Сибирский математический журнал
Март-апрель, 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407

Е. Д. Логинова

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С КОММУТИРУЮЩИМИ ПОДГРУППАМИ

§ 1. Введение

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B. Группа

$$G = (A * B;\ [H, K] = 1)\,,$$

порождаемая образующими групп A и B и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида

$$[h, k] = 1 \quad (h \in H, k \in K),$$

называется свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K (см. [1], с. 230). Иначе говоря, это фактор-группа свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта подгрупп H и K.

Строение группы G может быть описано с помощью конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой следующим образом (детали см. в § 3). Группы A и B оказываются естественным образом вложимыми в группу G, и мы можем считать их подгруппами этой группы. Обозначим, далее, через M подгруппу, порождаемую в G подгруппами A и K, через N — подгруппу, порожденную подгруппами B и H, и через U — подгруппу, порожденную подгруппами H и K. Тогда $U = H \times K$ — прямое произведение групп H и K, $M = (A * U;\ H)$ — свободное произведение групп A и U с объединенной подгруппой H, $N = (B * U;\ K)$ — свободное произведение групп B и U с объединенной подгруппой K, и, наконец, $G = (M * N;\ U)$ — свободное произведение групп M и N с объединенной подгруппой U.

Финитная аппроксимируемость свободных произведений с объединенной подгруппой явилась объектом ряда исследований, началом которых следует считать работу Г. Баумслага [2]. В этой работе, в частности, указано достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой (см. предложение 1 из § 2). Тем не менее, это условие не является необходимым, и в настоящее время можно утверждать, что простых необходимых и достаточных условий здесь не существует. Аналогичное положение имеет место и для свойства аппроксимируемости конечными p-группами. Для конструкции свободного произведения с коммутирующими подгруппами ситуация оказалась более простой. Она полностью описывается следующими двумя утверждениями, которые являются основными результатами данной работы:

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

Теорема 2. *Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p-группами, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются отделимыми в классе конечных p-групп.*

(Если хотя бы одна из подгрупп H или K является единичной, то группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ оказывается обычным свободным произведением групп A и B и потому аппроксимируема группами соответствующего класса (см. [3]).)

Напомним, что в соответствии с [4] подгруппу X группы Y называют финитно отделимой (отделимой в классе конечных p-групп), если для любого элемента $y \in Y \setminus X$ существует такой гомоморфизм ρ группы Y на некоторую конечную группу (соответственно, — на конечную p-группу), что $y\rho \notin X\rho$.

Необходимость условий в обеих теоремах почти очевидна. В действительности, эти условия являются необходимыми уже для аппроксимируемости в соответствующем классе групп подгрупп M и N группы G. Пусть, например, a — элемент группы A, не принадлежащий подгруппе H, и пусть образ этого элемента при любом гомоморфизме группы A на конечную группу (или на конечную p-группу) содержится в образе подгруппы H. Если еще k — неединичный элемент из подгруппы K, то элемент $w = [a, k]$ группы $M = (A * U; H)$ отличен от 1, поскольку его запись $w = a^{-1}k^{-1}ak$ является несократимой в данном разложении группы M. Очевидно, с другой стороны, что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы M на конечную группу (или, соответственно, на конечную p-группу) равен 1.

Доказательство достаточности условий теорем 1 и 2 содержится в § 3. Отметим некоторые следствия этих теорем.

Поскольку каждая подгруппа полициклической группы финитно отделима (см. теорему 6 из [4]), из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть группы A и B являются полициклическими. Тогда группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ финитно аппроксимируема (при любых подгруппах H и K групп A и B соответственно).*

Из теоремы Холла–Бернса (см. напр. [5], с. 34) следует, что конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы. Имеем поэтому

Следствие 2. *Пусть группы A и B свободны, а подгруппы H и K являются конечно порожденными. Тогда группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ является финитно аппроксимируемой.*

В работе Г. Баумслага [6] доказано, что группа с одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$ финитно аппроксимируема, если ни один порождающий не входит одновременно в оба слова u и v. Так как такая группа есть свободное произведение двух свободных групп с коммутирующими циклическими подгруппами, этот результат является частным случаем следствия 2.

Напомним, далее, что подгруппу X группы Y называют p-изолированной (где p — простое число), если для любого элемента $y \in Y$ включение $y^p \in X$ возможно лишь при $y \in X$. Если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа X называется π-изолированной, если она p-изолирована для любого числа p из множества π. Напомним еще, что натуральное число n называют π-числом, если каждый простой делитель числа n содержится в множестве π. Наконец, p', как обычно, обозначает множество всех простых чисел, отличных от p.

Легко видеть, что если подгруппа X группы Y отделима в классе конечных p-групп, то она должна быть p'-изолированной. В самом деле, пусть $y^q \in X$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Пусть ρ — гомоморфизм группы Y на группу порядка p^n и пусть целое число r удовлетворяет сравнению $qr \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^n)$. Тогда $y\rho = ((y\rho)^q)^r \in X\rho$, и так как подгруппа X предполагается отделимой, отсюда следует, что $y \in X$.

Если группа Y свободна, а ее подгруппа X циклическая, то нетрудно показать справедливость и обратного утверждения. Действительно, пусть подгруппа X порождается элементом x и пусть элемент z группы Y порождает централизатор Z элемента x. Так как X p'-изолирована, $x = z^{p^k}$ для некоторого целого $k \geq 0$. Пусть y — элемент группы Y, не принадлежащий подгруппе X. Если y не входит в подгруппу Z, то коммутатор $[x, y]$ отличен от единицы, и так как свободные группы аппроксимируемы конечными p-группами, найдется гомоморфизм ρ группы Y на конечную p-группу такой, что $[x, y]\rho \neq 1$. Ясно, что $y\rho \notin X\rho$. Если же $y = z^n$, то число n не делится на p^k, и выбирая гомоморфизм ρ группы Y на конечную p-группу так, чтобы порядок элемента $z\rho$ был не меньше, чем p^k, снова получим $y\rho \notin X\rho$.

Поэтому из теоремы 2 получается следующий "p-вариант" вышеупомянутого результата Г. Баумслага:

Следствие 3. *Пусть группа G задана в образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одним определяющим соотношением $[u, v] = 1$, где u и v — такие непустые несократимые слова, что ни один порождающий a_i не входит одновременно в u и в v. Группа G аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда в свободной группе $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ элементы u и v не являются q-ой степенью ни для какого простого числа q, отличного от p.*

Будет ли произвольная конечно порожденная p'-изолированная подгруппа свободной группы отделимой в классе конечных p-групп, неизвестно. С другой стороны, для подгрупп конечно порожденных нильпотентных групп это утверждение оказывается справедливым, и мы получаем

Следствие 4. *Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p-группами (т. е. (см. [3]) их периодические части являются p-группами), H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда подгруппы H и K групп A и B p'-изолированы.*

Произвольная группа, аппроксимируемая конечными p-группами хотя бы для одного простого числа p, аппроксимируема, разумеется, и нильпотентными группами. Поскольку обратное, вообще говоря, неверно, представляет интерес

Следствие 5. *Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B;\ [H,K] = 1)$ является аппроксимируемой нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p она аппроксимируема конечными p-группами.*

Доказательство следствий 4 и 5 приводится в § 4. Там же указан простой пример, показывающий, что в следствии 5 предположение об отсутствии кручения в группах A и B существенно.

§ 2. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой

В этом параграфе напоминается достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой и доказывается его аналог для аппроксимируемости конечными p-группами. Напомним, прежде всего, ряд понятий и результатов из работы [2].

Будем говорить, что семейство $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ нормальных подгрупп конечного индекса некоторой группы G является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = 1$. Если H — некоторая подгруппа группы G, то фильтрация $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ называется H-фильтрацией при условии, что $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HN_\lambda = H$.

Пусть теперь M и N — некоторые группы, $U \le M$, $V \le N$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм. Подгруппы $R \le M$ и $S \le N$ называются (U, V, φ)-совместимыми, если $(U \cap R)\varphi = V \cap S$.

Если нормальные подгруппы R и S групп M и N соответственно являются (U, V, φ)-совместимыми, то отображение

$$\varphi_{R,S} : UR/R \to VS/S,$$

определяемое по правилу

$$(uR)\varphi_{R,S} = (u\varphi)S \quad (u \in U),$$

корректно определено и является изоморфизмом подгруппы UR/R фактор-группы M/R на подгруппу VS/S фактор-группы N/S. Поэтому можно построить группу

$$G_{R,S} = \Big(M/R * N/S;\ UR/R = VS/S,\ \varphi_{R,S}\Big)$$

— свободное произведение групп M/R и N/S с подгруппами UR/R и VS/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы M на фактор-группу M/R и группы N на фактор-группу N/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы

$$G = (M * N;\ U = V,\ \varphi)$$

на группу $G_{R,S}$.

Следующее утверждение фактически доказано в работе [2]:

Предложение 1. *Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм.*

Пусть $(R_i)_{i \in I}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы M, $(S_j)_{j \in J}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы N. Пусть Λ — подмножество множества $I \times J$, состоящее из всевозможных пар (i, j) таких, что подгруппы R_i и S_j являются (U, V, φ)-совместимыми, и для произвольного элемента $\lambda = (i, j)$ из Λ $R_\lambda = R_i$ и $S_\lambda = S_j$.

Пусть, наконец,

$$G = (M * N;\ U = V,\ \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Тогда если семейство $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является U-фильтрацией и семейство $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является V-фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.

Доказательство предложения 1 происходит по ставшей уже стандартной схеме. Следует заметить, прежде всего, что семейства $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ и $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ согласованно замкнуты относительно конечных пересечений, т.е. для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что

$$R_{\lambda_1} \cap R_{\lambda_2} = R_\lambda \quad \text{и} \quad S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = S_\lambda.$$

Это позволяет для произвольного неединичного элемента g группы G доказать, рассматривая его несократимую запись, существование такого $\lambda \in \Lambda$, что образ элемента g относительно гомоморфизма $\rho_\lambda \ = \rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ отличен от единицы. Остается напомнить, что для любого $\lambda \in \Lambda$ группа $G_\lambda = G_{R_\lambda, S_\lambda}$ является свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп и потому (теорема 2 из [2]) — финитно аппроксимируемой группой.

Эти замечания нам понадобятся ниже при получении аналога предложения 1 для свойства группы быть аппроксимируемой конечными p-группами. Здесь ситуация оказывается более сложной, так как свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p-групп далеко не всегда является группой, аппроксимируемой конечными p-группами. Соответствующий критерий, принадлежащий Г. Хигмену [7], можно сформулировать следующим образом:

Предложение 2. *Пусть M и N — конечные p-группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм. Группа*

$$G = (M * N;\ U = V,\ \varphi)$$

аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда когда существуют главные ряды

$$1 = M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_k = M \quad \text{и} \quad 1 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_l = N$$

групп M и N соответственно такие, что φ отображает множество пересечений $U \cap M_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ на множество пересечений $V \cap N_j$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$

При этом, как обычно, главным рядом группы мы называем нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Легко видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда порядок каждого его фактора равен p.

Предложение 2 подсказывает, что при изучении аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с объединенной подгруппой аналогом (U, V, φ)-совместимости будет служить следующее понятие.

Пусть, как и выше, M и N — произвольные группы с изоморфными подгруппами $U \leq M$ и $V \leq N$ и изоморфизмом $\varphi : U \to V$, p — простое число. Подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ назовем (U, V, φ, p)-совместимыми, если существуют последовательности подгрупп

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_k = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_l = N$$

групп M и N соответственно такие, что

(1) $R_i \trianglelefteq M$ и $S_j \trianglelefteq N$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, k; j = 0, 1, \ldots, l)$;
(2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, k-1; j = 0, 1, \ldots, l-1)$;
(3) изоморфизм φ отображает множество пересечений $U \cap R_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ на множество пересечений $V \cap S_j$ $(j = 0, 1, \ldots, l)$.

Поскольку отображение φ сохраняет включения, из этого определения следует, что (U, V, φ, p)-совместимые подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ являются (U, V, φ)-совместимыми нормальными подгруппами групп M и N соответственно. В частности, для таких подгрупп имеют смысл обозначения и справедливы утверждения, введенные и сформулированные выше. Кроме того, фактор-группы M/R и N/S являются конечными p-группами. Дальнейшие необходимые нам свойства (U, V, φ, p)-совместимых подгрупп приведены в предложениях 3 и 4.

Предложение 3. *Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм. Пусть также R и S — (U, V, φ)-совместимые нормальные подгруппы групп M и N соответственно. Подгруппы R и S являются (U, V, φ, p)-совместимыми тогда и только тогда, когда группа*

$$G_{R,S} = \Big(M/R * N/S;\ UR/R = VS/S,\ \varphi_{R,S}\Big)$$

аппроксимируется конечными p-группами.

В самом деле, если последовательности подгрупп

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_k = M, \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_l = N$$

удовлетворяют условиям (1) и (2) определения (U, V, φ, p)-совместимости, то последовательности

$$1 = R_0/R \leq R_1/R \leq \cdots \leq R_k/R = M/R,$$
$$1 = S_0/S \leq S_1/S \leq \cdots \leq S_l/S = N/S$$

составляют главные ряды фактор-групп M/R и N/S. Наоборот, произвольные главные ряды этих фактор-групп получаются таким образом из подходящих последовательностей подгрупп групп M и N со свойствами (1) и (2). Наконец, поскольку

$$UR/R \cap R_i/R = (U \cap R_i)\, R/R \quad \text{и} \quad VS/S \cap S_j/S = (V \cap S_j)\, S/S,$$

то легко видеть, что равенство $(U \cap R_i)\varphi = V \cap S_j$ имеет место для некоторых i и j тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$(UR/R \cap R_i/R)\, \varphi_{R,S} = VS/S \cap S_j/S.$$

Наше утверждение следует теперь из предложения 2.

Предложение 4. *Пусть в обозначениях предложения 3 подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ являются (U, V, φ, p)-совместимыми и подгруппы $R' \leq M$ и $S' \leq N$ являются (U, V, φ, p)-совместимыми. Тогда и подгруппы $R \cap R'$ и $S \cap S'$ являются (U, V, φ, p)-совместимыми.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} R = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_k = M, \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_l = N \quad \text{и} \\ R' = R'_0 \leq R'_1 \leq \cdots \leq R'_m = M, \quad S' = S'_0 \leq S'_1 \leq \cdots \leq S'_n = N \end{aligned}$$

— последовательности подгрупп из определения (U, V, φ, p)-совместимости. Рассмотрим следующие последовательности нормальных подгрупп групп M и N:

$$R \cap R' = R_0 \cap R'_0 \leq R_0 \cap R'_1 \leq \cdots \leq R_0 \cap R'_m = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_k = M$$

и

$$S \cap S' = S_0 \cap S'_0 \leq S_0 \cap S'_1 \leq \cdots \leq S_0 \cap S'_n = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_l = N.$$

Для каждого $j = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем

$$\begin{aligned} \left(R_0 \cap R'_{j+1}\right) / \left(R_0 \cap R'_j\right) &= \left(R_0 \cap R'_{j+1}\right) / \left(\left(R_0 \cap R'_{j+1}\right) \cap R'_j\right) \\ &\simeq \left(R_0 \cap R'_{j+1}\right) R'_j / R'_j \leq R'_{j+1} / R'_j, \end{aligned}$$

так что порядок фактора $\left(R_0 \cap R'_{j+1}\right) / \left(R_0 \cap R'_j\right)$ равен 1 или p. Аналогичное утверждение справедливо и для каждого фактора $\left(S_0 \cap S'_{j+1}\right)/\left(S_0 \cap S'_j\right)$. Далее, если $\left(U \cap R'_j\right) \varphi = V \cap S'_{j_1}$, то

$$\begin{aligned} \left(U \cap \left(R_0 \cap R'_j\right)\right) \varphi &= \left((U \cap R_0) \cap \left(U \cap R'_j\right)\right) \varphi \\ &= (V \cap S_0) \cap \left(V \cap S'_{j_1}\right) = V \cap \left(S_0 \cap S'_{j_1}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, отбрасывая повторяющиеся члены, мы получим последовательности подгрупп, удовлетворяющие всем требованиям определения (U, V, φ, p)-совместимости. Предложение 4 доказано.

Используя предложения 3 и 4, получаем следующий аналог предложения 1:

Предложение 5. *Пусть в обозначениях предложения 1 Λ_p — множество всех тех $\lambda \in \Lambda$, для которых подгруппы R_λ и S_λ являются (U, V, φ, p)-совместимыми. Тогда если семейство $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_p}$ является U-фильтрацией и семейство $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_p}$ является V-фильтрацией, то группа G аппроксимируема конечными p-группами.*

Закончим этот параграф простым достаточным признаком (U, V, φ, p)-совместимости пары подгрупп.

Предложение 6. *Пусть в обозначениях предложения 3 для нормальных подгрупп конечного p-индекса R и S групп M и N соответственно существуют такие последовательности нормальных подгрупп*

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_n = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_n = N,$$

что для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ подгруппы R_i и S_i (U, V, φ)-совместимы и порядок каждого фактора $(U \cap R_{i+1}) \,/\, (U \cap R_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ равен 1 или p. Тогда подгруппы R и S являются (U, V, φ, p)-совместимыми.

В самом деле, поскольку фактор-группы M/R и N/S являются конечными p-группами, указанные последовательности подгрупп можно уплотнить до таких последовательностей нормальных подгрупп, факторы которых имеют порядок p. Так как для любых уплотняющих подгрупп X и Y при $R_i \leq X \leq R_{i+1}$ и $S_j \leq Y \leq S_{j+1}$ подгруппа $U \cap X$ совпадает с $U \cap R_i$ или $U \cap R_{i+1}$, а подгруппа $V \cap Y$ совпадает с $V \cap S_j$ или $V \cap S_{j+1}$, эти новые последовательности подгрупп удовлетворяют и требованию (3) из определения (U, V, φ, p)-совместимости.

§ 3. Завершение доказательства теорем 1 и 2

Начнем с подробного описания построения группы $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ в терминах свободного произведения с объединенной подгруппой.

Пусть для $i = 1, 2$ H_i — изоморфная копия группы H, K_i — изоморфная копия группы K и

$$\sigma^i : H \to H_i, \quad \tau^i : K \to K_i$$

—фиксированные изоморфизмы. Пусть, далее, $U_i = H_i \times K_i$ — прямое произведение групп H_i и K_i и

$$M = (A * U_1;\ H = H_1,\, \sigma^1)$$

— свободное произведение групп A и U_1 с подгруппами H и H_1, объединенными относительно изоморфизма σ^1,

$$N = (B * U_2;\ K = K_2,\, \tau^2)$$

— свободное произведение групп B и U_2 с подгруппами K и K_2, объединенными относительно изоморфизма τ^2.

Пусть φ — изоморфизм группы U_1 на группу U_2, продолжающий отображения

$$(\sigma^1)^{-1}\sigma^2 : H_1 \to H_2 \quad \text{и} \quad (\tau^1)^{-1}\tau^2 : K_1 \to K_2.$$

Непосредственное применение преобразований Тице показывает, что свободное произведение

$$(M * N;\ U_1 = U_2,\, \varphi)$$

групп M и N с подгруппами U_1 и U_2, объединенными относительно изоморфизма φ, является группой, изоморфной группе G. Все эти обозначения предполагаются фиксированными до конца параграфа.

Лемма 1. *Пусть X и Y — произвольные нормальные подгруппы конечного индекса групп A и B соответственно. Тогда существуют нормальные подгруппы конечного индекса R группы M и S группы N такие, что*

(1) $A \cap R = X$ *и* $B \cap S = Y$*;*

(2) $U_1 \cap R = (X \cap H)\,\sigma^1 \cdot (Y \cap K)\,\tau^1$ *и* $U_2 \cap S = (X \cap H)\,\sigma^2 \cdot (Y \cap K)\,\tau^2$.

В частности, подгруппы R и S являются (U_1, U_2, φ)-совместимыми.

Если группы A и B финитно аппроксимируемы, а их подгруппы H и K финитно отделимы, то для любого неединичного элемента g группы M подгруппы R и S могут быть выбраны так, что $g \notin R$. Если, кроме того, g не лежит в U_1, то подгруппы R и S могут быть выбраны так, что $g \notin U_1R$. Аналогичное утверждение справедливо и для элементов группы N (и ее подгруппы U_2).

Доказательство. Полагаем $C = X \cap H$, $D = Y \cap K$ и для $i = 1, 2$ пусть $C_i = C\sigma^i$, $D_i = D\tau^i$ и $V_i = C_iD_i$. Ясно, что V_i — такая нормальная подгруппа конечного индекса группы U_i, что

$$H_i \cap V_i = C_i \quad \text{и} \quad K_i \cap V_i = D_i.$$

В частности, поскольку $(X \cap H)\sigma^1 = C_1 = H_1 \cap V_1$, нормальные подгруппы X и V_1 групп A и U_1 оказываются (H, H_1, σ^1)-совместимыми, и мы можем рассмотреть группу

$$M_{X,V_1} = \bigl(A/X * U_1/V_1;\ HX/X = H_1V_1/V_1,\ \sigma^1_{X,V_1}\bigr)$$

и гомоморфизм ρ_{X,V_1} группы M на группу M_{X,V_1}, продолжающий естественные отображения A на A/X и U_1 на U_1/V_1.

Группа M_{X,V_1}, будучи свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, является финитно аппроксимируемой, и потому в ней существует нормальная подгруппа Z конечного индекса такая, что

$$A/X \cap Z = 1 = U_1/V_1 \cap Z\,.$$

Если теперь $R = Z\rho^{-1}_{X,V_1}$ — прообраз подгруппы Z относительно отображения ρ_{X,V_1}, то R является нормальной подгруппой конечного индекса группы M, и нетрудно видеть, что

$$A \cap R = X \quad \text{и} \quad U_1 \cap R = V_1.$$

Аналогичным образом можно построить нормальную подгруппу S конечного индекса группы N такую, что

$$B \cap S = Y \quad \text{и} \quad U_2 \cap S = V_2.$$

Очевидно, что подгруппы R и S являются искомыми.

Предположим теперь, что группы A и B являются финитно аппроксимируемыми, а их подгруппы H и K финитно отделимы. Пусть элемент g группы G отличен от единицы и пусть $g = x_1 x_2 \dots x_n$ — несократимая запись этого элемента относительно свободного разложения $M = (A * U_1;\ H = H_1,\ \sigma^1)$ группы M. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$, т.е. $g \in A$ или $g \in U_1$.

Если $g \in A$, то существует нормальная подгруппа X конечного индекса группы A, не содержащая элемента g. Если, вдобавок, $g \notin U_1$, то $g \notin H$, и подгруппу X можно выбрать так, чтобы $g \notin HX$. Пусть еще Y — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы B. Построим для подгрупп X и Y подгруппы R и S групп A и B так, как это сделано выше. Тогда $g \notin R$, поскольку $g \notin X = A \cap R$. Для того, чтобы обеспечить выполнение требования $g \notin U_1 R$ (в случае, когда $g \notin HX$), следует в упомянутом построении соответствующим образом выбрать подгруппу Z. А именно, поскольку $g \notin HX$, то элемент gX группы A/X не входит в объединяемую подгруппу HX/X, а потому — и в сомножитель U_1/V_1 разложения группы M_{X,V_1}. Так как этот сомножитель конечен, подгруппу Z группы M_{X,V_1} можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла дополнительному условию $gX \notin U_1/V_1 \cdot Z$. Очевидно, что тогда $g \notin U_1 R$.

Пусть $g \in U_1$, т.е. $g = h_1 k_1$, где $h_1 \in H_1$ и $k_1 \in K_1$. Так как g — неединичный элемент группы U_1, хотя бы один из элементов h_1 или k_1 отличен от единицы. Поэтому существуют такие нормальные подгруппы X и Y конечных индексов групп A и B соответственно, что или $h_1 \notin (X \cap H)\,\sigma^1$, или $k_1 \notin (Y \cap K)\,\tau^1$, и потому элемент g не входит в подгруппу $(X \cap H)\,\sigma^1 \cdot (Y \cap K)\,\tau^1$ группы U_1. Ясно, что нормальная подгруппа R группы A, построенная по этим подгруппам X и Y (и произвольной Z), не содержит элемента g.

Предположим теперь, что $n > 1$. Тогда элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат попеременно одному из подмножеств $A \setminus H$ и $U_1 \setminus H_1$. Пусть, для определенности, $x_1, x_3, \ldots \in A \setminus H$, $x_2, x_4, \ldots \in U_1 \setminus H_1$. Так как подгруппа H группы A предполагается финитно отделимой, в A найдется нормальная подгруппа конечного индекса X такая, что элементы $x_1, x_3, \ldots$ не входят в подгруппу HX. Так как K_1-проекции элементов $x_2, x_4, \ldots$ отличны от единицы, а группа B финитно аппроксимируема, в ней существует нормальная подгруппа конечного индекса Y, не содержащая τ^1-прообразов этих проекций. Тогда запись элемента

$$g\rho_{X,V_1} = \left(x_1 \rho_{X,V_1}\right) \left(x_2 \rho_{X,V_1}\right) \dots \left(x_n \rho_{X,V_1}\right)$$

является несократимой в свободном разложении группы

$$M_{X,V_1} = \left(A/X * U_1/V_1;\ HX/X = H_1 V_1/V_1,\ \sigma^1_{X,V_1}\right).$$

В частности, элемент $g\rho_{X,V_1}$ этой группы отличен от единицы и не входит в ее конечную подгруппу U_1/V_1. Выбирая подгруппу Z так, чтобы этот элемент не вошел в подгруппу $U_1/V_1 \cdot Z$, получим нормальный делитель R с требуемым свойством.

Достаточность условий теоремы 1 является теперь очевидным следствием леммы 1 и предложения 1.

Переходя к доказательству теоремы 2, докажем, прежде всего, одно простое следствие из теоремы Хигмена (см. предложение 2 из § 2).

Лемма 2. *Пусть P и Q — конечные p-группы, $R \leq P$, $S \leq Q$ и $\varphi : R \to S$ — изоморфизм. Предположим, что подгруппа S является прямым множителем группы Q, т.е. $Q = S \times T$ для некоторой ее подгруппы T. Тогда группа*

$$F = (P * Q;\ R = S,\, \varphi)$$

аппроксимируема конечными p-группами.

Доказательство. Пусть

$$1 = P_0 \leq P_1 \leq \cdots \leq P_r = P$$

— произвольный главный ряд группы P и пусть $S_i = (R \cap P_i)\,\varphi$ $(i = 0, 1, \ldots r)$. Возьмем еще какой-либо главный ряд

$$1 = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_s = T$$

группы T. Тогда последовательность подгрупп

$$1 = S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_r = ST_0 \leq ST_1 \leq \cdots \leq ST_s = Q$$

является нормальным рядом группы Q, семейство пересечений членов которого с подгруппой S совпадает с семейством подгрупп S_i. Так как $ST_{j+1}/ST_j \simeq T_{j+1}/T_j$, после отбрасывания повторяющихся членов в последовательности
$S_0, S_1, \ldots, S_r$ получим главный ряд группы Q, который вместе с взятым вначале главным рядом группы P удовлетворяет требованиям предложения 2.

Лемма 3. *Пусть группы A и B аппроксимируемы конечными p-группами, а их подгруппы H и K отделимы в классе конечных p-групп. Тогда для любого элемента g группы M такого, что $g \neq 1$ или $g \notin U_1$, в группе M найдется нормальная подгруппа R, (U_1, U_2, φ, p)-совместимая с некоторой нормальной подгруппой S группы N и такая, что $g \notin R$ или $g \notin U_1 R$ соответственно. Аналогичное утверждение справедливо и для группы N и ее подгруппы U_2.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если подгруппы X и Y в лемме 1 имеют конечный p-индекс в группах A и B, то подгруппы R и S можно выбрать также имеющими p-индекс. В самом деле, в этом случае группа M_{X,V_1} оказывается в силу леммы 2 аппроксимируемой конечными p-группами, и потому подгруппу Z можно считать имеющей p-индекс.

Таким образом, если g — произвольный элемент группы M такой, что $g \neq 1$ или $g \notin U_1$, то существует пара (U_1, U_2, φ)-совместимых нормальных подгрупп $\overline{R}_0$ и $\overline{S}_0$ конечного p-индекса групп M и N такая, что $g \notin R$ или $g \notin U_1R$ соответственно. При этом если $X = A \cap \overline{R}_0$ и $Y = B \cap \overline{S}_0$, то

$$U_1 \cap \overline{R}_0 = (X \cap H)\,\sigma^1 \cdot (Y \cap K)\,\tau^1 \text{ и } U_2 \cap \overline{S}_0 = (X \cap H)\,\sigma^2 \cdot (Y \cap K)\,\tau^2.$$

Так как фактор-группы A/X и B/Y являются конечными p-группами, то существуют последовательности

$$X = X_0 \leq X_1 \leq \cdots \leq X_k = A \quad \text{и} \quad Y = Y_0 \leq Y_1 \leq \cdots \leq Y_l = B$$

нормальных подгрупп групп A и B, все факторы X_{i+1}/X_i и Y_{j+1}/Y_j которых имеют порядок p. В соответствии с леммой 1 и замечанием, сделанным выше, выберем теперь для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ пару таких нормальных подгрупп конечного p-индекса $\overline{R}_i$ группы M и $\overline{S}_i$ группы N, что

$$U_1 \cap \overline{R}_i = (X_i \cap H)\,\sigma^1 \cdot (Y_0 \cap K)\,\tau^1 \text{ и } U_2 \cap \overline{S}_i = (X_i \cap H)\,\sigma^2 \cdot (Y_0 \cap K)\,\tau^2.$$

Аналогично, для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$ пусть $\overline{R}_{k+j}$ и $\overline{S}_{k+j}$ — такие нормальные подгруппы конечного p-индекса групп M и N, что

$$\begin{aligned} U_1 \cap \overline{R}_{k+j} &= (X_k \cap H)\,\sigma^1 \cdot (Y_j \cap K)\,\tau^1 = H_1 \cdot (Y_j \cap K)\,\tau^1 \quad \text{и} \\ U_2 \cap \overline{S}_{k+j} &= (X_k \cap H)\,\sigma^2 \cdot (Y_j \cap K)\,\tau^2 = H_2 \cdot (Y_j \cap K)\,\tau^2. \end{aligned}$$

Будем считать при этом, что $\overline{R}_{k+l} = M$ и $\overline{S}_{k+l} = N$. Отметим, что пересечения $U_1 \cap \overline{R}_i$ и $U_2 \cap \overline{S}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k+l)$ образуют в группах U_1 и U_2 возрастающие последовательности нормальных подгрупп, все факторы которых имеют порядок, равный 1 или p. Полагая теперь для любого номера $i = 0, 1, \ldots, k + l$

$$R_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{R}_j \quad \text{и} \quad S_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{S}_j,$$

получим две последовательности

$$R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_{k+l} = M \quad \text{и} \quad S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_{k+l} = N$$

нормальных подгрупп конечного p-индекса групп M и N. Так как для любого $i = 0, 1, \ldots, k + l$ имеют место равенства $U_1 \cap R_i = U_1 \cap \overline{R}_i$ и $U_2 \cap S_i = U_2 \cap \overline{S}_i$, из предложения 6 следует, что подгруппы $R = R_0$ и $S = S_0$ являются (U_1, U_2, φ, p)-совместимыми. Наконец, включение $R_0 \subseteq \overline{R}_0$ говорит о том, что подгруппа R искомая.

Теорема 2 следует из леммы 3 и предложения 5.

§ 3. Доказательство следствий 4 и 5

Как было отмечено во Введении, для доказательства следствия 4 достаточно установить справедливость следующего утверждения:

Пусть Y — конечно порожденная нильпотентная группа и X — p'-изолированная подгруппа группы Y. Тогда подгруппа X отделима в классе конечных p-групп.

В самом деле, утверждение очевидно, если подгруппа X нормальна в Y, так как в этом случае фактор-группа Y/X, являясь нильпотентной группой без p'-кручения, аппроксимируема конечными p-группами по теореме Грюнберга [3]. Далее, воспользуемся индукцией по длине ряда

$$X = X_0 \leq X_1 \leq \cdots \leq X_k = Y$$

последовательных нормализаторов подгруппы X для доказательства того, что для любого элемента $y \in Y$, не принадлежащего подгруппе X, существует такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы Y, что $y \notin XN$.

Так как все члены X_i ряда нормализаторов являются p'-изолированными подгруппами (см. напр. [8], теорема 4.11), по индуктивным соображениям можно считать, что $y \in X_1$. Поскольку $X \trianglelefteq X_1$, ввиду замечания, сделанного выше, существует нормальная подгруппа N_1 конечного p-индекса группы X_1 такая, что $y \notin XN_1$. Предположим, что для некоторого номера i, $1 \leq i < k$, уже построена такая нормальная подгруппа N_i конечного p-индекса группы X_i, что $y \notin XN_i$. Покажем, что тогда можно найти нормальную подгруппу N_{i+1} конечного p-индекса группы X_{i+1} такую, что $y \notin XN_{i+1}$. Тем самым существование искомой подгруппы N будет доказано.

Так как подгруппа X_i конечно порождена, пересечение C всех подгрупп, сопряженных с N_i в группе X_{i+1}, имеет конечный индекс в группе X_i, являющийся, к тому же, p-числом. Из p'-изолированности подгруппы X_i следует поэтому p'-изолированность нормальной подгруппы C группы X_{i+1}, а потому — и аппроксимируемость конечными p-группами фактор-группы X_{i+1}/C. Элемент yC этой фактор-группы не входит в ее конечную подгруппу XC/C, и потому найдется нормальная подгруппа N_{i+1}/C конечного p-индекса группы X_{i+1}/C такая, что yC не входит в подгруппу $XC/C \cdot N_{i+1}/C = XN_{i+1}/C$. Таким образом, N_{i+1} — такая нормальная подгруппа конечного p-индекса группы X_{i+1}, что $y \notin XN_{i+1}$.

Перейдем теперь к доказательству следствия 5. Поскольку конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируема конечными p-группами для любого простого числа p [3], ввиду следствия 4 нам достаточно показать, что если свободное произведение $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ нильпотентных групп A и B с коммутирующими неединичными подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппы H и K групп A и B p'-изолированы.

Предположим сначала, что в группе A существуют такие элементы a и b, не принадлежащие подгруппе H, что для некоторых различных простых чисел p и q элементы a^p и b^q входят в H. Тогда в группе $M = (A * U_1;\ H = H_1,\ \sigma^1)$ (мы сохраняем здесь все обозначения из § 2) имеют место равенства $a^p = (k^{-1}ak)^p$ и $b^q = (k^{-1}bk)^q$, где k — неединичный элемент из подгруппы K_1. Поэтому (см.напр. [8], лемма 4.6) при любом гомоморфизме группы M в нильпотентную группу порядок образа коммутатора $[a, k]$ является p-числом, а порядок образа коммутатора $[b, k]$

является q-числом, и так как в нильпотентной группе элементы взаимно простых порядков коммутируют, при любом гомоморфизме группы M в нильпотентную группу элемент $w = [[a, k], [b, k]]$ переходит в единицу. С другой стороны, поскольку, как легко понять, элемент ba^{-1} не входит в подгруппу H, запись этого элемента

$$w = k^{-1}a^{-1}k\,a\,k^{-1}b^{-1}k\,\left(b\,a^{-1}\right)\,k^{-1}a\,k\,b^{-1}k^{-1}b\,k$$

является несократимой в разложении группы $M = (A * U_1;\ H = H_1,\, \sigma^1)$, и потому $w \neq 1$.

Таким образом мы видим, что если группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ аппроксимируема нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппа H группы A является p'-изолированной. Точно так же и подгруппа K группы B q'-изолирована для подходящего простого числа q. Если при этом H не является q'-изолированной, а K не является p'-изолированной, то $p \neq q$ и найдутся элементы $a \in A \setminus H$ и $b \in B \setminus K$ такие, что $a^p \in H$ и $b^q \in K$.

Несократимая запись элемента $[a, k]$ группы M, где k — неединичный элемент из подгруппы K_1, имеет длину 4, и потому этот элемент не входит в подгруппу U_1. Аналогично, элемент $[b, h]$ группы N (где h неединичный элемент из группы H_2) не лежит в ее подгруппе U_2. Поэтому $v = [[a, k], [b, h]]$ — отличный от единицы элемент группы G. Но как и выше образы коммутаторов $[a, k]$ и $[b, h]$ при любом гомоморфизме группы G в нильпотентную группу являются $p-$ и q-элементом соответственно, и потому образ элемента v при любом таком гомоморфизме равен 1.

Итак, подгруппы H и K p'-изолированы для некоторого простого числа p, и следствие 5 доказано.

В заключение приведем простой пример, показывающий, что отсутствие кручения в группах A и B в доказанном следствии существенно.

Пусть G — группа с представлением образующими и определяющими соотношениями вида

$$G = \langle a, b, c;\ a^2 = b^2 = c^3 = [a, c] = [b, c] = 1\rangle.$$

Тогда $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$, где $A = \langle a, c;\ a^2 = c^3 = [a, c] = 1\rangle$ — прямое произведение двух циклических групп порядков 2 и 3, $B = \langle b;\ b^2 = 1\rangle$ — циклическая группа порядка 2, подгруппа H порождается элементом c и $K = B$.

Ясно, что группа G не является аппроксимируемой конечными p-группами ни для какого простого числа p. Легко, тем не менее, видеть, что она аппроксимируема нильпотентными группами. В самом деле, подгруппа H совпадает с центром группы G, и фактор-группа $G/H = \langle a, b;\ a^2 = b^2 = 1\rangle$, будучи свободным произведением двух циклических групп порядка 2, аппроксимируема конечными 2-группами, а потому — и нильпотентными группами. Поэтому если неединичный элемент $g \in G$ не входит в подгруппу H, то существование гомоморфизма группы G на нильпотентную группу, отделяющего g от 1, очевидно. Если $g \in H$, то требуемым гомоморфизмом является отображение группы G на группу A, тождественное на элементах a и c и переводящее b в единицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
2. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
3. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. V. 7. P. 29–62.
4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
5. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
6. *Baumslag G.* Free subgroups of certain one-relator groups defined by positive words // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1983. V. 93, N 2. P. 247–251.
7. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
8. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Пер. сб-к переводов иностр. статей. 1968. Т. 12, N 1. С. 3–36.