УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП С КОММУТИРУЮЩИМИ ПОДГРУППАМИ

Пусть $\sigma(G)$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Легко видеть, что совпадение $\sigma(G)$ с единичной подгруппой равносильно финитной аппроксимируемости группы G; более того, $\sigma(G)$ является наименьшей из всех тех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым финитно аппроксимируемы. В ряде случаев известный критерий финитной аппроксимируемости групп некоторого семейства позволяет вычислить подгруппу $\sigma(G)$ для произвольной группы G этого семейства; два примера такого вычисления приведены в [4]. Здесь будет показано, что еще одним примером, для которого это вычисление осуществимо, является семейство групп, состоящее из свободных произведений групп с коммутирующими подгруппами.

Напомним, что если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B, то группа $G = \big(A * B;\ [H, K] = 1\big)$, порождаемая образующими групп A и B и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[h, k] = 1$ $(h \in H,\ k \in K)$, называется свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K (см. [2, с. 230]). Иначе говоря, группа G является фактор-группой свободного произведения $F = A * B$ групп A и B по нормальному замыканию N взаимного коммутанта $[H, K]$ подгрупп H и K. Отметим, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. В статье [1] доказана

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = \big(A * B;\ [H, K] = 1\big)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

Напомним, далее, что в соответствии с [3] подгруппу X группы Y называют финитно отделимой, если для любого элемента $y \in Y \setminus X$ существует такой гомоморфизм ρ группы Y на некоторую конечную группу, что $y\rho \notin X\rho$. Это требование равносильно тому, что для любого элемента $y \in Y \setminus X$ найдется подгруппа Z конечного индекса группы Y такая, что $y \notin XZ$.

Наименьшая финитно отделимая подгруппа X_1 группы Y, содержащая подгруппу X, называется проконечным замыканием подгруппы X в группе Y; легко видеть, что X_1 совпадает с пересечением всех подгрупп конечного индекса группы Y, содержащих X. Нетрудно понять также, что $\sigma(Y) \subseteq X_1$ и подгруппа $X_1/\sigma(Y)$ в группе $Y/\sigma(Y)$ финитно отделима.

Обобщением теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть $G = \big(A * B;\ [H, K] = 1\big)$ — свободное произведение групп A и B с коммутирующими неединичными подгруппами H*

и K. Пусть H_1 — проконечное замыкание в группе A подгруппы H, K_1 — проконечное замыкание в группе B подгруппы K. Подгруппа $\sigma(G)$ совпадает с нормальным замыканием в группе G объединения подгрупп $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ и $[H_1, K_1]$.

Для доказательства теоремы 2 обозначим через R нормальное замыкание в группе G объединения подгрупп $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ и $[H_1, K_1]$ и докажем сначала включение $R \subseteq \sigma(G)$.

Заметим для этого, что для любой подгруппы X произвольной группы Y подгруппа $\sigma(X)$ содержится в $\sigma(Y)$. Действительно, фактор-группа $X/X \cap \sigma(Y)$, изоморфная подгруппе $X\sigma(Y)/\sigma(Y)$ финитно аппроксимируемой группы $Y/\sigma(Y)$, финитно аппроксимируема и потому $\sigma(X) \subseteq X \cap \sigma(Y)$. Отсюда следует, что подгруппы $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ группы G содержатся в подгруппе $\sigma(G)$. Покажем, что в эту подгруппу входит и произвольный коммутатор $[x, y]$, где $x \in H_1$ и $y \in K_1$.

В самом деле, пусть L — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Поскольку тогда $U = A \cap L$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы A и $V = B \cap L$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы B, имеем $x \in HU$, $y \in KV$, и потому $[x, y] \in [H, K]\,L = L$. Таким образом, коммутатор $[x, y]$ принадлежит каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G, откуда следует, что $[x, y] \in \sigma(G)$, и потому $[H_1, K_1] \subseteq \sigma(G)$. Итак, включение $R \subseteq \sigma(G)$ доказано. Для доказательства противоположного включения достаточно показать, что фактор-группа G/R финитно аппроксимируема.

Обозначим через S нормальное замыкание в свободном произведении $F = A * B$ групп A и B объединения подгрупп $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ и $[H_1, K_1]$ группы F. Так как $G = F/N$ и $N \subseteq S$, $S/N = R$. Поэтому фактор-группа G/R изоморфна фактор-группе F/S. Так как фактор-группа группы F по нормальному замыканию в этой группе объединения подгрупп $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ изоморфна свободному произведению $\overline{F} = \overline{A} * \overline{B}$ групп $\overline{A} = A/\sigma(A)$ и $\overline{B} = B/\sigma(B)$, группа F/S изоморфна фактор-группе группы $\overline{F}$ по нормальному замыканию в $\overline{F}$ взаимного коммутанта $\left[\overline{H}_1, \overline{K}_1\right]$ подгрупп $\overline{H}_1 = H_1/\sigma(A)$ и $\overline{K}_1 = K_1/\sigma(B)$, т. е. — свободному произведению групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$ с коммутирующими подгруппами $\overline{H}_1$ и $\overline{K}_1$. Поскольку группы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ финитно аппроксимируемы, а их подгруппы $\overline{H}_1$ и $\overline{K}_1$ финитно отделимы, финитная аппроксимируемость группы G/R следует из теоремы 1. Таким образом, $\sigma(G) = R$, и теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395—407.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М. : Наука, 1974. 455 с.
3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.
4. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. : Естеств., обществ. науки. 2008. Вып. 2. С. 114—122.