Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2019. Том 60, № 6

УДК 512.543

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕТИКО–ГРУППОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А. Е. Куваев

Аннотация. Пусть G — граф групп, каждая вершинная группа графа G локально удовлетворяет нетривиальному тождеству, каждая реберная подгруппа графа G собственным образом содержится в соответствующих вершинных группах и имеет по крайней мере в одной из них индекс, больший 2. Доказано, что если фундаментальная группа F графа G локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что каждая реберная подгруппа p'-изолирована в соответствующих вершинных группах. Доказано также, что если F — свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой или HNN-расширение с множеством проходных букв, то тот же результат имеет место и без ограничений на индексы реберных подгрупп.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.612

Ключевые слова: фундаментальная группа графа групп, обобщенное свободное произведение, HNN-расширение, нильпотентная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами.

§ 1. Введение

Группу X будем называть *локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству*, если любая конечно порожденная подгруппа группы X удовлетворяет нетривиальному тождеству (не обязательно одному и тому же для всех подгрупп). Будем говорить, что группа X *локально аппроксимируется нильпотентными группами*, если любая ее конечно порожденная подгруппа Y *нильпотентно аппроксимируема*, т. е. для каждого отличного от единицы элемента $y \in Y$ существует гомоморфизм σ группы Y на нильпотентную группу, причем $y\sigma \neq 1$. Отметим, что группа может не быть нильпотентно аппроксимируемой и не удовлетворять никакому нетривиальному тождеству, но обладать указанными свойствами локально (соответствующий пример приводится в конце статьи).

Целью данной работы является отыскание необходимых условий локальной аппроксимируемости нильпотентными группами для свободных конструкций, составленных из групп, локально удовлетворяющих нетривиальному тождеству. А именно, будет показано, что при определенных ограничениях таким условием является p'-изолированность всех объединенных или связанных подгрупп для некоторого простого числа p (напомним, что подгруппа Y группы X

Работа выполнена при финансовой поддержке Ивановского государственного университета (договор № 7/01–04–18).

называется p'-*изолированной* в этой группе, если для всякого $x \in X$ и для всякого простого числа $q \neq p$ из условия $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$).

Перейдем к определению рассматриваемых в работе теоретико-групповых конструкций.

Пусть Γ — некоторый ориентированный граф и $\overline{\Gamma}$ — неориентированный граф, который получается из Γ путем удаления ориентации ребер. Будем говорить, что граф Γ *связен*, если связным является граф $\overline{\Gamma}$ (т. е. любые две вершины последнего соединяет как минимум один путь). Точно так же будем считать граф Γ *ациклическим*, если этим свойством обладает граф $\overline{\Gamma}$. Если e — ребро графа Γ, то через $e(1)$ и $e(-1)$ будем обозначать вершины графа Γ, являющиеся соответственно началом и концом ребра e.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный непустой связный ориентированный граф с множеством вершин V и совокупностью ребер E (число вершин и ребер не обязано быть конечным, допускаются кратные ребра и петли). Сопоставив каждой вершине $v \in V$ некоторую группу F_v, каждому ребру $e \in E$ — группу H_e и вложения $\varphi_{+e}\colon H_e \to F_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to F_{e(-1)}$, получим *граф групп* $\mathscr{G}$, соответствующий графу G.

Пусть $T = (V, E_T)$ — некоторое максимальное поддерево графа G (т. е. связный ациклический подграф графа G, содержащий все его вершины). *Фундаментальной группой графа групп* $\mathscr{G}$ называется группа

$$F = \big\langle *F_v,\ t_f;\ H_e\varphi_{+e} = H_e\varphi_{-e},\ t_f^{-1}(H_f\varphi_{+f})t_f = H_f\varphi_{-f} \\ (v \in V,\ e \in E_T,\ f \in E \setminus E_T)\big\rangle, \quad (1)$$

образующими которой являются образующие групп F_v $(v \in V)$ и буквы t_f $(f \in E \setminus E_T)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп F_v, а также всевозможные соотношения вида

$$h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e} \quad (e \in E_T,\ h \in H_e),$$
$$t_f^{-1}(h\varphi_{+f})t_f = h\varphi_{-f} \quad (f \in E \setminus E_T,\ h \in H_f).$$

Можно показать (см., например, [1, гл. 1, предложение 20]), что фундаментальная группа графа $\mathscr{G}$ не зависит от выбора дерева T.

Если граф $\mathscr{G}$ является деревом, то его фундаментальная группа F называется *древесным произведением групп* F_v $(v \in V)$ *с объединенными подгруппами* $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$. Если в дополнение к этому для любых двух ребер $e, f \in E$ и для любых чисел $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$ из равенства $e(\varepsilon) = f(\delta)$ вытекает, что $H_e\varphi_{\varepsilon e} = H_f\varphi_{\delta f}$, то в группе F все подгруппы $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ оказываются совпадающими. Поэтому группу F, удовлетворяющую указанному дополнительному условию, будем называть *свободным произведением семейства групп* $\{F_v \mid v \in V\}$ *с одной объединенной подгруппой*. Нетрудно показать, что получающаяся таким образом группа изоморфна свободному произведению семейства групп $\{F_v \mid v \in V\}$ с одной объединенной подгруппой, определенному в соответствии с [2].

Если граф $\mathscr{G}$ содержит одну вершину v и по крайней мере одно ребро, то его фундаментальная группа F имеет представление

$$F = \big\langle F_v,\ t_f;\ t_f^{-1}(H_f\varphi_{+f})t_f = H_f\varphi_{-f}\ (f \in E)\big\rangle \quad (2)$$

и называется HNN-*расширением группы* F_v *с семейством проходных букв* $\{t_f \mid f \in E\}$.

Основным результатом настоящей работы служит

Теорема 1. *Пусть F — фундаментальная группа графа групп вида (1), каждая группа F_v ($v \in V$) локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ содержится в группе $F_{e(\varepsilon)}$ собственным образом. Если группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами и для всякого ребра $e \in E$ хотя бы один из индексов $[F_{e(1)} : H_e\varphi_{+e}]$, $[F_{e(-1)} : H_e\varphi_{-e}]$ больше двух, то существует простое число p такое, что для каждого ребра $e \in E$ и для каждого числа $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ p'-изолирована в группе $F_{e(\varepsilon)}$.*

Следствиями теоремы 1 являются приводимые далее теоремы 2 и 3, обобщающие основные результаты работ [3–5]. Отметим, что в отличие от теоремы 1 в них уже нет дополнительного ограничения на индексы объединенных и связанных подгрупп.

Теорема 2. *Пусть F — свободное произведение семейства групп $\{F_v \mid v \in V\}$ с одной объединенной подгруппой H, все группы F_v локально удовлетворяют нетривиальному тождеству и хотя бы в двух из них подгруппа H содержится собственным образом. Если группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что подгруппа H p'-изолирована в группе F_v для любой вершины $v \in V$.*

Теорема 3. *Пусть F —* HNN*-расширение вида (2), группа F_v локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и для любых $f \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_f\varphi_{\varepsilon f}$ содержится в группе F_v собственным образом. Если группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что для каждого ребра $f \in E$ и для каждого числа $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_f\varphi_{\varepsilon f}$ p'-изолирована в группе F_v.*

Если F — свободное произведение семейства групп $\{F_v \mid v \in V\}$ с одной объединенной подгруппой H и неравенство $H \neq F_v$ имеет место только для одной вершины $v \in V$, то $F = F_v$ и из локальной нильпотентной аппроксимируемости этой группы, разумеется, не следует p'-изолированность в ней подгруппы H ни для какого простого числа p. Таким образом, теорема 2 в этом случае оказывается неверна. Утверждение теоремы 3 также перестает быть справедливым, если хотя бы одна из связанных подгрупп $H_f\varphi_{\varepsilon f}$ ($f \in E$, $\varepsilon = \pm 1$) совпадает с базовой группой F_v; соответствующий пример приводится в [5].

Теоремы 1–3 в сочетании с полученным в [6, 7] описанием изоляторов подгрупп нильпотентных и нильпотентно аппроксимируемых групп определенного вида, а также многочисленными результатами об аппроксимируемости свободных конструкций групп конечными p-группами могут послужить основой для отыскания критериев нильпотентной аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений нильпотентных и нильпотентно аппроксимируемых групп.

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения

Предложение 1 [8, лемма 2]. *Пусть группа X удовлетворяет нетривиальному тождеству. Тогда X удовлетворяет нетривиальному тождеству вида*

$$w(y, x_1, x_2) = w_0(x_1, x_2)y^{\varepsilon_1}w_1(x_1, x_2)\dots y^{\varepsilon_n}w_n(x_1, x_2), \tag{3}$$

где $n \geq 1$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ и $w_0(x_1, x_2), \dots, w_n(x_1, x_2) \in \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, (x_1x_2^{-1})^{\pm 1}\}$.

Предложение 2. *Пусть p и q — взаимно простые числа, X — конечная группа порядка p. Тогда для любого элемента $x \in X$ найдется целое число m такое, что $x = x^{qm}$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда $x^p = 1$. Так как $(q,p) = 1$, существуют числа $m, k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию $qm + pk = 1$. Тогда $x = x^{qm+pk} = (x^q)^m (x^p)^k = x^{qm}$, что и требовалось.

Предложение 3. *Пусть X — некоторая группа, Y и Z — конечно порожденные подгруппы группы X, $x_1 \in Y$ и $x_2 \in Z$ — элементы такие, что $[x_1, x_2] \neq 1$, p и q — простые числа. Пусть также*

- (a) *для любого простого числа r и для любого гомоморфизма ρ подгруппы Y на конечную r-группу из соотношения $r \neq p$ следует, что $x_1\rho = 1$;*
- (b) *для любого простого числа s и для любого гомоморфизма σ подгруппы Z на конечную s-группу из соотношения $s \neq q$ следует, что $x_2\sigma = 1$.*

Если $p \neq q$, то группа X не является локально аппроксимируемой нильпотентными группами.

Доказательство. Пусть M и N — конечные порождающие множества подгрупп Y и Z соответственно, U — подгруппа, порожденная множеством $M \cup N$. Предположим, что $p \neq q$, но группа X локально аппроксимируется нильпотентными группами. Тогда подгруппа U аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами. По теореме Гирша [9] всякая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема. Поэтому подгруппа U аппроксимируется конечными нильпотентными группами.

Пусть $x = [x_1, x_2]$, τ — гомоморфизм подгруппы U на конечную нильпотентную группу Z, переводящий x в неединичный элемент, t — простое число, делящее порядок элемента $x\tau$. По теореме Бернсайда — Виландта (см., например, [10, теорема 2.7]) группа Z раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Пусть T — произведение всех силовских подгрупп группы Z, кроме подгруппы, соответствующей числу t. Тогда $x\tau \notin T$, поэтому композиция τ и естественного гомоморфизма группы Z на фактор-группу Z/T отображает x в неединичный элемент конечной t-группы Z/T.

Если $t = q$, то согласно неравенству $p \neq q$ и условию (a) элемент x_1 переходит в единицу под действием ограничения гомоморфизма τ на подгруппу Y. Если $t \neq q$, то согласно условию (b) справедливо равенство $x_2\tau = 1$. Так или иначе, но $x\tau = 1$, что противоречит выбору гомоморфизма τ.

§ 3. Некоторые свойства обобщенных свободных произведений групп

Пусть до конца этого раздела F обозначает свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H.

Запись элемента $f \in F$ в виде $f = f_1 f_2 \dots f_n$ $(n \geq 1)$ называется *несократимой*, если каждый элемент f_k $(1 \leq k \leq n)$ лежит в одном из множителей A, B, причем соседние элементы f_k, f_{k+1} не лежат в одном и том же свободном множителе. Число n называется *длиной* данной несократимой записи.

Приводимое далее предложение 4 является непосредственным следствием теоремы о нормальной форме для обобщенных свободных произведений двух групп (см., например, [11, следствие 4.4.1]).

Предложение 4. *Всякий элемент $f \in F$, обладающий хотя бы одной несократимой записью длины, большей 1, не лежит ни в одном из свободных множителей A, B и, в частности, отличен от единицы.*

Предложение 5 [11, следствие 4.4.3]. *В группе F имеет место равенство $A \cap B = H$.*

Предложение 6. *Пусть группы A и B локально удовлетворяют нетривиальному тождеству, подгруппа H содержится в каждой из них собственным образом и хотя бы один из индексов $[A : H]$, $[B : H]$ больше двух. Пусть также существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что $a^q \in H$ для некоторого простого числа q. Тогда найдутся конечно порожденная подгруппа $S \leq F$ и элементы $g_1, g_2 \in S$, обладающие следующими свойствами:*

(a) *элементы g_1 и g_2 имеют несократимые записи неединичной длины; при этом первый и последний слоги указанной записи элемента g_1 принадлежат множеству $A \setminus H$, а первый и последний слоги записи элемента g_2 — множеству $B \setminus H$;*

(b) *для любого простого числа p и для любого гомоморфизма σ подгруппы S на конечную p-группу из соотношения $p \neq q$ следует, что $g_1\sigma = g_2\sigma = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим три взаимоисключающих случая:

1) $[B : H] > 2$,
2) $[B : H] = 2$ и $q > 2$,
3) $[B : H] = 2$ и $q = 2$.

Случай 1. $[B : H] > 2$. Пусть элементы 1, b_1, b_2 являются представителями различных правых смежных классов группы B по подгруппе H. Будучи конечно порожденной подгруппой группы B, группа $U = sgp\{a^q, b_1, b_2\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 1 можно считать имеющим вид (3). Положим

$$S = sgp\{a, b_1, b_2\},$$
$$g_1 = a^{-1}w(a, b_1, b_2)a = a^{-1}w_0(b_1, b_2)a^{\varepsilon_1}w_1(b_1, b_2)\dots a^{\varepsilon_n}w_n(b_1, b_2)a,$$
$$g_2 = w(a, b_1, b_2) = w_0(b_1, b_2)a^{\varepsilon_1}w_1(b_1, b_2)\dots a^{\varepsilon_n}w_n(b_1, b_2).$$

Согласно предложению 1 элемент $w_r(b_1, b_2)$, $r \in \{0, \dots, n\}$, имеет вид $b_1^{\pm1}$ или $b_2^{\pm1}$, или $\left(b_1 b_2^{-1}\right)^{\pm1}$. Так как элементы b_1, b_2 принадлежат разным правым смежным классам группы B по подгруппе H и отличны от единицы, то $w_r(b_1, b_2) \in B \setminus H$ для всякого $r \in \{0, \dots, n\}$. Также по условию предложения справедливо соотношение $a \in A \setminus H$. Поэтому приведенные выше записи элементов g_1, g_2 несократимы и обладают свойством (a).

Пусть σ — некоторый гомоморфизм подгруппы S на конечную p-группу и $p \neq q$. Из включения $a^q \in U$ и предложения 2 вытекает, что $a\sigma \in U\sigma$. Поскольку группа U удовлетворяет тождеству (3), отсюда следует, что $g_1\sigma = g_2\sigma = 1$. Таким образом, для подгруппы S и элементов g_1, g_2 выполняется и свойство (b).

Случай 2. $[B : H] = 2$ и $q > 2$. Пусть $b \in B \setminus H$. Группа $U = sgp\{a^q, b\}$ является конечно порожденной подгруппой группы B и потому удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое, как и выше, можно считать имеющим вид (3). Положим

$$S = sgp\{a, b\},$$
$$g_1 = w(b, a, a^2) = w_0(a, a^2)b^{\varepsilon_1}w_1(a, a^2)\dots b^{\varepsilon_n}w_n(a, a^2),$$
$$g_2 = b^{-1}w(b, a, a^2)b = b^{-1}w_0(a, a^2)b^{\varepsilon_1}w_1(a, a^2)\dots b^{\varepsilon_n}w_n(a, a^2)b.$$

Согласно предложению 1 для каждого $r \in \{0, \dots, n\}$ справедливо включение $w_r(a, a^2) \in \{a^{\pm 1}, a^{\pm 2}\}$. По условию предложения $a \in A \setminus H$, а из неравенства $q > 2$ и простоты числа q вытекает также, что $a^2 \in A \setminus H$. Следовательно, $w_r(a, a^2) \in A \setminus H$ для всякого $r \in \{0, \dots, n\}$. Таким образом, записи элементов g_1, g_2 несократимы и обладают свойством (a). Выполнение свойства (b) проверяется так же, как и в случае 1.

Случай 3. $[B : H] = 2$ и $q = 2$. Пусть $b \in B \setminus H$. Из условия предложения и из того, что $[B : H] = 2$, следует, что $[A : H] > 2$. Пусть элементы 1, a_1, a_2 являются представителями различных правых смежных классов группы A по подгруппе H.

Так как $[B : H] = 2$, то $b^2 \in H$ и потому $U = sgp\{b^2, a_1, a_2\}$ — конечно порожденная подгруппа группы A. Значит, она удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое снова можно считать имеющим вид (3). Положим

$$S = sgp\{a_1, a_2, b\},$$
$$g_1 = w(b, a_1, a_2) = w_0(a_1, a_2)b^{\varepsilon_1}w_1(a_1, a_2)\dots b^{\varepsilon_n}w_n(a_1, a_2),$$
$$g_2 = b^{-1}w(b, a_1, a_2)b = b^{-1}w_0(a_1, a_2)b^{\varepsilon_1}w_1(a_1, a_2)\dots b^{\varepsilon_n}w_n(a_1, a_2)b.$$

Как и в случае 1, проверяется, что $w_r(a_1, a_2) \in A \setminus H$ для всякого $r \in \{0, \dots, n\}$. Также $b \in B \setminus H$. Поэтому приведенные выше записи элементов g_1, g_2 несократимы и обладают свойством (a).

Пусть σ — некоторый гомоморфизм подгруппы S на конечную p-группу и $p \neq q$. Из соотношения $q = 2$, включения $b^2 \in U$ и предложения 2 вытекает, что $b\sigma \in U\sigma$. Поскольку группа U удовлетворяет тождеству (3), отсюда следует, что $g_1\sigma = g_2\sigma = 1$ и, значит, свойство (b) также имеет место.

§ 4. Некоторые свойства HNN-расширений групп

Пусть F — HNN-расширение вида (2). Запись элемента $g \in F$ в виде

$$g = g_0 t_{f_1}^{\varepsilon_1} g_1 \dots g_{n-1} t_{f_n}^{\varepsilon_n} g_n,$$

где $g_0, \dots, g_n \in F_v$, $f_1, \dots, f_n \in E$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ и $n \geq 0$, называется *приведенной*, если в ней не встречаются подряд элементы $t_f^{-\varepsilon}$, h, t_f^{ε}, где $f \in E$, $\varepsilon = \pm 1$, $h \in H_{\varepsilon f}$. Число n называется *длиной* данной приведенной записи. Следующее утверждение может быть выведено из леммы Бриттона для HNN-расширений с одной проходной буквой (см., например, [12, гл. IV, § 2]).

Предложение 7. *Пусть F — HNN-расширение вида (2). Всякий элемент $g \in F$, обладающий хотя бы одной приведенной записью длины, большей 0, не принадлежит базовой группе F_v и, в частности, отличен от 1.*

Предложение 8. *Пусть F — HNN-расширение вида (2), причем граф G содержит только одно ребро e. Пусть также подгруппа $H_e\varphi_{+e}$ собственным образом содержится в некоторой подгруппе A группы F_v, локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству, подгруппа $H_e\varphi_{-e}$ собственным образом содержится в некоторой подгруппе B группы F_v, локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству, и хотя бы один из индексов $[A : H_e\varphi_{+e}]$, $[B : H_e\varphi_{-e}]$*

больше двух. Если существуют простое число q и элемент $a \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$ такой, что $a^q \in H_e\varphi_{+e}$, или элемент $b \in B \setminus H_e\varphi_{-e}$ такой, что $b^q \in H_e\varphi_{-e}$, то найдутся конечно порожденная подгруппа $S \leq F$ и элементы $g_1, g_2 \in S$, обладающие следующими свойствами:

- (a) *элементы g_1 и g_2 имеют приведенные записи ненулевой длины, при этом запись элемента g_1 начинается на t_e^{-1} и заканчивается на t_e, а запись элемента g_2 начинается на t_e и заканчивается на t_e^{-1};*
- (b) *для любого простого числа p и для любого гомоморфизма σ подгруппы S на конечную p-группу из соотношения $p \neq q$ следует, что $g_1\sigma = g_2\sigma = 1$.*

Доказательство. Поменяв, если необходимо, направление ребра e на противоположное и подгруппы A и B местами, можно считать далее, что существует элемент $a \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$ такой, что $a^q \in H_e\varphi_{+e}$. Рассмотрим три взаимоисключающих случая:

1) $[B : H_e\varphi_{-e}] > 2$,
2) $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$ и $q > 2$,
3) $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$ и $q = 2$.

Случай 1. $[B : H_e\varphi_{-e}] > 2$. Пусть элементы 1, b_1, b_2 являются представителями различных правых смежных классов группы B по подгруппе $H_e\varphi_{-e}$. Будучи конечно порожденной подгруппой группы B, группа $U = sgp\big\{t_e^{-1}a^qt_e, b_1, b_2\big\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 1 можно считать имеющим вид (3). Положим

$$\begin{aligned} S &= sgp\{a, b_1, b_2, t_e\},\\ g_1 &= t_e^{-1}w\big(t_e^{-1}at_e, b_1, b_2\big)t_e\\ &= t_e^{-1}w_0(b_1, b_2)t_e^{-1}a^{\varepsilon_1}t_ew_1(b_1, b_2)\dots t_e^{-1}a^{\varepsilon_n}t_ew_n(b_1, b_2)t_e,\\ g_2 &= t_ew\big(t_e^{-1}at_e, b_1, b_2\big)t_e^{-1}\\ &= t_ew_0(b_1, b_2)t_e^{-1}a^{\varepsilon_1}t_ew_1(b_1, b_2)\dots t_e^{-1}a^{\varepsilon_n}t_ew_n(b_1, b_2)t_e^{-1}. \end{aligned}$$

Как и при доказательстве предложения 6, устанавливается, что $w_r(b_1, b_2) \in B \setminus H_e\varphi_{-e}$ для всякого $r \in \{0, \dots, n\}$. Отсюда и из соотношения $a \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$ следует, что записи элементов g_1, g_2 являются приведенными и обладают свойством (a).

Пусть σ — некоторый гомоморфизм подгруппы S на конечную p-группу и $p \neq q$. Из включения $t_e^{-1}a^qt_e \in U$ и предложения 2 вытекает, что $\big(t_e^{-1}at_e\big)\sigma \in U\sigma$. Поскольку группа U удовлетворяет тождеству (3), отсюда следует, что $\big(t_eg_1t_e^{-1}\big)\sigma = \big(t_e^{-1}g_2t_e\big)\sigma = 1$. Таким образом, для подгруппы S и элементов g_1, g_2 выполняется и свойство (b).

Случай 2. $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$ и $q > 2$. Пусть $b \in B \setminus H_e\varphi_{-e}$. Группа $U = sgp\big\{t_e^{-1}a^qt_e, b\big\}$ является конечно порожденной подгруппой группы B и потому удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое, как и выше, можно считать имеющим вид (3). Положим

$$\begin{aligned} S &= sgp\{a, b, t_e\},\\ g_1 &= w\big(b, t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)\\ &= w_0\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)b^{\varepsilon_1}w_1\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)\dots b^{\varepsilon_n}w_n\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big),\\ g_2 &= t_e^2w\big(b, t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)t_e^{-2}\\ &= t_e^2w_0\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)b^{\varepsilon_1}w_1\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)\dots b^{\varepsilon_n}w_n\big(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\big)t_e^{-2}. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1 для каждого $r \in \{0, \dots, n\}$ справедливо включение
$$w_r\bigl(t_e^{-1}at_e, t_e^{-1}a^2t_e\bigr) \in \bigl\{t_e^{-1}a^{\pm 1}t_e, t_e^{-1}a^{\pm 2}t_e\bigr\}.$$
Из соотношения $a \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$, неравенства $q > 2$ и простоты числа q вытекает, что $a^2 \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$. Поэтому записи элементов g_1, g_2 являются приведенными и обладают свойством (a). Выполнение свойства (b) проверяется так же, как и в случае 1.

Случай 3. $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$ и $q = 2$. Из условия предложения и равенства $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$ следует, что $[A : H_e\varphi_{+e}] > 2$. Пусть элементы 1, a_1, a_2 являются представителями различных правых смежных классов группы A по подгруппе $H_e\varphi_{+e}$. Пусть также $b \in B \setminus H_e\varphi_{-e}$. Так как $[B : H_e\varphi_{-e}] = 2$, подгруппа $H_e\varphi_{-e}$ нормальна в B. Поэтому $b^{-1}\bigl(t_e^{-1}a^qt_e\bigr)b \in H_e\varphi_{-e}$ и $t_eb^{-1}\bigl(t_e^{-1}a^qt_e\bigr)bt_e^{-1} \in H_e\varphi_{+e}$. Следовательно, группа $U = sgp\bigl\{t_eb^{-1}t_e^{-1}a^qt_ebt_e^{-1}, a_1, a_2\bigr\}$ является конечно порожденной подгруппой группы A и потому удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое снова можно считать имеющим вид (3). Положим
$$\begin{aligned}
S &= sgp\{a, b, a_1, a_2, t_e\},\\
g_1 &= t_e^{-1}w\bigl(t_eb^{-1}t_e^{-1}at_ebt_e^{-1}, a_1, a_2\bigr)t_e\\
&= t_e^{-1}w_0(a_1, a_2)t_eb^{-1}t_e^{-1}a^{\varepsilon_1}t_ebt_e^{-1}w_1(a_1, a_2)\dots t_eb^{-1}t_e^{-1}a^{\varepsilon_n}t_ebt_e^{-1}w_n(a_1, a_2)t_e,\\
g_2 &= t_ew\bigl(t_eb^{-1}t_e^{-1}at_ebt_e^{-1}, a_1, a_2\bigr)t_e^{-1}\\
&= t_ew_0(a_1, a_2)t_eb^{-1}t_e^{-1}a^{\varepsilon_1}t_ebt_e^{-1}w_1(a_1, a_2)\dots t_eb^{-1}t_e^{-1}a^{\varepsilon_n}t_ebt_e^{-1}w_n(a_1, a_2)t_e^{-1}.
\end{aligned}$$

Как и выше, устанавливается, что $w_r(a_1, a_2) \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$ для всякого $r \in \{0, \dots, n\}$. Кроме того, $a \in A \setminus H_e\varphi_{+e}$, $b \in B \setminus H_e\varphi_{-e}$. Поэтому записи элементов g_1, g_2 являются приведенными и обладают свойством (a). Выполнение свойства (b) проверяется так же, как и в случае 1, с той лишь разницей, что вместо элементов $t_e^{-1}at_e$ и $t_e^{-1}a^qt_e$ нужно рассмотреть элементы $t_eb^{-1}\bigl(t_e^{-1}at_e\bigr)bt_e^{-1}$ и $t_eb^{-1}\bigl(t_e^{-1}a^qt_e\bigr)bt_e^{-1}$ соответственно.

§ 5. Некоторые свойства фундаментальных групп произвольных графов групп

Пусть F — фундаментальная группа графа групп вида (1) и P — древесное произведение, соответствующее максимальному поддереву T. Тогда группа F представляет собой HNN-расширение группы P с семейством проходных букв $\{t_f \mid f \in E \setminus E_T\}$ и в силу теоремы 2 из [13] P можно считать подгруппой в F. Если $e \in E \setminus E_T$ — некоторое ребро, то группа F является и HNN-расширением группы
$$P(e) = \bigl\langle P,\ t_e;\ t_e^{-1}(H_e\varphi_{+e})t_e = H_e\varphi_{-e}\bigr\rangle$$
с семейством проходных букв $\{t_f \mid f \in E\setminus(E_T \cup \{e\})\}$. Следовательно, HNN-расширение $P(e)$ также оказывается подгруппой в F. Наконец, если $\widetilde{T} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ — поддерево дерева T, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы и отображения, а $\widetilde{P}$ — соответствующее $\widetilde{T}$ древесное произведение, то согласно теореме 1 из [14] тождественное отображение образующих группы $\widetilde{P}$ в группу P задает изоморфное вложение и, значит, группу $\widetilde{P}$ также можно считать подгруппой в F. Приведенные соображения позволяют применять к указанным выше подгруппам группы F предложения 6, 8, и в доказательстве приводимого далее предложения 9 эта возможность будет использоваться без дополнительных оговорок.

Предложение 9. *Пусть F — фундаментальная группа графа групп вида (1), каждая группа F_v $(v \in V)$ локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ содержится в группе $F_{e(\varepsilon)}$ собственным образом. Пусть также группа F локально аппроксимируется нильпотентными группами и для всякого ребра $e \in E$ хотя бы один из индексов $[F_{e(1)} : H_e\varphi_{+e}]$, $[F_{e(-1)} : H_e\varphi_{-e}]$ больше двух. Если существуют (не обязательно различные) ребра $e, f \in E$, (не обязательно различные) числа ε, $\delta = \pm 1$, элементы $x_e \in F_{e(\varepsilon)} \setminus H_e\varphi_{\varepsilon e}$, $x_f \in F_{f(\delta)} \setminus H_f\varphi_{\delta f}$ и простые числа p, q такие, что $x_e^p \in H_e\varphi_{\varepsilon e}$, $x_f^q \in H_f\varphi_{\delta f}$, то $p = q$.*

Доказательство. Рассмотрим три взаимоисключающих случая:

1) $e, f \in E_T$;
2) $e \in E_T$, $f \notin E_T$ или $e \notin E_T$, $f \in E_T$;
3) $e, f \notin E_T$.

Случай 1. $e, f \in E_T$. Среди вершин $e(1)$, $e(-1)$, $f(1)$, $f(-1)$ имеется по крайней мере две различные. Очевидно, что при изменении направлений любого числа ребер из множества E_T представление группы F остается тем же. Поэтому без потери общности можно считать, что $e(-1) \neq f(1)$, в дереве T имеется путь, ведущий из вершины $f(1)$ в вершину $e(-1)$, и этот путь проходит через вершины $e(1)$ и $f(-1)$.

Согласно предложению 6, применяемому сначала к обобщенному свободному произведению

$$P_e = \langle F_{e(1)} * F_{e(-1)};\ H_e\varphi_{+e} = H_e\varphi_{-e} \rangle$$

и элементу x_e, а затем к обобщенному свободному произведению

$$P_f = \langle F_{f(1)} * F_{f(-1)};\ H_f\varphi_{+f} = H_f\varphi_{-f} \rangle$$

и элементу x_f, существуют конечно порожденные подгруппы $S_1 \leq P_e$, $S_2 \leq P_f$ и элементы $g_1 \in S_1$, $g_2 \in S_2$, обладающие следующими свойствами:

(a) элементы g_1 и g_2 имеют в группах P_e и P_f соответственно несократимые записи неединичной длины, при этом первый и последний слоги указанной записи элемента g_1 принадлежат множеству $F_{e(-1)} \setminus H_e\varphi_{-e}$, а первый и последний слоги записи элемента g_2 — множеству $F_{f(1)} \setminus H_f\varphi_{+f}$;

(b) для любого простого числа r и для любого гомоморфизма ρ подгруппы S_1 на конечную r-группу из соотношения $r \neq p$ следует, что $g_1\rho = 1$; для любого простого числа s и для любого гомоморфизма σ подгруппы S_2 на конечную s-группу из соотношения $s \neq q$ следует, что $g_2\sigma = 1$.

Покажем, что элемент $g = [g_1, g_2]$ отличен от 1. Тогда по предложению 3, применяемому к группе F, подгруппам S_1, S_2, элементам g_1, g_2 и числам p, q, получим, что $p = q$, как и требовалось.

Пусть $\widetilde{T} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ — поддерево дерева T, представляющее собой путь, соединяющий вершины $e(-1)$ и $f(1)$, $\widetilde{P}$ — соответствующее поддереву $\widetilde{T}$ древесное произведение. Если $e = f$, то $\widetilde{P} = P_e = P_f$ и в силу свойства (a) элемент g имеет в этой группе несократимую запись длины, не меньшей 12. Согласно предложению 4 отсюда следует, что $g \neq 1$.

Пусть $e \neq f$, дерево $\widetilde{T}_1$ получается из $\widetilde{T}$ в результате удаления ребра e и вершины $e(-1)$, дерево $\widetilde{T}_2$ — из $\widetilde{T}_1$ посредством удаления ребра f и вершины $f(1)$.

Пусть также $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2$ — древесные произведения, соответствующие деревьям $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$. Тогда группа $\widetilde{P}$ является свободным произведением групп P_e и $\widetilde{P}_1$ с объединенной подгруппой $F_{e(1)}$, а группа $\widetilde{P}_1$ — свободным произведением групп $\widetilde{P}_2$ и P_f с объединенной подгруппой $F_{f(-1)}$.

Так как элемент g_1 имеет в группе P_e несократимую запись неединичной длины, в силу предложения 4 он не лежит в свободном множителе $F_{e(1)}$. По тем же причинам $g_2 \notin F_{f(-1)}$. Согласно предложению 5 в группе $\widetilde{P}_1$ справедливо равенство $\widetilde{P}_2 \cap P_f = F_{f(-1)}$. Поскольку $F_{e(1)} \leq \widetilde{P}_2$, отсюда следует, что $g_2 \notin F_{e(1)}$. Значит, элемент g имеет в группе $\widetilde{P}$, рассматриваемой как обобщенное свободное произведение групп P_e и $\widetilde{P}_1$, несократимую запись длины 4 и в силу предложения 4 отличен от 1.

Случай 2. $e \in E_T$, $f \notin E_T$ или $e \notin E_T$, $f \in E_T$. Пусть P — древесное произведение, соответствующее максимальному поддереву T. Без потери общности можно считать, что $e \in E_T$, $f \notin E_T$. Поэтому согласно предложению 6, применяемому к обобщенному свободному произведению

$$P_e = \langle F_{e(1)} * F_{e(-1)};\ H_e\varphi_{+e} = H_e\varphi_{-e}\rangle$$

и элементу x_e, а также предложению 8, применяемому к HNN-расширению

$$P(f) = \big\langle P,\ t_f;\ t_f^{-1}(H_f\varphi_{+f})t_f = H_f\varphi_{-f}\big\rangle$$

и элементу x_f, существуют конечно порожденные подгруппы $S_1 \leq P_e$, $S_2 \leq P(f)$ и элементы $g_1 \in S_1$, $g_2 \in S_2$, обладающие следующими свойствами:

- (a) элемент g_1 имеет в группе P_e несократимую запись неединичной длины;
- (b) элемент g_2 имеет в группе $P(f)$ приведенную запись ненулевой длины, начинающуюся на t_f^{-1} и заканчивающуюся на t_f;
- (c) для любого простого числа r и для любого гомоморфизма ρ подгруппы S_1 на конечную r-группу из соотношения $r \neq p$ следует, что $g_1\rho = 1$; для любого простого числа s и для любого гомоморфизма σ подгруппы S_2 на конечную s-группу из соотношения $s \neq q$ следует, что $g_2\sigma = 1$.

Пусть T_1 и T_2 — компоненты связности графа, получающегося из T путем удаления ребра e, P_1 и P_2 — соответствующие древесные произведения. Тогда группа P представляет собой древесное произведение групп P_1, P_e и P_2 с объединенными подгруппами $F_{e(1)}$ и $F_{e(-1)}$. Из предложения 5 следует, что $P_1 \cap P_e \subseteq F_{e(1)} \cup F_{e(-1)}$ и $P_2 \cap P_e \subseteq F_{e(1)} \cup F_{e(-1)}$. Так как элемент g_1 имеет в группе P_e несократимую запись неединичной длины, по предложению 4 $g_1 \notin F_{e(1)} \cup F_{e(-1)}$. Отсюда вытекает, что $g_1 \notin F_v$ для каждой вершины $v \in V$ и, в частности, $g_1 \notin H_f\varphi_{-f}$. Поэтому запись элемента

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in P(f)$$

является приведенной, имеет ненулевую длину, и по предложению 7 $[g_1, g_2] \neq 1$. Как и в случае 1, в силу предложения 3 отсюда следует, что $p = q$.

Случай 3. $e, f \notin E_T$. Пусть снова P — древесное произведение, соответствующее максимальному поддереву T. Согласно предложению 8, применяемому сначала к HNN-расширению

$$P(e) = \big\langle P,\ t_e;\ t_e^{-1}(H_e\varphi_{+e})t_e = H_e\varphi_{-e}\big\rangle$$

и элементу x_e, а затем к HNN-расширению

$$P(f) = \big\langle P,\ t_f;\ t_f^{-1}(H_f\varphi_{+f})t_f = H_f\varphi_{-f}\big\rangle$$

и элементу x_f, найдутся конечно порожденные подгруппы $S_1 \leq P(e)$, $S_2 \leq P(f)$ и элементы $g_1 \in S_1$, $g_2 \in S_2$, обладающие следующими свойствами:

(a) элементы g_1 и g_2 имеют в группах $P(e)$ и $P(f)$ соответственно приведенные записи ненулевой длины; при этом запись элемента g_1 начинается на t_e^{-1} и заканчивается на t_e, а запись элемента g_2 начинается на t_f^{-1} и заканчивается на t_f;

(b) для любого простого числа r и для любого гомоморфизма ρ подгруппы S_1 на конечную r-группу из соотношения $r \neq p$ следует, что $g_1\rho = 1$; для любого простого числа s и для любого гомоморфизма σ подгруппы S_2 на конечную s-группу из соотношения $s \neq q$ следует, что $g_2\sigma = 1$.

Пусть также $c \in F_{e(-1)} \setminus H_e\varphi_{-e}$ и

$$g = [c^{-1}g_1c, g_2] = c^{-1}g_1^{-1}cg_2^{-1}c^{-1}g_1cg_2.$$

Тогда в группе F, рассматриваемой как HNN-расширение группы P, запись элемента g является приведенной и имеет ненулевую длину (это очевидно, если $e \neq f$, и вытекает из соотношения $c \in P \setminus H_e\varphi_{-e}$ в противном случае). Отсюда по предложению 7 следует, что $g \neq 1$. Применяя теперь предложение 3 к группе F, подгруппам $c^{-1}S_1c$, S_2, элементам $c^{-1}g_1c$, g_2 и числам p, q, получаем, что $p = q$.

§ 6. Доказательство теоремы 1

Если для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $F_{e(\varepsilon)}$, то в качестве p можно взять любое простое число. Поэтому далее будем считать, что для некоторых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ не является изолированной в группе $F_{e(\varepsilon)}$. Тогда существуют элемент $x_e \in F_{e(\varepsilon)} \setminus H_e\varphi_{\varepsilon e}$ и простое число p такие, что $x_e^p \in H_e\varphi_{\varepsilon e}$.

Предположим, что ребро $f \in E$, число $\delta = \pm 1$, элемент $x_f \in F_{f(\delta)} \setminus H_f\varphi_{\delta f}$ и простое число q таковы, что $x_f^q \in H_f\varphi_{\delta f}$. Тогда по предложению 9 $p = q$. Отсюда следует, что если для некоторых $f \in E$ и $\delta = \pm 1$ подгруппа $H_f\varphi_{\delta f}$ не является изолированной в группе $F_{f(\delta)}$, то она p'-изолирована в ней. В частности, это верно и для подгруппы $H_e\varphi_{\varepsilon e}$.

§ 7. Доказательство теоремы 2

Если для любой вершины $v \in V$ имеет место соотношение $[F_v : H] \leq 2$, то подгруппа H $2'$-изолирована в группе F_v для каждой $v \in V$. Поэтому далее будем считать, что существует вершина $v \in V$ такая, что $[F_v : H] > 2$.

Производя необходимые переобозначения, не влияющие на представление группы F, можно считать, что все ребра дерева G направлены от вершины v. Отсюда следует, в частности, что если два ребра инцидентны одной вершине, то последняя служит концом одного из них и началом другого.

Если $e \in E$ — некоторое ребро, то через φ_e будем обозначать изоморфизм $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}\colon H_e\varphi_{+e} \to H_e\varphi_{-e}$. Если ребра $e, f \in E$ таковы, что $e(-1) = f(1)$, то по определению конструкции свободного произведения с одной объединенной подгруппой $H_e\varphi_{-e} = H_f\varphi_{+f}$ и, значит, определена композиция изоморфизмов $\varphi_e\varphi_f$.

Пусть G' — дерево-звезда с тем же множеством вершин, что и у дерева G, причем центром этой звезды является вершина v, из которой ведут ребра во все остальные вершины. Пусть также вершинам дерева G' соответствуют те же группы, что и вершинам дерева G. Если $e = (v, w)$ — ребро дерева G' и e_1, e_2, $\dots$, e_n — путь, ведущий в дереве G из вершины v в вершину w, то сопоставим ребру e группу $H_e = H_{e_1}$ и вложения $\varphi_{+e} = \varphi_{+e_1}$, $\varphi_{-e} = \varphi_{+e_1}\varphi_{e_1}\varphi_{e_2}\dots\varphi_{e_n}$. В результате получим граф групп $\mathscr{G}'$, причем для любого его ребра $e = (v, w)$ изоморфные вложения сопоставленных концам этого ребра групп F_v и F_w в группу F отображают подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ на H.

Покажем, что фундаментальные группы F и F' графов $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}'$ изоморфны. В самом деле, если, как и выше, $e = (v, w)$ — ребро дерева G' и e_1, e_2, $\dots$, e_n — путь, ведущий в дереве G из вершины v в вершину w, то из соотношений $h = h\varphi_{e_i}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$, $h \in H_{e_i}\varphi_{+e_i}$), справедливых в группе F, следует, что $h = h\varphi_{e_1}\varphi_{e_2}\dots\varphi_{e_n}$ ($h \in H_{e_1}\varphi_{+e_1}$) и потому $h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}$ для каждого $h \in H_e$. Обратно, если $g = (u, w)$ — ребро дерева G, $e_1, e_2, \dots, e_n = g$ — путь, ведущий в дереве G из вершины v в вершину w, $e = (v, w)$ и $f = (v, u)$ — ребра дерева G', то из соотношений $h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}$ ($h \in H_e$) и $h\varphi_{+f} = h\varphi_{-f}$ ($h \in H_f$) группы F' вытекает, что $h = h\varphi_{e_1}\varphi_{e_2}\dots\varphi_{e_n}$ и $h = h\varphi_{e_1}\varphi_{e_2}\dots\varphi_{e_{n-1}}$ ($h \in H_{e_1}\varphi_{+e_1}$), откуда $h = h\varphi_{e_n}$ для всех $h \in H_{e_n}\varphi_{+e_n}$ и потому $h\varphi_{+g} = h\varphi_{-g}$ для каждого $h \in H_g$. Поскольку остальные определяющие соотношения и все образующие в группах F и F' одинаковы, требуемый изоморфизм имеет место.

Заметим, что если для некоторого ребра e дерева G' справедливо равенство $H_e\varphi_{-e} = F_{e(-1)}$, то все определяющие соотношения группы $F_{e(-1)}$ выводимы из определяющих соотношений группы $F_{e(1)}$. Поэтому все образующие и определяющие соотношения группы $F_{e(-1)}$, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}$ ($h \in H_e$) могут быть исключены из представления группы F'. Эта операция равносильна удалению из графа групп $\mathscr{G}'$ ребра e вместе с вершиной $e(-1)$ и сопоставленными этим ребру и вершине группами.

Удалив из $\mathscr{G}'$ все ребра описанного вида, получим граф групп $\mathscr{G}''$, фундаментальная группа F'' которого изоморфна F и удовлетворяет условию теоремы 1. Следовательно, существует простое число p такое, что для любого ребра e графа $\mathscr{G}''$ подгруппа $H_e\varphi_{+e}$ p'-изолирована в группе $F_{e(1)} = F_v$ и подгруппа $H_e\varphi_{-e}$ p'-изолирована в группе $F_{e(-1)}$.

Пусть w — произвольная вершина графа $\mathscr{G}$, отличная от v и такая, что в группе F имеет место соотношение $H \neq F_w$ (хотя бы одна такая вершина существует по условию теоремы). Тогда ребро $e = (v, w)$ графа $\mathscr{G}'$ не было удалено при переходе к $\mathscr{G}''$, и так как вложения групп F_v и F_w в F отображают подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ на H, то подгруппа H p'-изолирована в группах F_v и F_w. Теорема доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 3

Если для каждого $e \in E$ хотя бы один из индексов $[F_v : H_e\varphi_{+e}]$, $[F_v : H_e\varphi_{-e}]$ больше двух, то требуемое утверждение вытекает из теоремы 1. Поэтому будем считать, что для некоторого $e \in E$ справедливы равенства $[F_v : H_e\varphi_{+e}] = 2$ и $[F_v : H_e\varphi_{-e}] = 2$.

Пусть $x_e \in F_v \setminus H_e\varphi_{+e}$, $y_e \in F_v \setminus H_e\varphi_{-e}$. Из соотношений $[F_v : H_e\varphi_{+e}] = [F_v : H_e\varphi_{-e}] = 2$ следует, что $x_e^2 \in H_e\varphi_{+e}$, $t_e^{-1}x_e^2t_e \in H_e\varphi_{-e}$ и

$$[H_e\varphi_{-e} : H_e\varphi_{+e} \cap H_e\varphi_{-e}] \leq 2.$$

Поэтому $t_e^{-1}x_e^4t_e \in H_e\varphi_{+e} \cap H_e\varphi_{-e}$ и $t_e^{-2}x_e^4t_e^2 \in H_e\varphi_{-e}$. Значит, группа $U = sgp\{t_e^{-1}x_e^2t_e, t_e^{-2}x_e^4t_e^2, y\}$ является конечно порожденной подгруппой группы F_v и потому удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 1 можно считать имеющим вид (3).

Положим

$$\begin{aligned} S_1 &= sgp\{x_e, y_e, t_e\}, \\ g_1 &= w\big(y_e, t_e^{-1}x_et_e, t_e^{-2}x_et_e^2\big) \\ &= w_0\big(t_e^{-1}x_et_e, t_e^{-2}x_et_e^2\big)y_e^{\varepsilon_1}w_1\big(t_e^{-1}x_et_e, t_e^{-2}x_et_e^2\big)\dots y_e^{\varepsilon_n}w_n\big(t_e^{-1}x_et_e, t_e^{-2}x_et_e^2\big). \end{aligned}$$

Согласно предложению 1 для каждого $r \in \{0, \dots, n\}$

$$w_r\big(t_e^{-1}x_et_e, t_e^{-2}x_et_e^2\big) \in \big\{t_e^{-1}x_e^{\pm1}t_e,\ t_e^{-2}x_e^{\pm1}t_e^2,\ \big(t_e^{-1}x_et_e^{-1}x_e^{-1}t_e^2\big)^{\pm1}\big\}.$$

Поскольку $x_e \in F_v \backslash H_e\varphi_{+e}$ и $y_e \in F_v \backslash H_e\varphi_{-e}$, указанная выше запись элемента g_1 приведена.

Пусть r — простое число, отличное от 2, и ρ — некоторый гомоморфизм подгруппы S_1 на конечную r-группу. Так как $(r, 4) = (r, 2) = 1$, из включений $t_e^{-1}x_e^2t_e \in U$, $t_e^{-2}x_e^4t_e^2 \in U$ и предложения 2 следует, что $\big(t_e^{-1}x_et_e\big)\rho \in U\rho$ и $\big(t_e^{-2}x_et_e^2\big)\rho \in U\rho$. Поскольку группа U удовлетворяет тождеству (3), отсюда вытекает, что $g_1\rho = 1$. Таким образом, подгруппа S_1 и элемент g_1 обладают следующими свойствами:

(a_1) элемент g_1 имеет в группе F приведенную запись ненулевой длины, начинающуюся на t_e^{-1} и заканчивающуюся на t_e;

(b_1) для любого простого числа r и для любого гомоморфизма ρ подгруппы S_1 на конечную r-группу из соотношения $r \neq 2$ следует, что $g_1\rho = 1$.

Предположим, что ребро $f \in E \backslash \{e\}$, число $\delta = \pm1$, элемент $x_f \in F_v \backslash H_f\varphi_{\delta f}$ и простое число q таковы, что $x_f^q \in H_f\varphi_{\delta f}$ и хотя бы один из индексов $[F_v : H_f\varphi_{+f}]$, $[F_v : H_f\varphi_{-f}]$ больше двух. Тогда согласно предложению 8, применяемому к HNN-расширению

$$F_v(f) = \big\langle F_v,\ t_f;\ t_f^{-1}(H_f\varphi_{+f})t_f = H_f\varphi_{-f}\big\rangle$$

и элементу x_f, найдутся конечно порожденная подгруппа $S_2 \leq F_v(f)$ и элемент $g_2 \in S_2$, обладающие следующими свойствами:

(a_2) элемент g_2 имеет в группе $F_v(f)$ приведенную запись ненулевой длины, начинающуюся на t_f^{-1} и заканчивающуюся на t_f;

(b_2) для любого простого числа s и для любого гомоморфизма σ подгруппы S_2 на конечную s-группу из соотношения $s \neq q$ следует, что $g_2\sigma = 1$.

Положим $g = [g_1, g_2]$. Так как $e \neq f$, запись элемента g является приведенной в группе F и имеет ненулевую длину. Следовательно, по предложению 7 $g \neq 1$ и по предложению 3 $q = 2$. Таким образом, все связанные подгруппы HNN-расширения F являются $2'$-изолированными в группе F_v.

§ 9. Пример

Пусть $\Phi = \langle a, b\rangle$ — свободная группа ранга 2, и для каждого $i \geq 1$ пусть $\gamma_i\Phi$ обозначает i-й член нижнего центрального ряда группы Φ. Положим $N_i =$

$\Phi/\gamma_{i+1}\Phi$, выберем в подгруппе $\gamma_i\Phi/\gamma_{i+1}\Phi$ произвольный неединичный элемент c_i и рассмотрим группу

$$D = \langle N_i \ (i \geq 1);\ [N_i, N_j] = 1,\ c_i = c_j \ (i \neq j)\rangle,$$

представляющую собой фактор-группу прямого произведения групп N_i $(i \geq 1)$ по нормальному замыканию множества элементов вида $c_i c_j^{-1}$ $(i \neq j)$. Нетрудно показать, что поскольку для каждого $i \geq 1$ элемент c_i лежит в центре группы N_i и порождает в ней бесконечную циклическую подгруппу, тождественное отображение образующих группы N_i в группу D при любом i продолжаемо до изоморфного вложения и потому группу N_i можно считать подгруппой в D [15]. Все элементы c_i переходят при этих вложениях в один и тот же элемент c группы D.

Так как прямое произведение нильпотентных групп N_i $(i \geq 1)$ является, очевидно, локально нильпотентной группой, тем же свойством обладает и его фактор-группа D. В частности, она локально удовлетворяет нетривиальному тождеству и локально аппроксимируется нильпотентными группами.

Покажем, что группа D не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Действительно, пусть $w(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное нетривиальное тождество. Поскольку группа Φ не удовлетворяет тождеству w, найдутся элементы $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$ такие, что $w(f_1, \ldots, f_n) \neq 1$. Так как $\bigcap\limits_{i\geq 1} \gamma_i\Phi = 1$ [16], то $w(f_1, \ldots, f_n) \notin \gamma_{i+1}\Phi$ для некоторого $i \geq 1$ и потому $w(f_1\varepsilon_i, \ldots, f_n\varepsilon_i) \neq 1$, где $\varepsilon_i\colon \Phi \to N_i$ — естественный гомоморфизм. Следовательно, группа N_i не удовлетворяет тождеству w и, поскольку она инъективно вкладывается в группу D, последняя также не удовлетворяет w.

Покажем, что при каждом гомоморфизме группы D на нильпотентную группу образ элемента c оказывается равен 1 и, следовательно, группа D не аппроксимируется нильпотентными группами. Пусть σ — гомоморфизм группы D на нильпотентную группу ступени k, σ_{k+1} — ограничение гомоморфизма σ на подгруппу N_{k+1} и $\varepsilon_{k+1}\colon \Phi \to N_{k+1}$ — естественный гомоморфизм. Так как группа $\Phi\varepsilon_{k+1}\sigma_{k+1}$ имеет ступень нильпотентности не выше k, то $\gamma_{k+1}\Phi \leq \ker \varepsilon_{k+1}\sigma_{k+1}$. Поскольку $c = c_{k+1} \in \gamma_{k+1}\Phi/\gamma_{k+2}\Phi$, отсюда следует, что $c\sigma = c\sigma_{k+1} = 1$, что и требовалось.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. В. Соколову за ряд ценных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Serre J.-P.* Trees. Berlin: Springer-Verl., 1980.
2. *Neumann H.* Generalized free products with amalgamated subgroups // Amer. J. Math. 1948. V. 70, N 3. P. 590–625.
3. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. № 2. С. 5–7.
4. *Савельичева Н. С., Соколов Е. В.* Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2015. № 1. С. 64–69.
5. *Sokolov E. V.* A necessary condition for the residual nilpotence of HNN-extensions // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, N 2. P. 281–285.
6. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
7. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

8. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. V. 44. P. 110–115.
9. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups (IV) // J. Lond. Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
10. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.
11. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Higman G., Neumann B. H., Neumann H.* Embedding theorems for groups // J. Lond. Math. Soc. 1949. V. 24. P. 247–254.
14. *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150. P. 227–254.
15. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: тез. докл. Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г. Новосибирск, 2018. С. 117.
16. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. Bd 111. S. 259–280.

Поступила в редакцию 3 декабря 2018 г.
После доработки 3 декабря 2018 г.
Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Куваев Александр Евгеньевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
alexander@kuvaev.me