin BN$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 1.1.17, найдем (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы R и S конечных p-индексов групп H и K такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Тогда элементы $f\rho_{_{R,S}}$ и $g\rho_{_{R,S}}$ не принадлежат одному и тому же свободному множителю группы $G_{R,S}$ и потому в силу предложения 1.1.5 они не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Случай 4. $l(f) = l(g) = 1$ и элементы f и g лежат в объединяемой подгруппе.

Поскольку элементы f и g различны, а группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G такая, что $fN \neq gN$. Полагая $R = H \cap N$ и $S = K \cap N$, видим, что образы $f\rho_{_{R,S}}$ и $g\rho_{_{R,S}}$ элементов f и g являются различными центральными элементами группы $G_{R,S}$, а потому не сопряжены в этой группе.

Случай 5. $l(f) = l(g) > 1$.

Пусть g_1, g_2, $\ldots$, g_r (где $r = l(g)$) — все циклические перестановки элемента g. Выберем, как в случае 1, нормальную подгруппу M конечного p-индекса группы G такую, что все слоги несократимых записей элементов f и g не принадлежат подгруппе AM. Так как элемент f отличен от каждого из элементов g_1, g_2, $\ldots$, g_r, в силу $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, по модулю которой элемент f отличен от каждого из элементов g_1, g_2, $\ldots$, g_r. Полагая теперь $R = H \cap M \cap N$ и $S = K \cap M \cap N$, видим, что в группе $G_{R,S}$ образы $f\rho_{_{R,S}}$ и $g\rho_{_{R,S}}$ элементов f и g являются циклически несократимыми элементами длины r и элемент $f\rho_{_{R,S}}$ отличен от каждого из элементов $g_1\rho_{_{R,S}}$, $g_2\rho_{_{R,S}}$, $\ldots$, $g_r\rho_{_{R,S}}$. Так как произвольная циклическая перестановка элемента $g\rho_{_{R,S}}$ совпадает с одним из элементов $g_1\rho_{_{R,S}}$,

$g_2\rho_{R,S}$, ..., $g_r\rho_{R,S}$, то элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ в силу предложения 1.1.5 не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Теорема 10 доказана. Для обычного свободного произведения групп получаем

Следствие. *Свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

В самом деле, справедливость этого утверждения для свободного произведения двух групп вытекает непосредственно из теоремы 10, и очевидная индукция позволяет распространить его на свободное произведение любого конечного семейства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп. Если же группа G является свободным произведением бесконечного семейства групп, то для любых элементов f и g этой группы можно найти содержащую эти элементы подгруппу H, порождаемую некоторым конечным набором свободных множителей. Ретрактирующий гомоморфизм группы G на группу H сводит проблему к доказанному утверждению.

§ 3. Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами обобщенного свободного произведения

В этом параграфе будет получен следующий полный аналог теоремы Дайер:

Теорема 11. *Любое расширение свободной группы при помощи конечной p-группы является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Доказательство этой теоремы является определенной модификацией доказательства Дайер [18] упоминавшейся выше теоремы об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности почти свободной группы. Это доказательство использует конструкцию фундаментальной группы графа групп, и мы напомним соответствующие понятия.

Граф Γ есть система, состоящая из двух множеств, множества вершин $V = V(\Gamma)$ и множества ребер $E = E(\Gamma)$, и трех отображений: отображения $E \to E$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторое ребро $\overline{e}$, называемое обратным к e, отображения $o : E \to V$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторую вершину $o(e) \in V$, называемую началом ребра e, и отображения $t : E \to V$, сопоставляющего ребру $e \in E$ некоторую вершину $t(e) \in V$, называемую концом ребра e. При этом должны выполняться следующие равенства: $o(\overline{e}) = t(e)$, $t(\overline{e}) = o(e)$, $\overline{e} \neq e$ и $\overline{\overline{e}} = e$. Если для ребра $e \in E(\Gamma)$ $o(e) = u$ и $t(e) = v$, то будем писать также $e = (u, v)$.

Графом групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$ называется связный граф Γ вместе с функцией $\mathcal{G}$, сопоставляющей каждой вершине $v \in V(\Gamma)$ некоторую группу G_v и каждому ребру $e \in E(\Gamma)$, $e = (u, v)$, некоторую группу G_e с двумя вложениями $\rho_e : G_e \to G_u$ и $\tau_e : G_e \to G_v$, причем $G_{\overline{e}} = G_e$, $\rho_{\overline{e}} = \tau_e$ и $\tau_{\overline{e}} = \rho_e$. Группы G_v и G_e называют соответственно вершинными и реберными группами графа групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$.

Пусть $(\mathcal{G}, \Gamma)$ — граф групп. Фиксируем максимальное дерево

T в графе Γ. Фиксируем также для каждой вершины $v \in V = V(\Gamma)$ множество порождающих X_v и множество определяющих слов R_v вершинной группы G_v (предполагая при этом, что при $v_1 \neq v_2$ $X_{v_1} \cap X_{v_2} = \emptyset$). Тогда группа, порождаемая элементами множества $\bigcup_{v \in V} X_v$ и символами t_e, где $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$, и определяемая в этой системе порождающих множеством слов $\bigcup_{v \in V} R_v$ и всевозможных соотношений вида

$$\begin{aligned} g &= g(\rho_e^{-1}\tau_e), && \text{где } e \in E(T) \text{ и } g \in G_e\rho_e, \\ t_e^{-1} g t_e &= g(\rho_e^{-1}\tau_e), && \text{где } e \in E(\Gamma) \setminus E(T) \text{ и } g \in G_e\rho_e, \\ t_{\overline{e}} &= t_e^{-1}, && \text{где } e \in E(\Gamma) \setminus E(T), \end{aligned}$$

называется фундаментальной группой графа групп $(\mathcal{G}, \Gamma)$ и обозначается через $\pi(\mathcal{G}, \Gamma)$. Можно доказать, что эта группа не зависит от выбора заданий вершинных групп порождающими и определяющими соотношениями и от выбора максимального дерева T.

Известно (см., напр., [16, 21, 27]), что произвольная группа, являющаяся конечным расширением свободной группы, изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп, все вершинные группы которого конечны.

Приступим теперь к доказательству теоремы 11.

Пусть группа G является расширением свободной группы F при помощи конечной p-группы. Ввиду теоремы 9 для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности группы G достаточно показать, что для любых двух элементов a и b группы G, имеющих конечный порядок и не сопряженных в G, существует гомоморфизм группы G на конечную p-группу, образы относительно которого элементов a и b не сопряжены.

Поскольку подгруппа, порождаемая в группе G подгруппой F и элементом a, субнормальна, в силу предложения 2.2.1 мы можем считать, что группа G порождается подгруппой F и элементом a. В частности, фактор-группа G/F является циклической, и потому в случае, когда элементы a и b лежат в разных смежных классах по подгруппе F, естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/F является искомым.

Пусть $aF = bF$. Так как группа F без кручения, элементы a и b имеют одинаковый порядок, и этот порядок равен числу p^n для некоторого $n \geqslant 1$. Как отмечено выше, группа G изоморфна фундаментальной группе некоторого графа групп, все вершинные группы которого изоморфны подгруппам циклической группы порядка p^n. Используя ряд преобразований графов групп, Дайер [18] доказала, что в этой ситуации существует гомоморфизм группы G на фундаментальную группу $H = \pi(\mathcal{H}, \Gamma)$ графа групп $(\mathcal{H}, \Gamma)$ такого, что

1) граф Γ содержит ровно две вершины u и v;

2) вершинные группы H_u и H_v являются циклическими порядка p^n и порождаются образами x и y элементов a и b соответственно;

3) все реберные группы H_e имеют порядок, меньший, чем p^n.

Таким образом, группа H порождается элементами x, y и множеством элементов вида t_e, где e — произвольное ребро графа Γ, отличное от некоторого фиксированного ребра, и в этой системе порождающих определяется следующими соотношениями:

а) $x^{p^n} = 1$, $y^{p^n} = 1$;

б) $x^r = y^s$, где x^r и y^s — элементы групп H_u и H_v, имеющие одинаковый порядок, меньший, чем p^n;

в) соотношения вида $t_e^{-1} h_1 t_e = h_2$, где $h_1 \in H_u$ и $h_2 \in H_v$ — элементы одинакового порядка, меньшего, чем p^n.

Из условия 3) следует, что все элементы из групп H_u и H_v, участвующие в соотношениях б) и в), принадлежат подгруппам K_u и K_v этих групп порядка p^k для некоторого $k < n$. Поэтому при факторизации группы H по нормальному замыканию N подгрупп K_u и K_v соотношения б) и в) тривиализируются, и фактор-группа H/N является свободным произведением двух циклических групп H_u/K_u и H_v/K_v порядка p^{n-k}, порождаемых образами элементов x и y, и семейства бесконечных циклических групп с порождающими t_e. Очевидный гомоморфизм группы H/N на прямое произведение групп

H_u/K_u и H_v/K_v завершает построение искомого гомоморфного образа группы G. Теорема 11 доказана.

Из теоремы 11 и предложения 2.2.2 непосредственно следует

Теорема 12. *Свободное произведение*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

двух конечных p-групп H и K с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B является группой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Этот результат говорит о том, что для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенного свободного произведения $G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$ произвольных групп H и K достаточно для произвольных элементов f и g группы G, не сопряженных в этой группе, указать пару (A, B, φ, p)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп H и K таких, что элементы $f\rho_{R,S}$ и $g\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$. Это соображение позволяет доказать, например, следующее обобщение теоремы 10:

Теорема 13. *Пусть группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы относительно сопряженности, A и B — центральные подгруппы групп H и K соответственно, причем подгруппы A и B и все их подгруппы конечного p-индекса $\mathcal{F}_p$-отделимы в группах H и K соответственно. Тогда группа*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.

Приведем лишь набросок доказательства этой теоремы. Заметим, прежде всего, что поскольку объединяемые подгруппы принадлежат центрам свободных множителей, из предложения 1.1.14 следует, что произвольные (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы

R и S групп H и K, имеющие в этих группах конечные p-индексы, автоматически оказываются (A, B, φ, p)-совместимыми.

Нетрудно далее видеть, что для любых нормальных подгрупп M и N конечных p-индексов групп H и K соответственно существуют (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$, имеющие конечные p-индексы в группах H и K и такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$.

Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве предложения 1.5.2, можно показать, что если U — подгруппа конечного p-индекса группы A, то для любой содержащей подгруппу U нормальной подгруппы M конечного p-индекса группы H существует нормальная подгруппа R конечного p-индекса группы H такая, что $R \leqslant M$ и $R \cap A = U$. Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и для группы K. Если теперь M и N — нормальные подгруппы конечных p-индексов групп H и K, то полагая $U = (M \cap A) \cap (N \cap B)\varphi^{-1}$ и $V = (M \cap A)\varphi \cap (N \cap B)$, выберем в группе H такую нормальную подгруппу R конечного p-индекса, что $R \leqslant M$ и $R \cap A = U$, а в группе K — такую нормальную подгруппу S конечного p-индекса, что $S \leqslant N$ и $S \cap B = V$. Так как $U\varphi = V$, подгруппы R и S являются искомыми.

Применяя эти замечания, план доказательства, указанный перед формулировкой теоремы, можно реализовать по схеме, использованной при доказательстве теоремы 10.

Описание $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп было дано в теореме 8. Из теоремы 13 следует

Теорема 14. *Пусть*

$$G = \bigl(H * K;\ A = B,\ \varphi\bigr)$$

— свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных нильпотентных групп H и K, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых относительно сопряженности, причем A и B — p'-изолированные

центральные подгруппы групп H и K соответственно. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности.

Действительно, поскольку группы A и B являются в этом случае конечно порожденными абелевыми, любая подгруппа конечного p-индекса группы A или группы B является p'-изолированной в этой группе, а потому — и в группе H или в группе K. Так как в конечно порожденных нильпотентных группах p'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы, все условия теоремы 13 выполнены.

Теорема 15. *Пусть*

$$G = \big(H * K;\ A = B,\ \varphi\big)$$

— свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп H и K, причем $A \neq H$ и $B \neq K$. Если группы H и K $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы (т. е. их периодические части являются p-группами), то следующие утверждения равносильны:

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(2) *группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности;*

(3) *группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из теоремы 14 (поскольку $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности для абелевых групп одно и то же), а импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (1) (теорема 5 здесь не работает, поскольку гарантирует лишь q'-изолированность для какого-то простого q).

В самом деле, если, скажем, подгруппа A не является p'-изолированной в группе H, то для некоторого элемента $h \in H \backslash A$ и некоторого простого числа $q \neq p$ имеет место включение $h^q \in A$. Пусть еще

k — произвольный элемент группы K, не принадлежащий подгруппе B. Тогда запись $[h,k]=h^{-1}k^{-1}hk$ коммутатора элементов h и k несократима, и потому этот коммутатор является неединичным элементом группы G. С другой стороны, легко видеть, что для любого гомоморфизма θ группы G на конечную p-группу выполнено включение $h\theta \in A\theta$, так что оба элемента $h\theta$ и $k\theta$ принадлежат абелевой группе $K\theta$. Таким образом, элемент $[h,k]$ переходит в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную p-группу, что противоречит предположению об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $G=(H*K;\ A=B,\ \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных свободных абелевых групп H и K, причем $A\neq H$ и $B\neq K$. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема;*

(2) *для некоторого простого числа p подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;*

(3) *для некоторого простого числа p группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности;*

(4) *для некоторого простого числа p группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Действительно, равносильность первого, второго и четвертого утверждений содержится в следствии к теореме 6, а третьего и четвертого — в теореме 15.

Литература

1. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. – 1998. – Т. 64, № 1. – С. 3 – 8.
2. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сибирск. матем. ж. – 1997. – Т. 38, № 2. – С. 3 – 13.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
4. *Каргаполов М. И., Тимошенко Е. И.* К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп // IV-ый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Новосибирск, 5 - 9 февраля 1973 г.). Тезисы докладов. – Новосибирск, 1973. – С. 86 – 88.
5. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980. – 448 с.
6. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сибирск. матем. ж. – 1999. – Т. 40, № 2. – С. 395 – 407.
7. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
8. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. – 1958. – Т. 18. – С. 49 – 60.
9. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. – 1949. – Т. 25. – С. 347 – 366.
10. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. – Иваново, 2000. – Вып. 3. – С. 129 – 140.
11. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сибирск. матем. ж. – 1971. – Т. 12, № 5. – С. 1085 – 1099.

12. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Пер. сб-к переводов иностр. статей. – 1968. – Т. 12, № 1. – С. 3 – 36.
13. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – V. 106, № 2. – P. 193 – 209.
14. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure. Appl. Math. – 1968. – V. 21, № 5. – P. 491 – 506.
15. *Blackburn N.* Conjugacy in nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 16, № 1. – P. 143 – 148.
16. *Cohen D. E.* Groups with free subgroups of finite index // Conf. Group Theory, Univ. Wiskonsin – Parkside 1972. – Lecture Notes Math., 1973. – 319. – P. 26 – 44.
17. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extensions // J. Aust. Math. Soc. – 1980. – V. 29, № 1. – P. 35 – 51.
18. *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. Lond. Math. Soc. (2). – 1979. – V. 20. – P. 215 – 221.
19. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). – 1957. – V. 7. – P. 29 – 62.
20. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. – 1964. – V. 1. – P. 301 – 305.
21. *Karrass A., Pietrowski A., Solitar D.* Finite and infinite cyclic extensions of free groups // J. Aust. Math. Soc. – 1973. – V. 16. – P. 458 – 466.
22. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. – 1993. – V. 162, № 1. – P. 1 – 11.
23. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. – 1935. – V. 111. – P. 259 – 280.
24. *McCarron J.* Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124, № 1. – P. 1 – 5.
25. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalga-

mations // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A. – 1954. – V. 246. – P. 503 – 554.

26. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f.g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. – 1991. – V. 76, № 2. – P. 167 – 178.

27. *Scott G. P.* An embedding theorem for groups with a free subgroup of finite index // Bull. Lond. Math. Soc. – 1974. – V. 6. – P. 304 – 306

28. *Stebe P. F.* A residual property of certain groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 26, № 1. – P. 37 – 42.

29. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston. J. Math. – 1996. – V. 22, № 2. – P. 233 – 248.

30. *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух нильпотентных групп с объединенной подгруппой // Ивановский государственный университет 25 лет: Юбилейный сборник тезисов статей молодых ученых – Иваново, 1998. – С. 118 – 119.

31. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды ИвГУ. Математика. – Иваново, 1999. – Вып. 2. – С. 5 – 7.

32. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Вестник молодых ученых ИвГУ. – Иваново, 2002. – Вып. 2. – С. 3 – 7.

33. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сборник. – Тула, 2002. – Т. 3, вып. 1(3). – С. 72 – 77.

34. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности свободных произведений групп с объединенной подгруппой // Молодая наука в классическом университете: Тез. докл. науч. конф. (Иваново, 15-19 апреля 2002 г.). – Иваново, 2002. – С. 79.

35. *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений с объединенной подгруппой // Материалы международной молодежной научной школы-конференции (Казань, 28 ноября - 1 декабря 2002 года). – Казань: Казанское математическое общество, 2002. – С. 35 – 36.

36. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. – Иваново, 2002. – Вып. 5. – С. 3 – 5.

37. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения двух нильпотентных групп с объединенной конечной подгруппой // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. V Междунар. конф. (Тула, 19-24 мая 2003 г.). – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2003. – С. 121 – 122.

38. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности в классе конечных p-групп обобщенных свободных произведений групп // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ – 2004: Матер. науч. конф. (Иваново, 3-5 февраля 2004 г.) – Иваново, 2004. – С 5 – 6.

39. *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами обобщенных свободных произведений групп // Молодая наука в классическом университете: Тез. докл. науч. конф. (Иваново, 20-23 апреля 2004 г.). –

Иваново, 2004. – С. 72 – 73.

40. *Ivanova E. A.* On the conjugacy separability in the class of finite p-groups of finitely generated nilpotent groups // math.GR/0408393. – 4 p. – http: //arxiv.org