Математические заметки
Том 76 (2004), выпуск 4. С. 502 – 509

Е. А. Иванова

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНЫМИ P-ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Доказано, что свободное произведение двух конечных p-групп с объединенными центральными подгруппами является группой, аппроксимируемой относительно сопряженности конечными p-группами. С использованием этого результата показано, что для свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп свойства аппроксимируемости конечными p-группами относительно отношения равенства и относительно отношения сопряженности являются равносильными.

УДК 512.543.

1. Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (аппроксимируемой конечными p-группами) относительно сопряженности, если для любых элементов a и b этой группы, не сопряженных в ней, найдется гомоморфизм группы G на конечную группу (соответственно, на конечную p-группу) X, образы относительно которого элементов a и b не сопряжены в X.

Напомним также, что подмножество M группы G называется финитно отделимым (отделимым в классе конечных p-групп), если для любого элемента $a \in G$, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу (соответственно, конечную p-группу) X такой, что $a\varphi \notin M\varphi$.

Элемент a группы G будем называть C_f-отделимым (C_{fp}-отделимым), если множество $a^G = \{x^{-1}ax \mid x \in G\}$ элементов, сопряженных с a в группе G, является финитно отделимым (соответственно, отделимым в классе конечных p-групп).

Таким образом, группа G является финитно аппроксимируемой (аппроксимируемой конечными p-группами) относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы C_f-отделим (соответственно, C_{fp}-отделим).

Очевидно, что если некоторая группа является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, то она финитно аппроксимируема (т. е. аппроксимируема конечными группами относительно равенства). Столь же очевидно аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p-группами. Несмотря на то, что соответствующие обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места, в ряде случаев оказывается, что условия, гарантирующие финитную аппроксимируемость групп некоторого класса, обеспечивают и финитную аппроксимируемость их относительно сопряженности. Так, в работе Ж. Дайер [1] доказано, что свободное произведение с объединенной подгруппой двух групп является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если свободные множители являются конечными группами (финитная аппроксимируемость таких групп была установлена Г. Баумслагом [2] еще в 1963 году).

Свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p-групп не обязательно является группой, аппроксимируемой конечными p-группами; условия, необходимые и достаточные для этого, указаны в работе Г. Хигмена [3]. Возникает естественный вопрос, будут ли эти условия обеспечивать и аппроксимируемость таких свободных произведений конечными p-группами относительно сопряженности? В этом направлении здесь будет доказана

Теорема 1. *Пусть A и B — конечные p-группы, H — подгруппа группы A, K — подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными относительно φ подгруппами H и K. Тогда*

(1) *если группа G аппроксимируема конечными p-группами, то все ее элементы бесконечного порядка являются C_{fp}-отделимыми;*
(2) *если H и K являются центральными подгруппами групп A и B соответственно, то группа G аппроксимируема конечными p-группами относительно сопряженности.*

Заметим, что аппроксимируемость группы G конечными p-группами при условии центральности подгрупп H и K вытекает непосредственно из упомянутого выше критерия Г. Хигмена.

С помощью теоремы 1 можно показать, что в случае, когда группы A и B являются абелевыми с конечным числом порождающих, аппроксимируемость группы G конечными p-группами относительно равенства и относительно сопряженности являются равносильными свойствами. Более точно, имеет место

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп A и B, аппроксимируемых конечными p-группами, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G аппроксимируема конечными p-группами относительно сопряженности;*
(2) *группа G аппроксимируема конечными p-группами;*
(3) *подгруппы H и K p'-изолированы в группах A и B соответственно.*

Напомним, что если p — простое число, то подгруппа X некоторой группы Y называется p-изолированной, если для любого элемента $y \in Y$ из включения $y^p \in X$ следует, что $y \in X$. Подгруппа X группы Y называется p'-изолированной, если она q-изолирована для любого простого числа $q \neq p$.

В работе [4] показано, что если свободное произведение $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ локально нильпотентных групп A и B, где $H \neq A$ и $K \neq B$, является группой, аппроксимируемой нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппы H и K p'-изолированы в группах A и B соответственно. Поэтому имеет место

Следствие. *Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных свободных абелевых групп A и B, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *группа G аппроксимируема нильпотентными группами;*
(2) *для некоторого простого числа p подгруппы H и K p'-изолированы в группах A и B соответственно;*
(3) *для некоторого простого числа p группа G аппроксимируема конечными p-группами относительно сопряженности;*
(4) *для некоторого простого числа p группа G аппроксимируема конечными p-группами.*

2. Доказательство теоремы 1

Начнем с доказательства двух вспомогательных утверждений, являющихся аналогами соответствующих результатов для C_f-отделимости, полученных в работе [5] (лемма 1 и теорема 1 соответственно).

Предложение 2.1. *Пусть H — субнормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Если элемент $h \in H$ является C_{fp}-отделимым в группе H, то он является C_{fp}-отделимым и в группе G.*

Доказательство. Очевидная индукция по длине последовательности подгрупп
$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_s = G,$$
где для $i = 0, 1, \ldots, s-1$ подгруппа H_{i+1} совпадает с нормализатором в группе G подгруппы H_i, позволяет считать, что H является нормальной подгруппой группы G.

Предположим, что элемент $h \in H$ является C_{fp}-отделимым в группе H, и пусть g — произвольный элемент группы G, не сопряженный с элементом h. Покажем, что для подходящей нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G в фактор-группе G/N элементы hN и gN не являются сопряженными.

Если элемент g не принадлежит подгруппе H, то подгруппа $N = H$ является, очевидно, искомой. Пусть $g \in H$. Фиксируем систему c_1, c_2, $\ldots$, c_n представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H и полагаем для $i = 1, 2, \ldots, n$ $g_i = c_i^{-1} g c_i$. Так как каждый из элементов g_1, g_2, $\ldots$, g_n группы H не сопряжен в этой группе с элементом h, по предположению найдется такая нормальная подгруппа M конечного p-индекса группы H, что в фактор-группе H/M образ каждого из элементов g_1, g_2, $\ldots$, g_n не сопряжен с образом элемента h.

Пусть $M_i = c_i^{-1} M c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как сопряжение произвольным элементом группы G индуцирует некоторый автоморфизм группы H, каждая из подгрупп M_1, M_2, … , M_n инвариантна в H и имеет в этой группе конечный p-индекс. Поэтому их пересечение N является подгруппой конечного p-индекса группы H, а потому и группы G. Очевидно, кроме того, что подгруппа N инвариантна в группе G и что в фактор-группе G/N образ элемента g не сопряжен с образом элемента h.

Предложение 2.2. *Если группа G является расширением свободной группы при помощи конечной p-группы, то в группе G каждый элемент бесконечного порядка $\mathcal{C}_{fp}$-отделим.*

Доказательство. Пусть F — свободная нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G и $a \in G$ — элемент бесконечного порядка. Если H — подгруппа группы G, порожденная подгруппой F и элементом a, то H имеет конечный p-индекс в группе G и является субнормальной, поскольку фактор-группа G/F нильпотентна. Поэтому ввиду предложения 2.1 можно без потери общности считать, что $G = H$. Это означает, в частности, что произвольный элемент $g \in G$ записывается в виде $g = a^k f$ для некоторого целого числа k и подходящего элемента $f \in F$.

Пусть b — произвольный элемент группы G, не сопряженный с элементом a. Если элементы a и b принадлежат разным смежным классам по подгруппе F, то поскольку фактор-группа G/F абелева, элементы aF и bF не сопряжены в конечной p-группе G/F.

Будем считать теперь, что $aF = bF$. Поскольку фактор-группа G/F является конечной p-группой, то для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ должно выполняться включение $a^{p^n} \in F$. Докажем, что элементы a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены в группе G.

Пусть, напротив, для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $b^{p^n} = g^{-1} a^{p^n} g$. Записывая элемент g в виде $g = a^k f$, где $f \in F$, имеем $b^{p^n} = f^{-1} a^{p^n} f$. Пусть $a_1 = f^{-1} a f$. Тогда $a_1 F = aF$, и потому $b = a_1 x$ для подходящего $x \in F$. Из равенства $(a_1 x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, очевидно, перестановочность элементов $a_1 x$ и $a_1^{p^n}$, откуда, в свою очередь, вытекает, что элементы x и $a_1^{p^n}$ свободной группы F перестановочны. Следовательно, эти элементы должны принадлежать некоторой циклической подгруппе группы F, т. е. для некоторого элемента $y \in F$ и подходящих целых чисел r и s выполнены равенства $x = y^r$ и $a_1^{p^n} = y^s$. При этом, ввиду того, что порядок элемента a бесконечен, $s \neq 0$. В силу второго из этих равенств элементы a_1 и y^s являются перестановочными, т. е. $(a_1^{-1} y a_1)^s = y^s$. Так как $a_1^{-1} y a_1 \in F$ и в свободной группе извлечение корней однозначно, отсюда следует перестановочность элементов a_1 и y. Поэтому из равенства $(a_1 x)^{p^n} = a_1^{p^n}$ следует, что $x^{p^n} = 1$, т. е. $x = 1$. Отсюда $b = a_1$, что невозможно, так как элементы a и b не являются сопряженными.

Итак, элемент b^{p^n} не сопряжен в группе G с элементом a^{p^n} из подгруппы F. Так как свободная группа аппроксимируема конечными p-группами относительно сопряженности для любого простого числа p (см. [6], предложение 4.8), из предложения 2.1 следует существование такой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G, что в фактор-группе G/N образы элементов a^{p^n} и b^{p^n} не сопряжены. Очевидно, что тогда и образы элементов a и b не являются сопряженными, и предложение 2.2 доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Хорошо известно (и легко показать, используя теорему Х. Нейман (см., напр., [7], следствие 4.9.2)), что свободное произведение с объединенными подгруппами $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ двух конечных p-групп A и B является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда G есть расширение свободной группы при помощи конечной p-группы. Поэтому первое утверждение теоремы 1 сразу же следует из предложения 2.2.

Как упоминалось во введении, из теоремы Г. Хигмена [3] следует, что если объединяемые подгруппы H и K являются центральными в группах A и B соответственно, то группа G аппроксимируема конечными p-группами. Поэтому ввиду того же предложения 2.2 для доказательства второго утверждения теоремы 1 достаточно рассматривать лишь те несопряженные элементы группы G, порядки которых конечны.

Итак, пусть x и y — элементы конечного порядка группы G, не сопряженные в этой группе. Поскольку каждый элемент конечного порядка свободного произведения групп с объединенной подгруппой сопряжен с элементом одного из свободных множителей, без потери общности можно считать, что каждый из элементов x и y лежит в одной из подгрупп A и B. Если, при этом, эти элементы принадлежат одной и той же подгруппе A или B, то они не сопряжены в этой подгруппе.

Поскольку подгруппы H и K являются центральными в группах A и B, можно построить обобщенное прямое произведение P групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним (см., напр., [8]), что группа P может быть определена как фактор-группа прямого произведения $A \times B$ групп A и B по подгруппе N, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$.

Без труда проверяется, что произведение α стандартного вложения группы A в группу $A \times B$ и естественного гомоморфизма группы $A \times B$ на группу P является вложением группы A в группу P; аналогично определяется вложение β группы B в группу P. Кроме того, $A\alpha \cap B\beta = H\alpha = K\beta$, произвольный элемент из подгруппы $A\alpha$, не принадлежащий подгруппе $H\alpha$, не сопряжен в группе P ни с одним элементом из подгруппы $B\beta$, и два элемента из подгруппы $A\alpha$ (или из подгруппы $B\beta$) сопряжены в группе P тогда и только тогда, когда они сопряжены в подгруппе $A\alpha$ (соответственно, в подгруппе $B\beta$).

Так как для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h\alpha = h(\varphi\beta)$, то существует гомоморфизм ρ группы G в группу P, продолжающий отображения α и β. Очевидно теперь, что элементы $x\rho$ и $y\rho$ не сопряжены в конечной p-группе P, и доказательство теоремы 1 закончено.

3. Доказательство теоремы 2

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) в теореме 2 очевидна. Легко устанавливается и справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (3).

В самом деле, пусть группа $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами, причем группы A и B абелевы и $H \neq A$, $K \neq B$. Если, скажем, подгруппа H не является p'-изолированной в группе A, то для некоторого элемента $a \in A \setminus H$ и некоторого простого числа $q \neq p$ имеет место включение $a^q \in H$. Пусть еще b — произвольный элемент группы B, не принадлежащий подгруппе K. Тогда запись $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ коммутатора элементов a и b несократима, и потому этот коммутатор является неединичным элементом группы G. С другой стороны, легко видеть, что для любого гомоморфизма θ группы G на конечную p-группу выполнено включение $a\theta \in H\theta$, так что оба элемента $a\theta$ и $b\theta$ принадлежат абелевой группе $B\theta$. Таким образом, элемент $[a, b]$ переходит в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную p-группу, что противоречит предположению об аппроксимируемости группы G конечными p-группами.

Таким образом, остается доказать, что из p'-изолированности в группах A и B подгрупп H и K следует аппроксимируемость группы G конечными p-группами относительно сопряженности.

Для этого необходимо, прежде всего, напомнить следующее понятие (см. [2]). Если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A, K — подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, то подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ называются (H, K, φ)-совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Если нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно (H, K, φ)-совместимы, то отображение $\varphi_{R,S} : HR/R \to KS/S$, определяемое по правилу $(hR)\varphi_{R,S} = (h\varphi)S$ $(h \in H)$, является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Поэтому можно построить свободное произведение

$$G_{R,S} = \big(A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S}\big)$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы A на фактор-группу A/R и группы B на фактор-группу B/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ на группу $G_{R,S}$.

Если группы A и B абелевы и индексы (H, K, φ)-совместимых подгрупп R и S в группах A и B конечны и являются p-числами, то в силу теоремы 1 группа $G_{R,S}$ аппроксимируема конечными p-группами относительно сопряженности. Поэтому для доказательства аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами группы G достаточно показать, что для любых несопряженных элементов x и y группы G можно найти такие (H, K, φ)-совместимые подгруппы R и S конечных p-индексов в группах A и B, что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Напомним еще, что произвольный элемент x группы $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ может быть записан в виде $x = x_1x_2 \cdots x_n$, где каждый из сомножителей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежит одной из подгрупп A или B и при $n > 1$ любые соседние сомножители x_i и x_{i+1} не лежат в одной и той же из этих подгрупп (и потому не входят в соответствующую объединяемую подгруппу H или K). Такая запись элемента x называется его несократимой записью, а число n сомножителей этой записи (одно и то же для всех несократимых записей данного элемента) называется длиной элемента x. Элемент x группы G называется циклически несократимым, если либо его длина n равна 1, либо $n > 1$ и сомножители x_1 и x_n его несократимой записи не принадлежат одной и той же подгруппе A или B. В этом случае для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ запись $u_i = x_i x_{i+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_{i-1}$ элемента u_i является несократимой; элементы u_1, u_2, ... , u_n называются циклическими перестановками элемента x (отметим, что при $n = 1$ единственной циклической перестановкой элемента x является он сам).

Общий критерий Солитэра сопряженности двух элементов свободного произведения групп с объединенной подгруппой (теорема 4.6 из [7]) в рассматриваемом здесь случае абелевых свободных множителей принимает более простой вид.

Предложение 3.1. *Пусть $G = (A * B;\ H = K, \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами абелевых групп A и B. Произвольный элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Циклически несократимые элементы x и y сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда их длины равны и один из них совпадает с некоторой циклической перестановкой другого.*

Для построения искомых гомоморфизмов $\rho_{R,S}$ необходимо доказать два предварительных утверждения.

Предложение 3.2. *Пусть A и B — конечно порожденные абелевы группы, H — p'-изолированная подгруппа группы A, K — p'-изолированная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм. Для любых подгрупп M и N конечных p-индексов групп A и B соответственно существуют (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$, имеющие конечные p-индексы в группах A и B и такие, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$.*

Доказательство. Докажем сначала следующий вспомогательный результат:

Лемма. *Пусть A — конечно порожденная абелева группа, H — p'-изолированная подгруппа группы A и U — подгруппа конечного p-индекса группы H. Для любой подгруппы M конечного p-индекса группы A, содержащей подгруппу U, существует подгруппа R конечного p-индекса группы A такая, что $R \leqslant M$ и $R \cap H = U$.*

В самом деле, так как подгруппа U является, очевидно, p'-изолированной в группе A, фактор-группа A/U оказывается конечно порожденной абелевой группой без p'-кручения и потому аппроксимируема конечными p-группами. Поскольку ее подгруппа H/U конечна, найдется подгруппа R/U конечного p-индекса группы A/U, не имеющая с подгруппой H/U общих неединичных элементов. Так как, при этом, можно считать без потери общности, что R/U содержится в подгруппе M/U, подгруппа R является искомой.

Пусть теперь M и N — подгруппы конечных p-индексов групп A и B соответственно. Тогда $U = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1}$ — подгруппа конечного p-индекса группы H и $V = (M \cap H)\varphi \cap (N \cap K)$ — подгруппа конечного p-индекса группы K. В соответствии с леммой выберем в группе A такую подгруппу R конечного p-индекса, что $R \leqslant M$ и $R \cap H = U$, а в группе B — такую подгруппу S конечного p-индекса, что $S \leqslant N$ и $S \cap K = V$. Так как $U\varphi = V$, подгруппы R и S являются искомыми. Предложение 3.2 доказано.

Предложение 3.3. *Пусть A и B — конечно порожденные абелевы группы, аппроксимируемые конечными p-группами, H — p'-изолированная подгруппа группы A, K — p'-изолированная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм. Для любого конечного набора g_1, g_2, $\dots$, g_r неединичных элементов группы $G = (A * B;\ H = K, \varphi)$ найдутся (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ конечных p-индексов такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ образ $g_i\rho_{R,S}$ элемента g_i является неединичным элементом группы $G_{R,S}$. Более того, подгруппы R и S можно выбрать так, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ длина элемента $g_i\rho_{R,S}$ в группе $G_{R,S}$ совпадает с длиной элемента g_i в группе G (и потому элемент $g_i\rho_{R,S}$ является циклически несократимым, если элемент g_i циклически несократим).*

Это утверждение является непосредственным следствием предложения 3.2. Действительно, если длина элемента g_i больше 1, то все сомножители его несократимой записи лежат попеременно в группах A и B и не входят в соответствующие объединяемые подгруппы H и K. Поскольку фактор-группы A/H и B/K аппроксимируемы конечными p-группами, найдутся такие подгруппы M_i и N_i конечных p-индексов групп A и B соответственно, что все сомножители несократимой записи элемента g_i, лежащие в группе A, не входят в подгруппу M_iH, а сомножители, лежащие в группе B, не входят в подгруппу N_iK. Если же длина элемента g_i равна 1, то, воспользовавшись предположением об аппроксимируемости групп A и B конечными p-группами, подгруппы $M_i \leqslant A$ и $N_i \leqslant B$ конечных p-индексов выберем так, чтобы элемент g_i не входил в подгруппу M_i, если $g_i \in A$, и не входил в подгруппу N_i, если $g_i \in B$. Полагая

$$M = \bigcap_{i=1}^{r} M_i \quad \text{и} \quad N = \bigcap_{i=1}^{r} N_i,$$

видим, что (H, K, φ)-совместимые подгруппы R и S, выбранные в соответствии с предложением 3.2 так, чтобы $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$, являются искомыми.

Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение с объединенными подгруппами конечно порожденных абелевых групп A и B, аппроксимируемых конечными p-группами, причем объединяемые подгруппы H и K являются p'-изолированными в группах A и B соответственно. Пусть циклически несократимые элементы x и y группы G не сопряжены в этой группе. Напомним, что для завершения доказательства теоремы 2 нам достаточно указать такие (H, K, φ)-совместимые подгруппы R и S конечных p-индексов в группах A и B, что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов не сопряжены в группе $G_{R,S}$.

Если длины этих элементов различны, то в соответствии с предложением 3.3 найдутся (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ конечных p-индексов такие, что образы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ этих элементов также циклически несократимы и их длины различны. Так как тогда в силу предложения 3.1 элементы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$, подгруппы R и S искомые.

Пусть теперь длина каждого из элементов x и y равна n и пусть y_1, y_2, $\dots$, y_n — все циклические перестановки элемента y. Поскольку элементы x и y не сопряжены в группе G, элемент x отличен от каждого из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Из предложения 3.3 вытекает существование (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ конечных p-индексов таких, что образы относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$ элементов x и y имеют длину n, циклически несократимы и образ элемента x отличен от образа каждого из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Легко видеть, кроме того, что произвольная циклическая перестановка элемента $y\rho_{R,S}$ является образом одного из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Из предложения 3.1 теперь следует, что элементы $x\rho_{R,S}$ и $y\rho_{R,S}$ не сопряжены в группе $G_{R,S}$. Теорема 2 доказана.

Список цитированной литературы

1. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions // Austral. Math. Soc. Series A. 1980. V. 29. P. 35–51.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
3. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
4. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* О нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. ИвГУ. Математика. Вып. 2. Иваново, 1999. С. 5–7.
5. *Stebe P. F.* A residual property of certain groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 26. P. 37–42.
6. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир. 1980.
7. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука. 1974.
8. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246. P. 503–554.