УДК 512.54

Е. Д. Логинова

ФИНИТНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С КОММУТИРУЮЩИМИ ПОДГРУППАМИ

Доказано, что все циклические подгруппы свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами финитно отделимы тогда и только тогда, когда в сомножителях финитно отделимы коммутирующие и все циклические подгруппы.

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B. Группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$, порождаемая образующими групп A и B и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[h, k] = 1$ $(h \in H$, $k \in K)$ называется свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K (см. [2], с. 230).

Критерий финитной аппроксимируемости группы G был найден в работе [1]: если подгруппы H и K неединичны, то группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K являются финитно отделимыми в группах A и B соответственно. Естественный вопрос о том, при каких условиях все (конечно порожденные) подгруппы такой группы являются финитно отделимыми, не имеет столь же однозначного ответа. Легко видеть, в самом деле, что уже свободное произведение двух свободных групп с коммутирующими нециклическими подгруппами содержит неотделимую конечно порожденную подгруппу. Действительно, подгруппы H и K группы G порождают их прямое произведение, а в прямом произведении двух свободных групп ранга 2 существует неотделимая конечно порожденная подгруппа (см. [3]). Если же рассматривать лишь циклические подгруппы группы G, положение становится более определенным, а именно здесь будет доказана

Теорема. *Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — подгруппы групп A и*

B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то и все циклические подгруппы группы $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ финитно отделимы.

Заметим, что поскольку группа, все циклические подгруппы которой финитно отделимы, должна быть финитно аппроксимируемой, из упомянутого результата работы [1] следует, что сформулированное в теореме условие является и необходимым. Отметим также, что из этой теоремы следует, в частности, что все циклические подгруппы группы $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ финитно отделимы, если группы A и B являются полициклическими или группы A и B свободны и подгруппы H и K конечно порождены.

Для доказательства теоремы необходимо напомнить ряд понятий и утверждений, используемых при изучении финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой и восходящих к работе [4].

Будем говорить, что семейство $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп конечного индекса некоторой группы G является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$. Если H — некоторая подгруппа группы G, то фильтрация $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ называется H-фильтрацией при условии, что $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$.

Пусть, далее, M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм. Подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ называются (U, V, φ)-совместимыми, если $(U \cap R)\varphi = V \cap S$. Семейства $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ и $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп конечного индекса групп M и N соответственно назовем максимальными (U, V, φ)-совместимыми, если для любого $\lambda \in \Lambda$ подгруппы R_λ и S_λ являются (U, V, φ)-совместимыми и для любых (U, V, φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S конечного индекса групп M и N соответственно существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$. Существование таких семейств и их замкнутость относительно конечных пересечений легко устанавливается.

Предложение 2 из работы [4] фактически утверждает, что если $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ и $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — максимальные (U, V, φ)-совместимые семейства нормальных подгрупп конечного индекса групп M и N и $G = (M * N;\ U = V,\ \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, то для финитной аппроксимируемости группы G достаточно потребовать, чтобы семейство $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ являлось U-фильтрацией и семейство $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ являлось V-фильтрацией. Некоторая модификация доказательства этого утверждения приводят к следующему результату:

Предложение 1. *Пусть $G = (M * N;\ U = V,\ \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, и пусть $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — максимальные (U, V, φ)-совместимые семейства нормальных подгрупп конечного индекса групп M и N. Предположим, что семейство $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ является U-фильтрацией, а также — A-фильтрацией для любой циклической подгруппы A группы M и семейство $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ является V-фильтрацией , а также — B-фильтрацией для любой циклической подгруппы B группы N. Тогда все циклические подгруппы группы G финитно отделимы.*

Напомним, далее, что строение группы $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ может быть описано в терминах конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой следующим образом.

Пусть для $i = 1, 2$ H_i — изоморфная копия группы H, K_i — изоморфная копия группы K и $\sigma^i : H \to H_i$ и $\tau^i : K \to K_i$ –фиксированные изоморфизмы. Пусть, далее, $U_i = H_i \times K_i$ — прямое произведение групп H_i и K_i и $M = (A * U_1;\ H = H_1,\ \sigma^1)$ — свободное произведение групп A и U_1 с подгруппами H и H_1, объединенными относительно изоморфизма σ^1, $N = (B * U_2;\ K = K_2,\ \tau^2)$ — свободное произведение групп B и U_2 с подгруппами K и K_2, объединенными относительно изоморфизма τ^2. Тогда группа G изоморфна свободному произведению групп M и N с подгруппами U_1 и U_2, объединенными относительно изоморфизма φ, продолжающего отображения

$$(\sigma^1)^{-1}\sigma^2 : H_1 \to H_2 \quad \text{и} \quad (\tau^1)^{-1}\tau^2 : K_1 \to K_2.$$

Предложение 2. *Для любых нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B соответственно существуют (U_1, U_2, φ)-совместимые нормальные подгруппы конечного индекса R группы M и S группы N такие, что $A \cap R = X$ и $B \cap S = Y$. Более того,*

1) если группы A и B финитно аппроксимируемы, а их подгруппы H и K финитно отделимы, то для любого неединичного элемента g группы M (группы N) подгруппы R и S могут быть выбраны так, что $g \notin R$ (соответственно, $g \notin S$), а если, кроме того, g не лежит в U_1 (в U_2), то подгруппы R и S могут быть выбраны так, что $g \notin U_1R$ (соответственно, $g \notin U_2S$);

2) если, к тому же, все циклические подгруппы групп A и B финитно отделимы, то для любой циклической подгруппы W группы M (группы N) и элемента $g \in M \setminus W$ (соответственно, $g \in N \setminus W$) подгруппы R и S можно выбрать так, что $g \notin WR$ (соответственно, $g \notin WS$).

Очевидно, что в силу предложения 1 наша теорема является непосредственным следствием предложения 2.

Доказательство предложения 2 аналогично доказательству леммы 1 из работы [1], причем утверждение 1) содержится непосредственно в формулировке этой леммы. Приведем соответствующие рассуждения.

Пусть X и Y — произвольные нормальные подгруппы конечного индекса групп A и B соответственно. Полагаем $C = X \cap H$, $D = Y \cap K$ и для $i = 1, 2$ пусть $C_i = C\sigma^i$, $D_i = D\tau^i$ и $V_i = C_i D_i$. Ясно, что V_i — такая нормальная подгруппа конечного индекса группы U_i, что

$$H_i \cap V_i = C_i \quad \text{и} \quad K_i \cap V_i = D_i.$$

В частности, поскольку $(X \cap H)\sigma^1 = C_1 = H_1 \cap V_1$, нормальные подгруппы X и V_1 групп A и U_1 оказываются (H, H_1, σ^1)-совместимыми, и мы можем, как обычно, рассмотреть свободное произведение

$$M_{X,V_1} = \left(A/X * U_1/V_1;\ HX/X = H_1V_1/V_1,\ \sigma^1_{X,V_1}\right)$$

групп A/X и U_1/V_1 с подгруппами HX/X и H_1V_1/V_1, объединенными в силу изоморфизма σ^1_{X,V_1}, переводящего элемент hX в элемент $(h\sigma^1)V_1$ ($h \in H$). Пусть еще ρ_{X,V_1} обозначает гомоморфизм группы M на группу M_{X,V_1}, продолжающий естественные отображения A на A/X и U_1 на U_1/V_1.

Группа M_{X,V_1}, будучи свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, является финитно аппроксимируемой, и потому в ней существует нормальная подгруппа Z конечного индекса такая, что $A/X \cap Z = 1 = U_1/V_1 \cap Z$. Тогда прообраз $R = Z\rho^{-1}_{X,V_1}$ подгруппы Z относительно отображения ρ_{X,V_1} является нормальной подгруппой конечного индекса группы M, причем $A \cap R = X$ и $U_1 \cap R = V_1$. Аналогично строится нормальная подгруппа S конечного индекса группы N такая, что $B \cap S = Y$ и $U_2 \cap S = V_2$, и очевидно, что подгруппы R и S являются (U_1, U_2, φ)-совместимыми.

Покажем теперь, что для любой циклической подгруппы W группы M и не принадлежащего ей элемента $g \in M$ подгруппы X, Y и Z можно подобрать так, чтобы соответствующие подгруппы R и S удовлетворяли заключению утверждения 2). Заметим сразу же, что для этого достаточно указать такие подгруппы X и Y, что в группе M_{X,V_1} элемент $g\rho_{X,V_1}$ не принадлежит подгруппе $W\rho_{X,V_1}$. Действительно, поскольку все конечно порожденные подгруппы группы M_{X,V_1} (как свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных групп) финитно отделимы, в этом случае подгруппу Z можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла условиям, указанным выше, и подгруппа $(W\rho_{X,V_1})Z$ не содержала бы элемента $g\rho_{X,V_1}$. Очевидно, что тогда для соответствующей подгруппы R будем иметь $g \notin WR$.

Из финитной отделимости подгрупп H и K групп A и B следует, что для любых конечных последовательностей элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ группы A, не принадлежащих подгруппе H, и элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ группы U_1, не принадлежащих подгруппе H_1, в группах A и B можно выбрать такие нормальные подгруппы конечного индекса X и Y, что каждый элемент x_i не входит в подгруппу HX и каждый элемент y_j не входит в подгруппу H_1V_1. Отсюда, в свою очередь, следует, что для любой конечной последовательности элементов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ группы M в группах A и B существуют такие нормальные подгруппы конечного индекса X и Y, что длина каждого элемента $f_i\rho_{X,V_1}$ группы M_{X,V_1} совпадает с длиной элемента f_i, причем если f_i циклически несократим, то и $f_i\rho_{X,V_1}$ является циклически несократимым.

Без потери общности можно предполагать, что порождающий элемент w подгруппы W является циклически несократимым. Рассмотрим сначала случай, когда длина m этого элемента больше 1. Обозначим еще длину элемента g через n и в соответствии с замечанием в предыдущем абзаце выберем подгруппы X и Y так, чтобы в соответствующей группе M_{X,V_1} элементы $\widehat{w} = w\rho_{X,V_1}$ и $\widehat{g} = g\rho_{X,V_1}$ имели длину m и n соответственно. Если для некоторого целого числа k выполнено равенство $\widehat{g} = \widehat{w}^k$, то ввиду циклической несократимости элемента $\widehat{w}$ мы должны иметь $n = m|k|$. Поэтому если n не делится на m, указанные подгруппы X и Y являются искомыми. Пусть $n = ml$. Так как элемент g не принадлежит подгруппе W, элементы gw^l и gw^{-l} группы M отличны от единицы. В этом случае искомые подгруппы X и Y получаются, если выбирать их в соответствии с предыдущим абзацем так, чтобы при переходе к образам сохранялась длина и этих элементов. Аналогично рассматривается случай, когда $m = 1$ и $n > 1$: здесь подгруппы X и Y достаточно выбрать так, чтобы сохранить длину образа элемента g.

Остается рассмотреть случай, когда элементы g и w принадлежат сомножителям разложения группы M. Предположим сначала, что $w \in A$. Если и элемент g лежит в подгруппе A, то из отделимости циклических подгрупп этой группы следует, что $g \notin AX$ для подходящей нормальной подгруппы X конечного индекса группы A. Очевидно, что подгруппа X вместе с произвольной нормальной подгруппой Y конечного индекса группы B составляет искомую пару подгрупп. Если же элемент g лежит в подгруппе U_1, но не входит в подгруппу A, то он не входит в подгруппу H_1

и потому имеет вид $g = h_1k_1$, где $h_1 \in H_1$, $k_1 \in K_1$ и $k_1 \neq 1$. Так как группа B финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа Y конечного индекса, не содержащая τ^1-прообраза элемента k_1. Очевидно, что тогда при любой нормальной подгруппе X конечного индекса группы A образ относительно отображения ρ_{X,V_1} элемента g не принадлежит образу подгруппы A и, тем более, — образу подгруппы W.

Предположим, наконец, что элемент w лежит в подгруппе U_1, так что $w = xy$, где $x \in H_1$, $y \in K_1$. Если $g \in A \setminus U_1$, то $g \notin H$, и искомую пару подгрупп X и Y можно получить, выбрав X так, чтобы $g \notin HX$, и взяв Y произвольной. Пусть $g \in U_1$ и пусть снова $g = h_1k_1$, где $h_1 \in H_1$ и $k_1 \in K_1$. Если элемент h_1 не принадлежит циклической подгруппе (x), порожденной элементом x, то для подходящей нормальной подгруппы X конечного индекса группы A будем иметь $h_1 \notin (x)X$, и легко видеть, что X вместе с произвольной нормальной подгруппой Y группы B составляет искомую пару. Аналогично рассматривается случай, когда элемент k_1 не принадлежит циклической подгруппе, порожденной элементом y. Остается предположить, что $h_1 = x^r$ и $k_1 = y^s$ для некоторых целых чисел r и s. Здесь придется отдельно рассмотреть три случая в зависимости от порядков элементов x и y.

Предположим сначала, что элементы x и y имеют конечные порядки m и n соответственно. Ввиду финитной аппроксимируемости групп A и B в них можно найти такие нормальные подгруппы конечного индекса X и Y соответственно, по модулю которых элементы $x(\sigma^1)^{-1}$ и $y(\tau^1)^{-1}$ имеют те же порядки m и n. Эти подгруппы являются искомыми, так как если для некоторого целого числа t имеет место сравнение $g \equiv w^t \pmod{V_1}$, то должны выполняться и сравнения $(x(\sigma^1)^{-1})^r \equiv (x(\sigma^1)^{-1})^t \pmod X$ и $(y(\tau^1)^{-1})^s \equiv (y(\tau^1)^{-1})^t \pmod Y$, которые равносильны сравнениям $r \equiv t \pmod m$ и $s \equiv t \pmod n$ соответственно. Но тогда выполнено равенство $g = h_1k_1 = x^ry^s = x^ty^t = w^t$, которое противоречит условию $g \notin W$.

Для рассмотрения двух оставшихся случаев нам потребуется следующее легко проверяемое замечание: если все циклические подгруппы некоторой группы F финитно отделимы, то для любого элемента бесконечного порядка $f \in F$ и любого целого числа $m > 1$ найдется нормальная подгруппа N конечного индекса группы F, порядок элемента f по модулю которой делится на m.

Пусть теперь в точности один из элементов x и y имеет конечный порядок; пусть для определенности порядок элемента x бесконечен, а $|y| = n$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, что порядок элемента $x(\sigma^1)^{-1}$ по модулю X

делится на n, а порядок элемента $y(\tau^1)^{-1}$ по модулю Y равен n. Тогда из сравнения $g \equiv w^t \pmod{V_1}$ следует, что $r \equiv s \pmod{n}$, откуда снова в группе M получаем противоречащее предположению равенство $g = h_1k_1 = x^r y^s = x^r y^r = w^r$.

Пусть, наконец, порядки элементов x и y бесконечны. Так как $r - s \neq 0$, найдется целое число $n > 0$, не делящее разности $r - s$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, чтобы порядки элемента $x(\sigma^1)^{-1}$ по модулю X и элемента $y(\tau^1)^{-1}$ по модулю Y делились на n. Тогда из сравнения $g \equiv w^t \pmod{V_1}$ следовало бы сравнение $r \equiv s \pmod{n}$, что противоречит выбору n. Предложение 2 доказано.

Список использованной литературы

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. С. 395 – 407.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М. 1974. 455 с.
3. *Allenby R. and Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. V. 319. P. 9 – 17.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.