Научные труды ИвГУ. Математика. Вып. 2
Иваново, 1999

УДК 512.543

Е. Д. Логинова

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Доказано, что свободное произведение финитно аппроксимируемых (аппроксимируемых конечными p-группами) групп A и B с централизованными собственными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой (аппроксимируемой конечными p-группами) тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K финитно отделимы (отделимы в классе конечных p-групп).

1. Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B. Фактор-группа $(A * B;\ [H, K] = 1)$ свободного произведения $A * B$ по нормальному замыканию взаимного коммутанта $[H, K]$ подгрупп H и K называется свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K, а фактор-группа $(A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$ группы $A * B$ по нормальному замыканию взаимных коммутантов $[A, K]$ подгрупп A и K и $[H, B]$ подгрупп H и B называется свободным произведением групп A и B с централизованными подгруппами H и K [2, с. 230].

Условия финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с коммутирующими подгруппами были анонсированы в работе [1]. Здесь будет показано, что аналогичные утверждения имеют место и для свободного произведения с централизованными подгруппами. Заметим сразу же, что в тех случаях, когда подгруппа H совпадает с группой A или подгруппа K совпадает с группой B, свободное произведение $G = (A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является прямым произведением групп A и B и вопросы об аппроксимируемости группы G тривиальны. В невырожденном случае имеет место

Теорема. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые (аппроксимируемые конечными p-группами) группы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Группа*

$$G = (A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$$

финитно аппроксимируема (аппроксимируема конечными p-группами) тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми (отделимыми в классе конечных p-групп).

Отметим два следствия этой теоремы, аналогичные тем, которые приводятся в [1]. Так как все конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы, имеет место

Следствие 1. *Свободное произведение двух свободных групп с централизованными конечно порожденными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Точно так же финитная отделимость подгрупп полициклической группы дает

Следствие 2. *Свободное произведение двух полициклических групп с централизованными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

2. Доказательство теоремы начнем с описания того, как можно построить группу $G = (A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$ с помощью конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой.

Пусть H_1 и K_1 — изоморфные копии групп H и K соответственно и $\alpha : H \to H_1$ и $\beta : K \to K_1$ — фиксированные изоморфизмы. Пусть, далее, $M = A \times K_1$ — прямое произведение групп A и K_1 и $U = H \times K_1$ — подгруппа группы M, порожденная подгруппами H и K_1. Аналогично, пусть $N = H_1 \times B$ — прямое произведение групп H_1 и B и $V = H_1 \times K$ — подгруппа группы N, порожденная подгруппами H_1 и K. Наконец, пусть $\varphi = \alpha \times \beta^{-1}$ — изоморфизм группы U на группу V. Тогда свободное произведение $(M * N;\ U = V, \varphi)$ групп M и N с подгруппами U и V, объединенными относительно изоморфизма φ, является группой, изоморфной группе G.

Необходимость условий теоремы теперь почти очевидна. Пусть, например, a — такой элемент группы A, не принадлежащий подгруппе H, что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы A на конечную группу (или на конечную p-группу) содержится в образе подгруппы H. Если еще b — произвольный элемент группы B, не входящий в подгруппу K, то элемент $w = [a, b]$ группы G отличен от 1, т. к. его несократимая запись в разложении группы $G = (M * N;\ U = V, \varphi)$ имеет длину 4. Очевидно, с другой стороны, что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы G на конечную группу (или, соответственно, на конечную p-группу) равен 1.

Переходя к доказательству достаточности условий теоремы, заметим сначала, что естественные вложения групп A и B в прямое произведение $A \times B$ этих групп определяют гомоморфизм σ группы G на группу $A \times B$. Поскольку, как легко видеть, $M \cap \operatorname{Ker} \sigma = N \cap \operatorname{Ker} \sigma = 1$, в силу теоремы Х. Нейманн [1, с. 254] ядро этого гомоморфизма является свободной группой. Таким образом, если группы A и B являются конечными (конечными p-группами), то группа G является расширением свободной группы при помощи конечной (конечной p-группы) и потому финитно аппроксимируема (аппроксимируема конечными p-группами).

Для произвольных нормальных подгрупп X группы A и Y группы B полагаем $R = X \cdot (Y \cap K)\beta$ и $S = (X \cap H)\alpha \cdot Y$. Тогда R и S являются нормальными подгруппами групп M и N соответственно, причем $(U \cap R)\varphi = V \cap S$. Поэтому изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi}$ подгруппы UR/R фактор-группы M/R на подгруппу VS/S фактор-группы B/S, и мы можем построить свободное произведение $G(X, Y)$ групп M/R и N/S с подгруппами UR/R и VS/S, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\varphi}$. Эта группа является, очевидно, свободным произведением групп A/X и B/Y с централизованными подгруппами HX/X и KY/Y. Естественные отображения групп M и N на фактор-группы M/R и N/S соответственно продолжаемы до гомоморфизма $\rho(X, Y)$ группы G на группу $G(X, Y)$, и поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что при выполнении условий теоремы для любого неединичного элемента $g \in G$ найдутся такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса (конечного p-индекса) групп A и B соответственно, что $g\rho(X, Y) \neq 1$.

Покажем сначала, что если элемент $g \neq 1$ лежит в одном из свободных сомножителей группы $G = (M * N;\ U = V, \varphi)$, то для подходящих X

и Y $g\rho(X,Y) \neq 1$, а если, сверх того, элемент g не входит соответственно в подгруппу U или V, то подгруппы X и Y можно выбрать так, что $g\rho(X,Y) \notin U\rho(X,Y)$. Пусть, в самом деле, $g \in M$, тогда $g = ac_1$, где $a \in A$ и $c_1 \in K_1$. Так как $g \neq 1$, то или $a \neq 1$ или $c_1 \neq 1$. Выбирая в первом случае подгруппу X не содержащей a и Y произвольной, а во втором — X произвольной и Y не содержащей элемента $c = c_1\beta^{-1}$, для соответствующей подгруппы R будем иметь, очевидно, $g \notin R$. Если $g \notin U$, то $a \notin H$, и можно (в соответствии с предположениями) выбрать подгруппу X так, чтобы $a \notin HX$. Легко видеть, что тогда при произвольном выборе подгруппы Y элемент g не войдет в подгруппу UR. Поскольку действие гомоморфизма $\rho(X,Y)$ на подгруппе M совпадает с действием естественного гомоморфизма M на M/R, подгруппы X и Y являются искомыми. Случай $g \in N$ рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что несократимая запись $g = g_1g_2\cdots g_n$ элемента g имеет длину $n > 1$. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ элемент g_i входит в одну из подгрупп M или N и не входит ни в подгруппу U, ни в подгруппу V. Поэтому, как показано в предыдущем абзаце, для каждого номера i найдется пара подгрупп X_i, Y_i такая, что для соответствующих подгрупп R_i и S_i элемент g_i не входит в подгруппу UR_i или в подгруппу VS_i. Пусть $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$ и $Y = \bigcap_{i=1}^n Y_i$. Легко видеть, что если R и S — подгруппы групп M и N, соответствующие паре подгрупп X и Y, то $R = \bigcap_{i=1}^n R_i$ и $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$. Поэтому для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ элемент g_i не входит в подгруппу UR или VS. Это означает, что запись

$$g\rho(X,Y) = (g_1\rho(X,Y))(g_2\rho(X,Y))\cdots(g_n\rho(X,Y))$$

элемента $g\rho(X,Y)$ группы $G(X,Y)$ является несократимой, и потому в этой группе $g\rho(X,Y) \neq 1$. Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. *Логинова Е. Д.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддеева: Тез. докл. СПб., 1997. С. 235 – 236.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М., 1974. 455 с.