Известия вузов. Математика
2017, № 9, с. 36–47

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Е. КУВАЕВ, Е.В. СОКОЛОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Аннотация. Получено обобщение результатов Ширвани о необходимых условиях финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп на случай аппроксимируемости произвольным классом групп.

Ключевые слова: аппроксимируемость, свободное произведение групп с одной объединенной подгруппой, HNN-расширение с семейством проходных букв.

УДК: 512.543

Введение

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп. Группу X будем называть *$\mathcal{C}$-аппроксимируемой*, если для любого отличного от единицы элемента $x \in X$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, причем $x\sigma \neq 1$. Если класс $\mathcal{C}$ совпадает с классом всех конечных групп, то аппроксимируемость им называется *финитной*.

Семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу групп $\mathcal{C}$, будем обозначать $\mathcal{C}^*(X)$. Если $Y \leq X$, то также положим

$$\mathcal{C}^*(X, Y) = \{N \cap Y \mid N \in \mathcal{C}^*(X)\}.$$

Очевидно, что подгруппами из семейства $\mathcal{C}^*(X)$ исчерпываются ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathcal{C}$. Поэтому группа X является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} N = 1$. При исследовании $\mathcal{C}$-аппроксимируемости той или иной теоретико-групповой конструкции наиболее естественным является вопрос о наследовании данной конструкцией свойства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости от групп, из которых она построена. В частности, интересно знать, будет ли аппроксимироваться классом $\mathcal{C}$ обобщенное свободное произведение (HNN-расширение), свободные множители (соответственно, базовая группа) которого являются $\mathcal{C}$-аппроксимируемыми.

За последние 50 лет был получен целый ряд достаточных условий аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, формулировки которых равносильны представленным в следующих утверждениях.

Предложение 1. *Пусть $F = \langle A_1 * A_2;\, H_1 = H_2,\, \varphi\rangle$ — обобщенное свободное произведение групп A_1 и A_2 с подгруппами H_1 и H_2, объединенными относительно изоморфизма $\varphi :$ $H_1 \to H_2$, $\mathcal{C}$ — класс групп, удовлетворяющий определенным ограничениям (каким именно будет сказано ниже). Если выполняются условия*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F, A_i)} N = 1, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{1}$$

Поступила 16.05.2016

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F, A_i)} H_i N = H_i, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{2}$$

то группа F $\mathcal{C}$*-аппроксимируема.*

Предложение 2. *Пусть* $G = \langle B, t;\ t^{-1}K_1 t = K_{-1},\ \psi\rangle$ *— HNN-расширение группы* B *с подгруппами* K_1 *и* K_{-1}*, связанными при помощи изоморфизма* $\psi : K_1 \to K_{-1}$*,* $\mathcal{C}$ *— класс групп, удовлетворяющий определенным ограничениям. Если выполняются условия*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G, B)} N = 1, \tag{3}$$

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G, B)} K_\varepsilon N = K_\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{4}$$

то группа G $\mathcal{C}$*-аппроксимируема.*

Первым утверждением такого рода является так называемая “фильтрационная” теорема Г. Баумслага ([1], предложение 2), которая дает достаточное условие аппроксимируемости обобщенного свободного произведения в случае, когда $\mathcal{C}$ — класс всех конечных групп. Б. Баумслагом и М. Треткофом был получен аналогичный результат о финитной аппроксимируемости HNN-расширений ([2], теорема 4.2). Если $\mathcal{C}$ — класс всех конечных p-групп, где p — некоторое простое число, утверждения, содержащиеся в формулировках предложений 1 и 2, доказаны в [3] и [4] соответственно. Наконец, в [5] и [6] справедливость предложений 1 и 2 установлена для случая, когда $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп.

Понятно, что для использования предложений 1 и 2 необходимо иметь описание семейств $\mathcal{C}^*(F, A_1)$, $\mathcal{C}^*(F, A_2)$ и $\mathcal{C}^*(G, B)$. В самом общем виде такое описание известно только для классов всех конечных групп [1], [2] и всех конечных p-групп [3], [4]. Для некоторых других классов групп указанное описание удается получить, накладывая дополнительные ограничения на свободные множители (базовую группу) и объединенные (соответственно, связанные) подгруппы (см., например, работу [7], в которой изучается аппроксимируемость свободного произведения двух групп с *нормальными* объединенными подгруппами классом всех конечных π-групп, где π — непустое множество простых чисел).

Нетрудно показать (это будет сделано далее в более общей ситуации), что условия (1) и (3) необходимы для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости групп F и G соответственно. Вместе с тем существуют примеры (один из них приводится в конце введения), показывающие, что условия (2) и (4), вообще говоря, таковыми не являются. Поэтому естественным образом возникает задача отыскания ограничений, которые следует наложить на свободные множители, базовую группу и объединенные или связанные подгруппы, а также на класс $\mathcal{C}$ для того, чтобы достаточные условия, указанные в предложениях 1 и 2, оказались и необходимыми для аппроксимируемости классом $\mathcal{C}$.

Изучением данного и подобных ему вопросов занимались разные авторы (например, [8], лемма 8; [5], предложение 2.7; [6], предложение 3.4), но наиболее существенными являются результаты, полученные М. Ширвани [9], [10]. В его работах рассматриваются более общие свободные конструкции. Приведем их определения.

Пусть $\mathcal{J}$ — непустое множество, B — некоторая группа и $\{K_j, K_{-j} \mid j \in \mathcal{J}\}$ — семейство подгрупп группы B. Пусть также для любого $j \in \mathcal{J}$ существует изоморфизм $\psi_j : K_j \to K_{-j}$. Тогда *HNN-расширением группы* B *с семейством проходных букв* t_j $(j \in \mathcal{J})$ называется группа

$$G = \langle B, t_j;\ t_j^{-1} K_j t_j = K_{-j},\ \psi_j\ (j \in \mathcal{J})\rangle, \tag{5}$$

образующими которой являются все образующие группы B и буквы t_j $(j \in \mathcal{J})$, а определяющими соотношениями — соотношения группы B и всевозможные соотношения вида $t_j^{-1} k t_j = k\psi_j$, где $j \in \mathcal{J}$, $k \in K_j$.

Пусть $\mathcal{I}$ — множество, содержащее хотя бы два элемента, A_i $(i \in \mathcal{I})$ — некоторые группы. Пусть также в каждой группе A_i фиксирована подгруппа H_i и существуют изоморфизмы $\varphi_{ij} : H_i \to H_j$, удовлетворяющие условиям $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ и $\varphi_{ij}\varphi_{ji} = \varphi_{ii} = \mathrm{id}_{H_i}$ для всех $i, j, k \in \mathcal{I}$. Тогда *обобщенным свободным произведением групп* A_i $(i \in \mathcal{I})$ *с подгруппами* H_i, *объединенными относительно изоморфизмов* φ_{ij}, называется группа

$$F = \langle *A_i;\ H_i = H_j,\ \varphi_{ij}\ (i, j \in \mathcal{I})\rangle, \tag{6}$$

образующими которой являются образующие групп A_i $(i \in \mathcal{I})$, а определяющими соотношениями — соотношения групп A_i, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{ij} = h$, где $i, j \in \mathcal{I}$, $h \in H_i$.

Отметим, что в группе F все подгруппы H_i, $i \in \mathcal{I}$, совпадают. Поэтому данную конструкцию называют также *обобщенным свободным произведением семейства групп* $\{A_i, i \in \mathcal{I}\}$ *с одной объединенной подгруппой.*

Предложение 3 ([10], теоремы 1–3)**.** *Пусть G — HNN-расширение вида* (5)*, и пусть для некоторого $j \in \mathcal{J}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(a) *$K_j = K_{-j}$ и изоморфизм ψ_j, оказывающийся в данном случае автоморфизмом подгруппы K_j, имеет конечный порядок*;

(b) *$K_j = K_{-j}$ и подгруппа K_j удовлетворяет нетривиальному тождеству*;

(c) *подгруппы K_j и K_{-j} собственным образом содержатся в подгруппе $D \leq B$, удовлетворяющей нетривильному тождеству.*

Тогда условия

$$\bigcap_{N \in \mathcal{F}^*(G,B)} N = 1, \qquad \bigcap_{N \in \mathcal{F}^*(G,B)} K_{\varepsilon j}N = K_{\varepsilon j} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, необходимы для финитной аппроксимируемости G.

Предложение 4 ([9], теорема 2)**.** *Пусть F — обобщенное свободное произведение вида* (6)*, для каждого $i \in \mathcal{I}$ подгруппа H_i содержится в группе A_i собственным образом и хотя бы две из групп A_i, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяют нетривиальному тождеству. Тогда условия*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{F}^*(F,A_i)} N = 1 \quad (i \in \mathcal{I}), \qquad \bigcap_{N \in \mathcal{F}^*(F,A_i)} H_iN = H_i \quad (i \in \mathcal{I}),$$

где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, необходимы для финитной аппроксимируемости группы F.

Заметим, что если группа X удовлетворяет тождеству $v(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$, а группа Y — тождеству $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1$, то каждая из них удовлетворяет и тождеству

$$[v(x_1, x_2, \ldots, x_m), w(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = 1.$$

Поэтому можно считать, что тождество, которому согласно условию предложения 4 удовлетворяют некоторые две из групп A_i, — одно и то же.

В данной работе получены следующие обобщения предложений 3 и 4.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, G — HNN-расширение вида* (5)*. Если группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то имеют место следующие утверждения*:

1) *справедливо равенство*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G,B)} N = 1;$$

2) *если для некоторого $j \in \mathcal{J}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

   (a) *$K_j = K_{-j}$ и автоморфизм ψ_j имеет конечный порядок*;

   (b) *$K_j = K_{-j}$ и подгруппа K_j удовлетворяет нетривиальному тождеству*;

(c) *подгруппы* K_j *и* K_{-j} *собственным образом содержатся в подгруппе* $D \leq B$, *удовлетворяющей нетривильному тождеству*;

то имеет место равенство

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G,B)} K_{\varepsilon j} N = K_{\varepsilon j} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— произвольный класс групп,* F *— обобщенное свободное произведение вида* (6), *для каждого* $k \in \mathcal{I}$ *подгруппа* H_k *содержится в группе* A_k *собственным образом и хотя бы две группы* A_i *и* A_j, $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$, *удовлетворяют нетривиальному тождеству. Если группа* F $\mathcal{C}$*-аппроксимируема, то имеют место следующие утверждения.*

1) $\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_k)} N = 1$ *для каждого* $k \in \mathcal{I}$;
2) $\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_k)} H_k N = H_k$ *для каждого* $k \in \mathcal{I} \setminus \{i, j\}$;
3) *если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:
   (a) $\mathbb{Z}_2 \in \mathcal{C}$;
   (b) $[A_i : H_i] > 2$ *или* $[A_j : H_j] > 2$;
   (c) *существует такое* $\ell \in \mathcal{I} \setminus \{i, j\}$, *что группа* A_ℓ *удовлетворяет нетривиальному тождеству или подгруппа* H_ℓ *нормальна в* A_ℓ;

то

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_i)} H_i N = H_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_j)} H_j N = H_j.$$

Как уже было отмечено выше, описания семейств $\mathcal{C}^*(G, B)$ и $\mathcal{C}^*(F, A_i)$, $i \in \mathcal{I}$, имеются не для каждого класса групп $\mathcal{C}$. Однако, даже когда они неизвестны, но класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, теоремы 1 и 2 все равно дают полезную информацию, утверждая, что подгруппы K_j, K_{-j} и H_i, $i \in \mathcal{I}$, являются $\mathcal{C}$-отделимыми в базовой группе и в свободных множителях соответственно.

Напомним, что согласно общему определению из [11] подгруппа Y группы X называется $\mathcal{C}$*-отделимой* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, причем $x\sigma \notin Y\sigma$. Если класс $\mathcal{C}$ совпадает с классом всех конечных групп, то $\mathcal{C}$-отделимость, как и $\mathcal{C}$-аппроксимируемость, называется *финитной*.

Так как ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathcal{C}$ исчерпываются подгруппами из семейства $\mathcal{C}^*(X)$, то подгруппа Y является $\mathcal{C}$-отделимой в группе X тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = Y$.

Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то для любой подгруппы Z группы X и для любой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(X)$ из соотношений $Z/Z \cap N \cong ZN/N \leq X/N \in \mathcal{C}$ следует, что $Z/Z \cap N \in \mathcal{C}$ и потому $Z \cap N \in \mathcal{C}^*(Z)$. Таким образом, $\mathcal{C}^*(X, Z) \subseteq \mathcal{C}^*(Z)$ и, если $Y \leq Z$, то из равенства $\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(X,Z)} YN = Y$ вытекает $\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(Z)} YN = Y$, т. е. подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе Z. Выбирая теперь G, $K_{\pm j}$, B или F, H_i, A_i в качестве X, Y и Z соответственно, получаем утверждение о $\mathcal{C}$-отделимости подгрупп K_j, K_{-j} и H_i, сформулированное выше.

В заключение данного раздела приведем упоминавшийся ранее пример, который показывает, что условия (2) и (4), вообще говоря, не являются необходимыми для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости групп F и G.

Пример. Группа $X = \langle t, a, b; t^{-1}at = b^n \rangle$ представляет собой HNN-расширение свободной группы $\langle a, b \rangle$ с циклическими связанными подгруппами $\langle a \rangle$, $\langle b^n \rangle$ и одновременно свободное произведение свободной группы $\langle t, a \rangle$ и бесконечной циклической группы $\langle b \rangle$ с циклическими объединенными подгруппами $\langle t^{-1}at \rangle$, $\langle b^n \rangle$. Так как подгруппа $\langle t^{-1}at \rangle$ изолирована в группе $\langle t, a \rangle$, то в силу [12] группа X аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп для любого простого числа p. Но если n взаимно просто с p, то, как легко видеть, при любом гомоморфизме σ группы $\langle b \rangle$ на конечную p-группу имеет место включение $b\sigma \in \langle b^n \rangle \sigma$ и потому подгруппа $\langle b^n \rangle$ не является $\mathcal{F}_p$-отделимой в группах $\langle a, b \rangle$ и $\langle b \rangle$. С учетом сделанного выше замечания это означает, что группа X не обладает свойствами (2) и (4).

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в разделах 2 и 3 соответственно. Раздел 1 содержит некоторые вспомогательные понятия и утверждения. В заключительном разделе обсуждается возможность усиления теоремы 2.

1. Вспомогательные утверждения

Если $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп и Y — подгруппа некоторой группы X, то подгруппу

$$\overline{Y} = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN$$

будем называть *$\mathcal{C}$-замыканием* подгруппы Y в X. Легко видеть, что $\mathcal{C}$-замыкание $\overline{Y}$ представляет собой наименьшую $\mathcal{C}$-отделимую подгруппу группы X, содержащую Y.

Действительно, как уже было отмечено во введении, некоторая подгруппа Z группы X является $\mathcal{C}$-отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$Z = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} ZN.$$

Отсюда следует, что если подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима в группе X и $Y \leq Z$, то

$$\overline{Y} = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN \leq \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} ZN = Z.$$

Остается заметить, что для любой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(X)$

$$\overline{Y}N = \Big(\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(X)} YM \Big) N \leq (YN)N = YN.$$

Поэтому

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} \overline{Y}N \leq \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = \overline{Y},$$

и, таким образом, подгруппа $\overline{Y}$ сама является $\mathcal{C}$-отделимой в группе X.

Справедливость следующего предложения установлена в [13], однако здесь оно приводится с полным доказательством ввиду краткости последнего и труднодоступности источника.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп. Если группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и подгруппа $Y \leq X$ удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству*

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1,$$

то $\mathcal{C}$-замыкание подгруппы Y в группе X также удовлетворяет этому тождеству.

Доказательство. Действительно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные элементы $\mathcal{C}$-замыкания $\overline{Y}$ подгруппы Y в группе X и $x = w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как $\overline{Y} = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN$, то для любого гомоморфизма σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ имеют место включения $x_1\sigma, x_2\sigma, \ldots, x_n\sigma \in Y\sigma$ и, следовательно, $x\sigma = w(x_1\sigma, x_2\sigma, \ldots, x_n\sigma) = 1$. Отсюда ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X вытекает $x = 1$. □

Предложение 6 ([10], лемма 2). *Пусть группа X удовлетворяет нетривиальному тождеству. Тогда X удовлетворяет нетривиальному тождеству*

$$w(y, x_1, x_2) = w_0(x_1, x_2)y^{\varepsilon_1}w_1(x_1, x_2)\dots y^{\varepsilon_n}w_n(x_1, x_2), \tag{7}$$

где $n \geq 1$, $\varepsilon_r = \pm 1$ и $w_0(x_1, x_2), \dots, w_n(x_1, x_2) \in \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, (x_1x_2^{-1})^{\pm 1}\}$.

Пусть далее G — HNN-расширение вида (5), F — обобщенное свободное произведение вида (6). Напомним, что запись элемента $g \in G$ в виде $g = g_0t_{j_1}^{\varepsilon_1}g_1\dots g_{n-1}t_{j_n}^{\varepsilon_n}g_n$, где $g_0, \dots, g_n \in B$, $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{J}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и $n \geq 0$, называется *приведенной*, если в ней не встречаются подряд элементы $t_j^{-\varepsilon}$, g, t_j^{ε}, где $j \in \mathcal{J}$, $\varepsilon = \pm 1$, $g \in K_{\varepsilon j}$. Число n называется *длиной* данной приведенной записи.

Напомним также, что запись элемента $f \in F$ в виде $f = f_1f_2\dots f_n$ $(n \geq 1)$ называется *несократимой*, если каждый элемент f_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, лежит в одном из свободных множителей A_{i_k}, причем соседние элементы f_k, f_{k+1} не лежат в одном и том же свободном множителе. Как и выше, число n называется *длиной* данной несократимой записи.

Следующие два утверждения могут быть выведены из леммы Бриттона для HNN-расширений с одной проходной буквой (например, [14], гл. IV, § 2) и из теоремы о нормальной форме для обобщенных свободных произведений двух групп (например, [15], следствие 4.4.1).

Предложение 7. *Всякий элемент $g \in G$, обладающий хотя бы одной приведенной записью длины, большей нуля, отличен от единицы в группе G.*

Предложение 8. *Всякий элемент $f \in F$, обладающий хотя бы одной несократимой записью длины, большей единицы, отличен от единицы в группе F.*

Пользуясь предложениями 7 и 8, нетрудно показать, что все приведенные (несократимые) записи, которыми обладает один и тот же элемент x, имеют одинаковую длину. Далее будем называть ее просто *длиной элемента x*.

Еще одно необходимое нам свойство группы F доставляет

Предложение 9. *Если для некоторого $k \in \mathcal{I}$ имеет место равенство $[A_k : H_k] = 2$, то существует гомоморфизм группы F на группу $\mathbb{Z}_2$, продолжающий естественный гомоморфизм группы A_k на фактор-группу A_k/H_k.*

Доказательство. Действительно, пусть отображение ρ порождающих группы F в фактор-группу A_k/H_k задано правилом $a\rho = aH_k$, если a — порождающий группы A_k, и $a\rho = 1$ в противном случае. Продолжая ρ до отображения слов, видно, что оно переводит все определяющие соотношения группы F в равенства, верные в группе A_k/H_k, и потому определяет гомоморфизм группы F на группу $A_k/H_k \cong \mathbb{Z}_2$, действующий на группе A_k так же, как и естественный гомоморфизм этой группы на фактор-группу A_k/H_k. □

2. Доказательство теоремы 1

Как уже было отмечено во введении, $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы G равносильна равенству $\bigcap\limits_{M \in \mathcal{C}^*(G)} M = 1$. Отсюда

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G,B)} N = \bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(G)} (M \cap B) = \Big(\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(G)} M\Big) \cap B = 1,$$

и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) будем доказывать от противного. Предположим, что для некоторого $j \in \mathcal{J}$ выполнено одно из условий (a)–(c), но существует такое ε, что $K_{\varepsilon j} \neq \bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(G,B)} K_{\varepsilon j}N$.

Без потери общности (меняя местами K_j и K_{-j} и заменяя t_j на t_j^{-1}, а ψ_j на ψ_j^{-1}) можно считать, что $\varepsilon = 1$. Тогда существует элемент $b \in \Big(\bigcap\limits_{N \in \mathcal{C}^*(G,B)} K_jN\Big) \setminus K_j$.

Для завершения доказательства достаточно указать такой неединичный элемент $g \in G$, что $g \in N$ для каждой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(G)$. Это будет противоречить $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G.

Заметим, что если $N \in \mathcal{C}^*(G)$, то $N \cap B \in \mathcal{C}^*(G,B)$ и потому $b \in K_j(N \cap B)$. Отсюда $b \equiv k \pmod N$ для некоторого $k \in K_j$. Дальнейшее рассуждение зависит от того, какое из условий (a)–(c) имеет место.

(a) $K_j = K_{-j}$ и автоморфизм ψ_j имеет конечный порядок.

Пусть порядок ψ_j равен $m \geq 1$. Определим элемент $g = [b, t_j^{-m}bt_j^m] = b^{-1}t_j^{-m}b^{-1}t_j^mbt_j^{-m}bt_j^m$. Поскольку $b \notin K_j = K_{-j}$, то указанная запись элемента g является приведенной и имеет длину, большую нуля. Следовательно, по предложению 7 g отличен от единицы.

Пусть $N \in \mathcal{C}^*(G)$ — произвольная подгруппа и $k \in K_j$ — такой элемент, что $b \equiv k \pmod N$. Так как ψ_j имеет конечный порядок, равный m, то ψ_j^m переводит все элементы из K_j в себя. Тогда $g = [b, t_j^{-m}bt_j^m] \equiv [k, t_j^{-m}kt_j^m] = [k, k\psi_j^m] = [k,k] = 1 \pmod N$, что и требовалось.

(b) $K_j = K_{-j}$ и подгруппа K_j удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Из предложения 6 следует, что подгруппа K_j удовлетворяет нетривиальному тождеству вида (7). Определим элемент

$$g = w(b, t_j^{-1}bt_j, t_j^{-2}bt_j^2) = w_0(t_j^{-1}bt_j, t_j^{-2}bt_j^2)b^{\varepsilon_1} \ldots b^{\varepsilon_n}w_n(t_j^{-1}bt_j, t_j^{-2}bt_j^2).$$

Согласно предложению 6 элемент $w_r(t_j^{-1}bt_j, t_j^{-2}bt_j^2)$, $r \in \{0, \ldots, n\}$, имеет вид $(t_j^{-1}bt_j)^{\pm 1}$ или $(t_j^{-2}bt_j^2)^{\pm 1}$, или $(t_j^{-1}bt_j^{-1}bt_j^2)^{\pm 1}$. Поскольку $b \notin K_j = K_{-j}$, то каждая из этих записей приведена и имеет ненулевую длину, а также начинается на $t_j^{-m_1}$ и заканчивается на $t_j^{m_2}$, где $m_1, m_2 \in \{1, 2\}$. Поэтому элемент g имеет ненулевую длину и по предложению 7 отличен от единицы.

Пусть снова $N \in \mathcal{C}^*(G)$ — произвольная подгруппа и $k \in K_j$ — такой элемент, что $b \equiv k \pmod N$. Поскольку $k^{t_j} \in K_j^{t_j} = K_{-j} = K_j$, $k^{t_j^2} \in K_j^{t_j^2} = K_j$ и подгруппа K_j удовлетворяет тождеству w, то $w(k, k^{t_j}, k^{t_j^2}) = 1$. Таким образом, $g \equiv w(k, k^{t_j}, k^{t_j^2}) = 1 \pmod N$, что и требовалось.

(c) Подгруппы K_j и K_{-j} собственным образом содержатся в подгруппе $D \leq B$, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Из предложения 6 следует, что D удовлетворяет нетривиальному тождеству вида (7). Рассмотрим три взаимоисключающих случая:

1) $[D : K_{-j}] \geq 3$,
2) $[D : K_{-j}] = 2$ и $[D : K_j] \geq 3$,
3) $[D : K_{-j}] = 2$ и $[D : K_j] = 2$.

1) Пусть элементы $1, d_1, d_2$ являются представителями различных правых смежных классов группы D по подгруппе K_{-j}. Определим элемент

$$g = w(t_j^{-1}bt_j, d_1, d_2) = w_0(d_1, d_2)t_j^{-1}b^{\varepsilon_1}t_j \ldots t_j^{-1}b^{\varepsilon_n}t_jw_n(d_1, d_2).$$

Элементы d_1, d_2 принадлежат множеству представителей правых смежных классов группы D по подгруппе K_{-j} и отличны от единицы, следовательно, $d_1^{\pm 1}$, $d_2^{\pm 1}$, $(d_1d_2^{-1})^{\pm 1} \notin K_{-j}$. Так как $w_r(d_1, d_2) \in \{d_1^{\pm 1}, d_2^{\pm 1}, (d_1d_2^{-1})^{\pm 1}\}$ для всех $r \in \{0, \ldots, n\}$, то отсюда вытекает

$w_r(d_1, d_2) \notin K_{-j}$. Таким образом, $w_r(d_1, d_2) \in B \setminus K_{-j}$, $b \in B \setminus K_j$. Значит, запись элемента g приведена и имеет длину, бо́льшую нуля, откуда в силу предложения 7 следует, что данный элемент отличен от единицы.

Пусть снова $N \in \mathcal{C}^*(G)$ — произвольная подгруппа и $k \in K_j$ — такой элемент, что $b \equiv k \pmod N$. Тогда $g \equiv w(t_j^{-1} k t_j, d_1, d_2) = w(k\psi_j, d_1, d_2) = 1 \pmod N$, так как $k\psi_j \in K_{-j} \leq D$ и подгруппа D удовлетворяет тождеству w.

2) Пусть элементы 1, d_1, d_2 являются представителями различных правых смежных классов группы D по подгруппе K_j. Пусть $d \in D \setminus K_{-j}$ и $g_1 = (t_j d t_j^{-1})^{-1} b (t_j d t_j^{-1})$.

Очевидно, что указанная запись элемента g_1 приведена. Определим элемент

$$g = w(g_1, d_1, d_2) = w_0(d_1, d_2) g_1^{\varepsilon_1} \dots g_1^{\varepsilon_n} w_n(d_1, d_2).$$

Как и в первом случае, из того, что элементы d_1, d_2 принадлежат множеству представителей правых смежных классов группы D по подгруппе K_j и отличны от единицы, следует, что $w_r(d_1, d_2) \notin K_j$ для всех $r \in \{0, \dots, n\}$. Поскольку элемент $g_1^{\pm 1}$ имеет приведенную запись длины, большей нуля, начинающуюся на t_j и заканчивающуюся на t_j^{-1}, то запись элемента g также является приведенной и по предложению 7 g отличен от единицы.

Пусть подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ и элемент $k \in K_j$ определены, как и выше. Тогда $t_j^{-1} b t_j \equiv t_j^{-1} k t_j = k\psi_j \pmod N$. Так как $[D : K_{-j}] = 2$, то подгруппа K_{-j} нормальна в D. Поэтому $d^{-1}(k\psi_j) d \in K_{-j}$ и $t_j (d^{-1}(k\psi_j) d) t_j^{-1} \in K_j$. Таким образом,

$$g_1 \equiv t_j d^{-1}(k\psi_j) d t_j^{-1} \in K_j \pmod N \quad \text{и} \quad g = w(g_1, d_1, d_2) \equiv 1 \pmod N.$$

3) Поскольку подгруппа D удовлетворяет нетривиальному тождеству, то по предложению 5 ее $\mathcal{C}$-замыкание $\overline{D}$ в группе G удовлетворяет тому же нетривиальному тождеству. Поэтому с самого начала можно было считать, что $D = \overline{D} \cap B$. Поскольку подгруппа K_j содержится в подгруппе D, то ее $\mathcal{C}$-замыкание $\overline{K}_j$ в группе G содержится в $\overline{D}$. Так как $b \in \overline{K}_j$, то из этого следует, что $b \in \overline{D}$. Пусть d — некоторый элемент из $D \setminus K_{-j}$. Определим элемент

$$g = w(d, t_j^{-1} b t_j, t_j^{-2} b t_j^2) = w_0(t_j^{-1} b t_j, t_j^{-2} b t_j^2) d^{\varepsilon_1} \dots d^{\varepsilon_n} w_n(t_j^{-1} b t_j, t_j^{-2} b t_j^2).$$

Как и при рассмотрении условия (b), проверяется, что элемент g имеет ненулевую длину и потому отличен от единицы.

Пусть снова подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ и элемент $k \in K_j$ определены как и выше. Так как

$$K_j \leq \overline{K}_j \cap B \leq \overline{D} \cap B = D,$$

$[D : K_j] = 2$ и $K_j \neq \overline{K}_j \cap B$ (поскольку $b \in (\overline{K}_j \cap B) \setminus K_j$), то $\overline{K}_j \cap B = D$. Отсюда вытекает $K_{-j} \leq D \leq \overline{K}_j \leq K_j N$. Следовательно, для некоторого $k_1 \in K_j$

$$t_j^{-1} k t_j = k\psi_j \equiv k_1 \pmod N \quad \text{и} \quad t_j^{-2} k t_j^2 \equiv k_1 \psi_j \pmod N.$$

Так как $k\psi_j$, $k_1\psi_j \in K_{-j} \leq D$, то $g \equiv w(d, k\psi_j, k_1\psi_j) = 1 \pmod N$. Полученное сравнение и следующее из него противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 2

Утверждение 1) доказывается так же, как и в теореме 1: поскольку группа F $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то $\bigcap\limits_{M \in \mathcal{C}^*(F)} M = 1$ и потому для каждого $k \in \mathcal{I}$

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F, A_k)} N = \bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(F)} (M \cap A_k) = \Bigl(\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(F)} M \Bigr) \cap A_k = 1.$$

Утверждения 2) и 3) будем доказывать одновременно от противного. Предположим, что $H_k \neq \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_k)} H_k N$ для некоторого $k \in \mathcal{I}$. Тогда существует элемент

$$h \in \Big(\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F,A_k)} H_k N\Big) \setminus H_k.$$

Заметим, что если N — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{C}^*(F)$, то $N \cap A_k \in \mathcal{C}^*(F, A_k)$ и потому $h \in H_k(N \cap A_k) \leq H_k N$.

Лемма 1. *Если для некоторого $s \in \mathcal{I}$, отличного от k, группа A_s удовлетворяет нетривиальному тождеству, то $[A_s : H_s] = 2$.*

Доказательство. Предположим противное: $[A_s : H_s] \geq 3$. Пусть элементы 1, a_1, a_2 являются представителями различных правых смежных классов группы A_s по подгруппе H_s. По предложению 6 A_s удовлетворяет нетривиальному тождеству вида (7). Определим элемент

$$f = w(h, a_1, a_2) = w_0(a_1, a_2) h^{\varepsilon_1} \ldots h^{\varepsilon_n} w_n(a_1, a_2).$$

Так как элементы a_1, a_2 принадлежат множеству представителей правых смежных классов группы A_s по подгруппе H_s и отличны от единицы, то $a_1^{\pm 1}$, $a_2^{\pm 1}$, $(a_1 a_2^{-1})^{\pm 1} \notin H_s$ и потому $w_r(a_1, a_2) \notin H_s$ для всех $r \in \{0, \ldots, n\}$. Отсюда и из соотношения $h \in A_k \setminus H_k$ следует, что элемент f имеет несократимую запись длины $2n+1$ и $f \neq 1$ по предложению 8.

Пусть $N \in \mathcal{C}^*(F)$ — произвольная подгруппа. Тогда $h \in H_k N$. Изоморфизм φ_{ks} отождествляет подгруппы H_k и H_s в группе F. Следовательно, $H_k N = H_s N \subseteq A_s N$ и, поскольку группа A_s удовлетворяет тождеству w, то $fN \in w(A_s)N = 1$.

Таким образом, нашли элемент $f \in F$, отличный от единицы и такой, что $fN = 1$ для каждой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(F)$. Получаем противоречие с $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы F, доказывающее, что $[A_s : H_s] = 2$. $\square$

Лемма 2. *Если индексы $r \in \mathcal{I}$, $s \in \mathcal{I}$, k попарно различны, то подгруппа H_r не является нормальной в группе A_r или подгруппа H_s не является нормальной в группе A_s.*

Доказательство. Предположим противное: индексы r, s, k попарно различны, подгруппа H_r нормальна в группе A_r и подгруппа H_s нормальна в группе A_s. По условию теоремы найдется такое $i \in \mathcal{I}$, что группа A_i удовлетворяет нетривиальному тождеству. Тому же тождеству удовлетворяет и ее подгруппа H_i. Изоморфизм φ_{ik} отождествляет подгруппы H_i и H_k. Значит, подгруппа H_k также удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 6 можно считать имеющим вид (7). Возьмем произвольные элементы $b_r \in A_r \setminus H_r$, $b_s \in A_s \setminus H_s$ и определим

$$f = w(h, h^{b_r}, h^{b_s}) = w_0(h^{b_r}, h^{b_s}) h^{\varepsilon_1} \ldots h^{\varepsilon_n} w_n(h^{b_r}, h^{b_s}).$$

Согласно предложению 6 элемент $w_r(h^{b_r}, h^{b_s})$, $r \in \{0, \ldots, n\}$, имеет вид $(b_r^{-1} h b_r)^{\pm 1}$ или $(b_s^{-1} h b_s)^{\pm 1}$, или $(b_r^{-1} h b_r b_s^{-1} h^{-1} b_s)^{\pm 1}$. Так как $b_r^{\pm 1} \in A_r \setminus H_r$, $b_s^{\pm 1} \in A_s \setminus H_s$, $h \in A_k \setminus H_k$ и индексы k, r, s попарно различны, то каждая из приведенных выше возможных записей элемента w_r несократима. Следовательно, элемент f имеет несократимую запись длины, большей единицы, и по предложению 8 отличен от единицы.

Пусть снова $N \in \mathcal{C}^*(F)$ — произвольная подгруппа. Тогда $hN \in H_k N$ и $h^{b_r} N \in H_k^{b_r} N = H_r^{b_r} N$. Так как подгруппа H_r нормальна в группе A_r, то $H_r^{b_r} N = H_r N$ и $h^{b_r} N \in H_r N = H_k N$. Аналогично, $h^{b_s} N \in H_s^{b_s} N = H_s N = H_k N$. Следовательно, $fN \in H_k N$, откуда $fN \in w(H_k) N = 1$. Как и в лемме 1, получаем противоречие с $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы F. $\square$

Лемма 3. *Группа A_k удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Доказательство. Предположим противное: группа A_k не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. В этом случае по условию теоремы найдутся такие $i, j \in \mathcal{I} \setminus \{k\}$, что $i \neq j$ и группы A_i и A_j удовлетворяют нетривиальному тождеству. Тогда по лемме 1 $[A_i : H_i] = 2 = [A_j : H_j]$. Но в этом случае подгруппа H_i нормальна в группе A_i и подгруппа H_j нормальна в группе A_j, что противоречит лемме 2. □

Лемма 4. *Индекс* $[A_k : H_k]$ *равен двум.*

Доказательство. Пусть $j \in \mathcal{I}$ таково, что $j \neq k$ и группа A_j также удовлетворяет нетривиальному тождеству (существование такого j обеспечивается условием теоремы). Тогда $[A_j : H_j] = 2$ в силу леммы 1. Покажем, что индекс $[A_k : H_k]$ также равен двум.

Предположим противное, и пусть элементы 1, a_1, a_2 являются представителями различных правых смежных классов группы A_k по подгруппе H_k. Согласно лемме 3 группа A_k удовлетворяет нетривиальному тождеству. В силу предложения 6 можно считать, что группа A_k удовлетворяет тождеству вида (7). Выберем произвольный элемент $b \in A_j \setminus H_j$ и определим элемент $f = w(h^b, a_1, a_2) = w_0(a_1, a_2)b^{-1}h^{\varepsilon_1}b \ldots b^{-1}h^{\varepsilon_n}bw_n(a_1, a_2)$.

Как и при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что $f \neq 1$.

Пусть опять $N \in \mathcal{C}^*(F)$ — произвольная подгруппа. Так как изоморфизм φ_{kj} отождествляет подгруппы H_k и H_j в группе F, то $H_k^b N = H_j^b N$. Поскольку $[A_j : H_j] = 2$, то $H_j \trianglelefteq A_j$. Поэтому $H_j^b N = H_j N = H_k N \subseteq A_k N$ и $fN \in w(A_k)N$, а значит, $fN = 1$. Получаем противоречие с $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы F, из которого следует $[A_k : H_k] = 2$. □

Предположим теперь, что $k \in \mathcal{I} \setminus \{i, j\}$. Тогда по лемме 1 $[A_i : H_i] = 2 = [A_j : H_j]$. Следовательно, подгруппы H_i, H_j нормальны в группах A_i, A_j соответственно и получаем противоречие с леммой 2.

Таким образом, утверждение 2 доказано. Перейдем к утверждению 3, т. е. рассмотрим случай, когда k совпадает с одним из элементов i, j. Как и при доказательстве теоремы 1, дальнейшее рассуждение будет зависить от того, какое из условий (a)–(c) имеет место.

(a) Группа $\mathbb{Z}_2$ содержится в классе $\mathcal{C}$.

Так как в силу леммы 4 $[A_k : H_k] = 2$, то по предложению 9 существует гомоморфизм $\rho : F \to \mathbb{Z}_2$, продолжающий естественный гомоморфизм группы A_k на фактор-группу A_k/H_k. Поскольку группа $\mathbb{Z}_2$ принадлежит классу $\mathcal{C}$, то $\ker \rho \in \mathcal{C}^*(F)$. Но $\ker \rho \cap A_k = H_k$. Поэтому $H_k \in \mathcal{C}^*(F, A_k)$ и получаем противоречие с предположением о том, что

$$H_k \neq \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(F, A_k)} H_k N.$$

(b) Существует такое $s \in \{i, j\}$, что $[A_s : H_s] > 2$.

Если $s = k$, то получаем противоречие с леммой 4, если же $s \neq k$ — то с леммой 1.

(c) Существует такое $\ell \in \mathcal{I} \setminus \{i, j\}$, что группа A_ℓ удовлетворяет нетривиальному тождеству или подгруппа H_ℓ нормальна в A_ℓ.

Заметим, что подгруппа H_ℓ в любом случае нормальна в группе A_ℓ: если группа A_ℓ удовлетворяет нетривиальному тождеству, это следует из леммы 1, так как $\ell \notin \{i, j\}$ и $k \in \{i, j\}$.

Согласно леммам 1 и 4 подгруппа H_i нормальна в группе A_i и подгруппа H_j нормальна в группе A_j. Тем самым, получаем противоречие с леммой 2 и теорема доказана.

Заключение

Теорема 2 распространяет предложение 4 на случай *произвольного* класса групп $\mathcal{C}$ только в случае, когда выполнено хотя бы одно из условий (b) или (c). Если же это не так (в частности, если свободных множителей всего два — A_i и A_j), то данная теорема решает задачу о необходимости условий

$$\bigcap_{N\in\mathcal{C}^*(F,A_i)} H_iN = H_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{N\in\mathcal{C}^*(F,A_j)} H_jN = H_j$$

только в случае, когда $\mathbb{Z}_2 \in \mathcal{C}$.

Предложение 10. *Пусть F — обобщенное свободное произведение вида* (6) *и для некоторого $k \in \mathcal{I}$ имеет место равенство* $[A_k : H_k] = 2$.

1) *Если $\mathbb{Z}_2 \in \mathcal{C}$, то*

$$\bigcap_{N\in\mathcal{C}^*(F,A_k)} H_kN = H_k. \tag{8}$$

2) *Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, то верно и обратное.*

Доказательство. Утверждение 1) проверяется с помощью тех же рассуждений, которые использовались при доказательстве теоремы 2. Поскольку $[A_k : H_k] = 2$, то по предложению 9 существует гомоморфизм $\rho : F \to \mathbb{Z}_2$, продолжающий естественный гомоморфизм группы A_k на фактор-группу A_k/H_k. Так как группа $\mathbb{Z}_2$ принадлежит классу $\mathcal{C}$, то $\ker\rho \in \mathcal{C}^*(F)$. Вместе с тем, $\ker\rho \cap A_k = H_k$, откуда $H_k \in \mathcal{C}^*(F, A_k)$ и потому имеет место равенство (8).

Докажем второе утверждение. Так как $[A_k : H_k] = 2$, то из равенства (8) вытекает существование такой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(F)$, что $(M \cap A_k)H_k = H_k$. Легко видеть, что тогда $M \cap A_k \leq H_k$ и потому $A_k/H_k \cong (A_k/M \cap A_k)/(H_k/M \cap A_k)$. Так как $A_k/M \cap A_k \cong A_kM/M \leqslant F/M \in \mathcal{C}$, то в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп отсюда вытекает $A_k/H_k \in \mathcal{C}$. Остается заметить, что $[A_k : H_k] = 2$ и потому $\mathbb{Z}_2 \cong A_k/H_k \in \mathcal{C}$. □

Таким образом, если $[A_i : H_i] = 2 = [A_j : H_j]$ и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, то равенства

$$\bigcap_{N\in\mathcal{C}^*(F,A_i)} H_iN = H_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{N\in\mathcal{C}^*(F,A_j)} H_jN = H_j$$

выполняются одновременно и равносильны включению $\mathbb{Z}_2 \in \mathcal{C}$. Однако непонятно, является ли данное включение необходимым условием $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы F. В частности, может быть поставлена

Проблема. Существует ли обобщенное свободное произведение двух групп с объединенными подгруппами, имеющими индекс 2 в свободных множителях, которое аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп для некоторого простого числа $p > 2$?

Авторы выражают благодарность участникам семинара по теории групп под руководством профессора Д.И. Молдаванского за ряд ценных советов и замечаний.

Литература

[1] Baumslag G. *On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (2), 193–209 (1963).

[2] Baumslag B., Tretkoff M. *Residually finite HNN-extensions*, Comm. Algebra **6** (2), 179–194 (1978).

[3] Логинова Е.Д. *Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами*, Сиб. матем. журн. **40** (2), 395–407 (1999).

[4] Молдаванский Д.И. *Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений*, Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”, № 3, 129–140 (2000).

[5] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением*, Изв. вузов. Матем., № 10, 27–44 (2015).

[6] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп*, Модел. и анализ информ. систем **21** (4), 148–180 (2014).
[7] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп*, Матем. заметки **95** (4), 605–614 (2014).
[8] Азаров Д.Н. *Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 249–264 (2015).
[9] Shirvani M. *A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (3), 703–706 (1988).
[10] Shirvani M. *On residually finite HNN-extensions*, Arch. Math. **44** (2), 110–115 (1985).
[11] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та **18** (5), 49–60 (1958).
[12] Baumslag G. *On the residual nilpotence of certain one-relator groups*, Communs. Pure and Appl. Math. **21** (5), 491–506 (1968).
[13] Соколов Е.В. *Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук (Ивановск. гос. ун-т, Иваново, 2003).
[14] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп* (Мир, М., 1980).
[15] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп* (Наука, М., 1974).

А.Е. Куваев

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,

e-mail: alexander@kuvaev.me

Е.В. Соколов

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

A.E. Kuvaev and E.V. Sokolov

Necessary conditions of the approximability of generalized free products and HNN-extensions

Abstract. We obtain a generalization of Shirvani results on necessary conditions of the residual finiteness of generalized free products and HNN-extensions for the case of the property “to be residually a $\mathcal{C}$-group”, where $\mathcal{C}$ is an arbitrary class of groups.

Keywords: residual properties, free product of groups with one amalgamated subgroup, multiple HNN-extension.

A.E. Kuvaev

Ivanovo State University,
39 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

e-mail: alexander@kuvaev.me

E.V. Sokolov

Ivanovo State University,
39 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru