*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2019. Том 60, № 2*

*УДК 512.543*

# О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

**А. А. Кряжева**

**Аннотация.** Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в группах $A$ и $B$. Будем предполагать, что группы $A$ и $B$ удовлетворяют нетривиальному тождеству и для каждого натурального числа $n$ число всех подгрупп групп $A$ и $B$ индекса $n$ конечно.

Доказаны следующие утверждения.

1. В группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы.

2. В группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $H$ конечно порожденными подгруппами группы $P$.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.212

**Ключевые слова:** финитно отделимая подгруппа, финитно аппроксимируемая группа, свободное произведение групп, конечный индекс, расщепляемое расширение группы.

## 1. Введение

Напомним, что группа $G$ называется *финитно аппроксимируемой*, если для любого неединичного элемента $a$ группы $G$ существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую конечную группу, при котором образ элемента $a$ отличен от единицы [1]. Известно, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой [2]. Для обобщенных свободных произведений (т. е. для свободных произведений с объединенной подгруппой) это утверждение уже неверно. Свойство финитной аппроксимируемости свободного произведения $P$ двух групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$ изучается при дополнительных ограничениях, накладываемых на свободные множители $A$ и $B$ и на объединенную подгруппу $H$. Так, например, в 1963 г. Баумслаг в [3] доказал, что если группы $A$ и $B$ финитно аппроксимируемы, а объединенная подгруппа $H$ конечна, то группа $P$ финитно аппроксимируема. Другим естественным ограничением является конечность индексов объединенной подгруппы $H$ в группах $A$ и $B$. При этом ограничении в работе Д. Н. Азарова [4] установлен следующий критерий финитной аппроксимируемости группы $P$.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ и $B$ — финитно аппроксимируемые группы с нетривиальными тождествами и для любого натурального числа $n$ число всех подгрупп групп $A$ и $B$ индекса $n$ конечно. Пусть $P = (A * B, H)$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в группах $A$ и $B$.*

*Группа $P$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в $P$.*

Здесь рассматривается вопрос о финитной отделимости подгрупп в свободном произведении из теоремы 1. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется *финитно отделимой*, если для каждого элемента $g$ группы $G$, не принадлежащего подгруппе $H$, существует гомоморфизм группы $G$ на некоторую конечную группу, при котором образ элемента $g$ не принадлежит образу подгруппы $H$ [5]. Заметим, что группа $G$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа финитно отделима.

Основной результат настоящей работы формулируется следующим образом.

**Теорема 2.** *Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в группах $A$ и $B$. Пусть группы $A$ и $B$ удовлетворяют нетривиальному тождеству и для любого натурального числа $n$ число всех подгрупп групп $A$ и $B$ индекса $n$ конечно.*

1. *В группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы.*

2. *В группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $H$ конечно порожденными подгруппами группы $P$.*

В теоремах 1 и 2 на свободные множители $A$ и $B$ накладывается условие, состоящее в том, что в этих группах число подгрупп каждого конечного индекса конечно. Это условие является достаточно общим, поскольку ему удовлетворяют, например, все конечно порожденные группы (см. [6, гл. 10, § 38]).

Так как в любой полициклической группе все подгруппы финитно отделимы (см., например, [7, п. 1.3.10]), непосредственно из теоремы 2 вытекает

**Следствие.** *Пусть $P$ — свободное произведение полициклических групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в группах $A$ и $B$. Тогда следующие условия равносильны между собой.*

1. *Группа $P$ финитно аппроксимируема.*
2. *В группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы.*
3. *В группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Заметим, что свободное произведение, указанное в следствии из теоремы 2, не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующий пример построен в [8].

## 2. Вспомогательные утверждения

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — группа и $H$ — подгруппа группы $G$. Если подгруппа $M$ группы $H$ финитно отделима в группе $G$, то она финитно отделима и в группе $H$.*

Доказательство. Пусть элемент $h$ принадлежит подгруппе $H$, но не принадлежит подгруппе $M$. Так как $M$ — подгруппа группы $G$, по условию леммы $M$ финитно отделима в группе $G$. Поэтому существует гомоморфизм $\varphi$ группы $G$ на некоторую конечную группу такой, что $h\varphi \notin M\varphi$. Пусть $\varphi_1$ — ограничение гомоморфизма $\varphi$ на подгруппу $H$. Тогда $\varphi_1$ — гомоморфизм группы $H$ на конечную группу и $h\varphi_1 \notin M\varphi_1$. Таким образом, подгруппа $M$ финитно отделима в $H$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно подгрупп конечного индекса, и $H$ — подгруппа конечного индекса группы $G$. Если в группе $H$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы, то и в группе $G$ финитно отделимы все подгруппы из класса $\Omega$.*

Доказательство. Пусть подгруппа $H$ группы $G$ имеет конечный индекс в группе $G$ и в группе $H$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы. Тогда в подгруппе $H$ содержится нормальная подгруппа $H_1$ группы $G$, имеющая в группе $G$ конечный индекс, причем любая $\Omega$-подгруппа группы $H_1$ по условию финитно отделима в $H$, а значит, и в $H_1$ (см. лемму 1). Поэтому без потери общности будем предполагать, что подгруппа $H$ нормальна в группе $G$.

Пусть $A$ — произвольная подгруппа группы $G$ из класса $\Omega$ и элемент $g$ группы $G$ не принадлежит подгруппе $A$. Используя тот факт, что все подгруппы из класса $\Omega$ группы $H$ финитно отделимы, покажем, что подгруппа $A$ финитно отделима в группе $G$, т. е. в группе $G$ существует нормальная подгруппа $N$, имеющая конечный индекс в группе $G$ и такая, что элемент $g$ не принадлежит подгруппе $AN$.

Если $g \notin AH$, то в качестве подгруппы $N$ выступает сама подгруппа $H$.

Пусть $g \in AH$, т. е. $g = ah$ для некоторых элементов $a \in A$ и $h \in H$. Полагая $A_1 = A \cap H$, получаем подгруппу $A_1$ группы $H$, не содержащую, очевидно, элемент $h$ этой группы. Поскольку подгруппа конечного индекса некоторой группы высекает в каждой подгруппе этой группы подгруппу конечного индекса, индекс подгруппы $A_1$ в группе $A$ конечен. Так как группа $A$ принадлежит классу $\Omega$ и $\Omega$ замкнут относительно подгрупп конечного индекса, подгруппа $A_1$ также принадлежит классу $\Omega$. Таким образом, $A_1$ является финитно отделимой в группе $H$, поэтому существует нормальная подгруппа $K$ конечного индекса группы $H$ такая, что элемент $h$ не принадлежит $A_1K$. Так как индекс подгруппы $H$ в группе $G$ конечен, $K$ является подгруппой конечного индекса группы $G$, поэтому содержит подгруппу $N$, нормальную в группе $G$ и имеющую в группе $G$ конечный индекс. Поскольку $h \notin A_1K$ и $N$ — подгруппа группы $K$, элемент $h$ не принадлежит $A_1N$.

Покажем, что $g \notin AN$, т. е. подгруппа $N$ искомая. Предположим, напротив, что $g \in AN$, т. е. $g = a_1n$ для некоторых элементов $a_1 \in A$, $n \in N$. Так как, к тому же, $g = ah$, имеем равенство $ah = a_1n$, т. е. $a^{-1}a_1 = hn^{-1}$. Ввиду того, что $a^{-1}a_1 \in A$, $hn^{-1} \in H$, получаем включение $a^{-1}a_1 \in A_1$. Отсюда $h = (a^{-1}a_1)n \in A_1N$, что невозможно. Тем самым лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ — группа и $A$, $H$ — подгруппы группы $G$. Если подгруппа $H$ финитно отделима в группе $G$, то $A \cap H$ финитно отделима в $A$.*

Доказательство. Пусть подгруппа $H$ финитно отделима в группе $G$. Докажем, что $A \cap H$ финитно отделима в $A$. Возьмем элемент $g$ из подгруппы $A$ такой, что $g \notin A \cap H$. Тогда $g \notin H$. Подгруппа $H$ финитно отделима в $G$, значит, существует гомоморфизм $\varphi$ группы $G$ на некоторую конечную группу такой, что $g\varphi \notin H\varphi$. Следовательно, $g\varphi \notin (A \cap H)\varphi$. Пусть $\varphi_1$ — ограничение гомоморфизма $\varphi$ на подгруппу $A$. Тогда $\varphi_1$ — гомоморфизм группы $A$ на некоторую конечную группу и $g\varphi_1 \notin (A \cap H)\varphi_1$. Таким образом, получаем, что $A \cap H$ финитно отделима в $A$.

**Лемма 4.** *Пусть $H$ — подгруппа группы $G$ и индекс подгруппы $H$ в группе $G$ конечен и равен $n$. Пусть число всех подгрупп группы $G$ индекса $n$ конечно. Тогда в группе $G$ существует характеристическая подгруппа $N$ конечного индекса такая, что $N \subseteq H$.*

Доказательство. Так как число всех подгрупп группы $G$ индекса $n$ конечно, можно выписать все подгруппы группы $G$ индекса $n$: $H_1, H_2, \ldots, H_s$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$. Поскольку автоморфизм группы $G$ отображает подгруппу индекса $n$ на подгруппу индекса $n$, то $\varphi$ переставляет между собой подгруппы $H_1, H_2, \ldots, H_s$. Поэтому

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_s\} = \{H_1\varphi, H_2\varphi, \ldots, H_s\varphi\}$$

и, следовательно,

$$\left(\bigcap_{i=1}^{s} H_i\right)\varphi = \bigcap_{i=1}^{s} H_i\varphi = \bigcap_{i=1}^{s} H_i,$$

т. е. если положить $N = \bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i$, то $N\varphi = N$. Поэтому $N$ — характеристическая подгруппа группы $G$. Так как по теореме Пуанкаре пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса группы $G$ является подгруппой конечного индекса группы $G$ (см., например, [6, гл. 3, § 8]), $N$ — подгруппа конечного индекса группы $G$. Поскольку одна из подгрупп $H_i$ совпадает с подгруппой $H$, то $N \subseteq H$. Следовательно, $N$ — искомая подгруппа. Лемма доказана.

## 3. О расщепляемых расширениях

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений для расщепляемых расширений. Они потребуются при доказательстве теоремы 2.

Напомним, что группа $G$ называется *расщепляемым расширением* группы $A$ с помощью группы $B$, если $A$ является нормальной подгруппой группы $G$, $B$ — подгруппа группы $G$, $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

**Лемма 5.** *Пусть $G$ — расщепляемое расширение конечной группы $A$ с помощью группы $B$ и $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно подгрупп конечного индекса. Если в группе $B$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы, то и в группе $G$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы.*

Доказательство. Очевидно, что $B$ — подгруппа конечного индекса группы $G$ и индекс $[G : B]$ совпадает с порядком группы $A$. Поэтому данная лемма непосредственно вытекает из леммы 2.

**Предложение 1.** *Пусть $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ с помощью группы $B$ и для любого натурального $n$ число всех подгрупп группы $A$ индекса $n$ конечно. Пусть $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп конечного индекса. Тогда следующие условия равносильны.*

1. *В группе $G$ все $\Omega$-подгруппы финитно отделимы.*

2. *В группах $A$ и $B$ все $\Omega$-подгруппы финитно отделимы и, сверх того, в группе $A$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $A$ $\Omega$-подгруппами группы $G$.*

Очевидным примером класса групп, замкнутого относительно факторизации и подгрупп конечного индекса, является класс всех конечно порожденных групп.

Сформулируем еще одно утверждение, которое получается из предложения 1 при более сильных ограничениях на класс $\Omega$. Требование замкнутости класса $\Omega$ относительно подгрупп конечного индекса, накладываемое в предложении 1, усиливаем до требования замкнутости класса $\Omega$ относительно любых подгрупп.

**Предложение 2.** *Пусть $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ с помощью группы $B$ и для любого натурального $n$ число всех подгрупп группы $A$ индекса $n$ конечно. Пусть $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *В группе $G$ все $\Omega$-подгруппы финитно отделимы.*

2. *В группах $A$ и $B$ все $\Omega$-подгруппы финитно отделимы.*

Заметим, что предложение 2 может быть легко установлено с помощью предложения 1. В самом деле, если $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно подгрупп, то п. 2 предложения 1 равносилен п. 2 предложения 2.

Очевидными примерами классов групп, замкнутых относительно подгрупп и факторизации, являются классы всех групп, всех циклических групп, всех полициклических групп, а также любое многообразие групп.

Перейдем к доказательству предложения 1. Докажем сначала достаточность. Пусть $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ с помощью группы $B$ и для любого натурального $n$ число всех подгрупп группы $A$ индекса $n$ конечно. Пусть $\Omega$ — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп конечного индекса. Предположим, что в группах $A$ и $B$ финитно отделимы все подгруппы из класса $\Omega$ и в группе $A$ финитно отделимы все подгруппы, являющиеся пересечениями группы $A$ со всеми подгруппами из класса $\Omega$ группы $G$.

Возьмем произвольную подгруппу $H$ из класса $\Omega$ группы $G$ и элемент $g$, принадлежащий группе $G$, но не принадлежащий подгруппе $H$.

Сначала рассмотрим случай, когда $g \notin HA$. В этом случае $gA \notin HA/A$. Фактор-группа $HA/A$ является подгруппой группы $G/A$. Так как

$$G/A = BA/A \cong B/B \cap A \cong B,$$

а в группе $B$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы, то и в группе $G/A$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы. При этом подгруппа $HA/A$ группы $G/A$ принадлежит классу $\Omega$, так как класс $\Omega$ замкнут относительно факторизации. Из последних двух обстоятельств следует, что подгруппа $HA/A$ финитно отделима в группе $G/A$. Следовательно, существует гомоморфизм $\varphi$ из фактор-группы $G/A$ на конечную группу такой, что $(gA)\varphi \notin (HA/A)\varphi$. Пусть $\psi$ — естественный гомоморфизм группы $G$ на фактор-группу $G/A$, тогда $H\psi = HA/A$. Получаем, что $g\psi\varphi \notin H\psi\varphi$. Таким образом, гомоморфизм $\psi\varphi$ искомый.

Рассмотрим случай, когда $g \in HA$, т. е. $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Заметим, что элемент $a$ не принадлежит подгруппе $H_1 = H \cap A$. По условию подгруппа $H_1$

финитно отделима в $A$. Поэтому в группе $A$ существует нормальная подгруппа $N$ конечного индекса такая, что $a \notin H_1N$. Так как для любого натурального числа $n$ число всех подгрупп группы $A$ индекса $n$ конечно, то по лемме 4 любая подгруппа конечного индекса группы $A$ содержит в себе характеристическую подгруппу группы $A$ конечного индекса. Поэтому без потери общности можем считать подгруппу $N$ характеристической в $A$. Поскольку подгруппа $A$ нормальна в группе $G$, то и подгруппа $N$ нормальна в группе $G$. Покажем, что $g \notin HN$.

Если, напротив, элемент $g$ принадлежит подгруппе $HN$, то элемент $g$ представим в виде $g = h_1x$, где $h_1 \in H$, $x \in N$. С другой стороны $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Тогда $ha = h_1x$. Следовательно, получаем равенство $h^{-1}h_1 = ax^{-1}$, где $h^{-1}h_1 \in H$, $ax^{-1} \in A$. Значит, $h^{-1}h_1 \in H_1$, поэтому элемент $a = h^{-1}h_1x$ принадлежит подгруппе $H_1N$, но это противоречит выбору подгруппы $N$. Стало быть, $g \notin HN$.

Рассмотрим фактор-группу $G/N$ и естественный гомоморфизм $\varphi$ группы $G$ на фактор-группу $G/N$. Так как элемент $g$ не принадлежит подгруппе $HN$, то $gN \notin HN/N$, т. е. $g\varphi \notin H\varphi$.

Поскольку $G$ — расщепляемое расширение группы $A$ с помощью группы $B$ и подгруппа $N$ содержится в $A$, легко видеть, что $G/N$ является расщепляемым расширением группы $A/N$ с помощью группы $BN/N$, причем группа $A/N$ конечна в силу того, что подгруппа $N$ имеет конечный индекс в группе $A$. Так как группа $BN/N$ изоморфна группе $B$, по условию предложения в группе $BN/N$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы. Поэтому в силу леммы 5 в группе $G/N$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы.

Так как подгруппа $H$ принадлежит классу $\Omega$, подгруппа $HN/N$ также принадлежит классу $\Omega$. Отсюда и из того, что в группе $G/N$ все подгруппы из класса $\Omega$ финитно отделимы, следует, что $HN/N$ финитно отделима в $G/N$, т. е. $H\varphi$ финитно отделима в $G/N$. Поскольку $g\varphi \notin H\varphi$, существует гомоморфизм $\psi$ группы $G/N$ на некоторую конечную группу такой, что $(g\varphi)\psi \notin (H\varphi)\psi$. Таким образом, подгруппа $H$ финитно отделима в группе $G$. Тем самым достаточность в предложении 1 доказана.

Необходимость в предложении 1 обеспечивается леммами 1 и 3. Предложение 1 доказано.

## 4. Доказательство теоремы 2

Пусть $P$ — свободное произведение групп $A$ и $B$ с объединенной подгруппой $H$, причем $H$ является собственной подгруппой конечного индекса в группах $A$ и $B$. Пусть группы $A$ и $B$ удовлетворяют нетривиальному тождеству и для любого натурального числа $n$ число всех подгрупп групп $A$ и $B$ индекса $n$ конечно.

1. Покажем, что в группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы.

Необходимость. Пусть в группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы. В частности, единичная подгруппа группы $P$ финитно отделима, поэтому группа $P$ финитно аппроксимируема.

Так как в группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы и $H$ — подгруппа группы $P$, в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы (см. лемму 1).

Достаточность. Пусть группа $P$ финитно аппроксимируема и в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Докажем, что в группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Так как группа $P$ финитно аппроксимируема и $A$, $B$ — подгруппы группы $P$, группы $A$ и $B$ финитно аппроксимируемы. Тогда по теореме 1 в группе $H$ существует подгруппа $L$ конечного индекса, нормальная в группе $P$.

Очевидно, что фактор-группа $P/L$ является свободным произведением конечных групп $A/L$ и $B/L$ с объединенной подгруппой $H/L$. Поэтому группа $P/L$ содержит свободную подгруппу $G/L$ конечного индекса. Докажем, что в группе $G$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Группа $G$ является расширением группы $L$ с помощью свободной группы. Известно, что такое расширение расщепляемо, т. е. группа $G$ является расщепляемым расширением группы $L$ с помощью свободной группы. Известно, что в свободной группе все циклические подгруппы финитно отделимы [9]. По условию теоремы в группе $H$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Так как группа $L$ является подгруппой группы $H$, в группе $L$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Поскольку $L$ — подгруппа конечного индекса в $H$ и $H$ — подгруппа конечного индекса в группах $A$ и $B$, то $L$ — подгруппа конечного индекса в группах $A$ и $B$. Так как группы $A$ и $B$ удовлетворяют условию, что для любого натурального числа $n$ число всех подгрупп групп $A$ и $B$ индекса $n$ конечно, то и группа $L$ удовлетворяет этому условию. Заметим еще, что класс $\Omega$ всех циклических групп замкнут относительно факторизации и подгрупп. Таким образом, для группы $G$ и класса $\Omega$ выполнены все требования, накладываемые в предложении 2. Поэтому в силу предложения 2 в группе $G$ все циклические подгруппы финитно отделимы.

Так как $G$ является подгруппой конечного индекса группы $P$, в силу леммы 2 в группе $P$ все циклические подгруппы финитно отделимы. Тем самым утверждение 1 доказано.

2. Покажем, что в группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда группа $P$ финитно аппроксимируема, и в группе $H$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $H$ конечно порожденными подгруппами группы $P$.

Необходимость. Пусть в группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. В частности, единичная подгруппа группы $P$ финитно отделима, поэтому группа $P$ финитно аппроксимируема.

Рассмотрим произвольную конечно порожденную подгруппу $F$ группы $P$. Так как в группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, группа $F$ финитно отделима в группе $P$. Тогда в силу леммы 3 $F \cap H$ финитно отделима в $H$, т. е. в группе $H$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $H$ конечно порожденными подгруппами группы $P$. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть группа $P$ финитно аппроксимируема и в группе $H$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $H$ конечно порожденными подгруппами группы $P$. Докажем, что в группе $P$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Как и в доказательстве п. 1 легко проверяется, что в группе $P$ существует подгруппа $G$ конечного индекса, являющаяся расщепляемым расширением группы $L$ с помощью свободной группы, где $L$ — подгруппа конечного индекса группы $H$, нормальная в группе $P$. В соответствии с леммой 2 для доказательства финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп группы $P$ достаточно показать, что в группе $G$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Так как группы $A$ и $B$ имеют конечное число подгрупп каждого конечного индекса и $L$ — подгруппа конечного индекса в группах $A$ и $B$, то и в группе $L$ число подгрупп каждого конечного индекса конечно. Очевидно, что класс всех конечно порожденных групп замкнут относительно подгрупп конечного индекса и факторизации. Заметим еще, что в свободной группе все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы [9]. Ввиду предложения 1 остается доказать, что в группе $L$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $L$ конечно порожденными подгруппами группы $G$ (в частности, в группе $L$ все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы).

Рассмотрим произвольную конечно порожденную подгруппу $F$ группы $G$. По условию теоремы подгруппа $F_1 = F \cap H$ финитно отделима в $H$. Тогда по лемме 3 подгруппа $F_2 = F_1 \cap L$ финитно отделима в $L$. Поскольку $F_2 = F \cap H \cap L = F \cap L$, то $F \cap L$ финитно отделима в $L$. Иными словами, в группе $L$ финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в $L$ конечно порожденными подгруппами группы $G$. Тем самым п. 2 теоремы доказан и теорема полностью доказана.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Д. Н. Азарову за помощь при написании этой работы.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–421.
**2.** *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
**3.** *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
**4.** *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.
**5.** *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.
**6.** *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
**7.** *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.
**8.** *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.
**9.** *Hall M.* Coset representations of free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 431–451.

*Поступила в редакцию 19 июля 2018 г.*
*После доработки 19 июля 2018 г.*
*Принята к публикации 17 октября 2018 г.*

Кряжева Анастасия Алексеевна
Ивановский гос. университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Ермака, 37, Иваново 153025
Stasia.07.10@mail.ru