ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого ее неединичного элемента g можно указать такой гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу, при котором образ $g\varphi$ элемента g отличен от единицы. Понятие финитно аппроксимируемой группы сформировалось к концу 30-х годов прошлого века. Термин "финитная аппроксимируемость" был введен Ф. Холлом в 1955 году, но понятие финитно аппроксимируемой группы фактически присутствует уже в статье А. И. Мальцева [5] 1940 года. По свидетельству авторов книги [13] эта работа является первой публикацией, где встречаются финитно аппроксимируемые группы, и именно в этой работе доказаны известные теоремы А. И. Мальцева о финитной аппроксимируемости конечно порожденных матричных групп (над произвольным полем) и о хопфовости конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп.

Одним из заметных направлений в изучении финитно аппроксимируемых групп является исследование поведения свойства финитной аппроксимируемости относительно тех или иных конструкций групп. Прямое произведение финитно аппроксимируемых групп является, очевидно, финитно аппроксимируемой группой. Для полупрямого произведения это уже, вообще говоря, не так, и достаточное условие финитной аппроксимируемости полупрямого произведения финитно аппроксимируемых групп было получено А. И. Мальцевым [6]. В работе К. Грюнберга [18] доказано, что (обычное) свободное произведение финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, свободное произведение с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых групп далеко не всегда является финитно аппроксимируемой группой, и в течение последних четырех десятилетий ведутся достаточно интенсивные исследования по нахождению условий, накладываемых на перемножаемые группы и (или) объединяемые подгруппы и гарантирующих финитную аппроксимируемость соответствующей группы. Началом этих исследований следует считать работу Г. Баумслага [16], где, в частности, указано весьма общее достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, опирающееся на доказанное там же утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных групп. Тем не менее, это условие не является необходимым, и в настоящее время можно со значительной степенью уверенности утверждать, что простых необходимых и достаточных условий здесь не существует. Следует отметить также, что доказательства практически всех известных результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенными подгруппами используют идеи работы [16] и упомянутое достаточное условие.

Наряду с финитной аппроксимируемостью групп широко изучаются различные обобщения этого понятия, причем эти обобщения идут, главным образом, в следующих двух направлениях. С одной стороны, рассматривают аппроксимируемость данной группы в некоторых классах групп, отличных от класса всех конечных групп (например, в классе конечных p-групп или в классе нильпотентных групп). С другой стороны, можно говорить об аппроксимируемости группы относительно некоторого отношения (или предиката) между элементами и подмножествами группы. Здесь, в основном, рассматривают отношение сопряженности элементов и отношение принадлежности элемента подгруппе. (Таким образом, с этой, более общей точки зрения финитная аппроксимируемость — это аппроксимируемость в классе всех конечных групп относительно предиката равенства.)

Поведение некоторых из упомянутых обобщений финитной аппроксимируемости относительно различных теоретико-групповых конструкций также привлекало внимание ряда авторов. Так, в уже упоминавшейся работе К. Грюнберга [18] доказано, что свободное произведение групп, аппроксимируемых конечными p-группами, является группой, аппроксимируемой конечными p-группами. Тем не менее, свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p-групп не обязано быть группой, аппроксимируемой конечными p-группами, и соответствующий критерий был найден Г. Хигманом [19]. В. Н. Ремесленников [10] доказал, что свободное произведение групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности; аналогичный результат получен Дж. Дайер [17] для свободного произведения с объединенными конечными подгруппами. Н. С. Романовский [11] доказал, что все конечно порожденные подгруппы свободного произведения групп финитно отделимы, если этим свойством обладает каждый из сомножителей (подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если G аппроксимируема в классе всех конечных групп относительно отношения принадлежности элементов подгруппе H). С другой стороны, конструкция прямого произведения групп не наследует свойство финитной отделимости конечно порожденных подгрупп: прямое произведение двух нециклических свободных групп содержит неотделимую конечно порожденную подгруппу [14] (а в свободных группах все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы). Укажем также на построенный недавно в работе [1] пример свободного произведения с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося группой финитно аппроксимируемой, но не финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Имеющиеся результаты об аппроксимируемости свободных произведений с объединенными подгруппами применялись различными авторами к изучению аппроксимационных свойств тех групп, строение которых может быть описано с помощью этой конструкции; классическим примером таких групп являются группы с одним определяющим соотношением. То же самое относится и к теоретико-групповым конструкциям, описываемым в терминах свободного произведения с объединенными подгруппами. Две такие конструкции групп, введенные в книге [4] и названные там свободным произведением с коммутирующими подгруппами и свободным произведением с централизованными подгруппами, и являются основным объектом исследования данной диссертационной работы.

Напомним, что если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B, то свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K называется группа $(A * B;\ [H, K] = 1)$, являющаяся фактор-группой (обычного) свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта подгрупп H и K, а свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K называется группа $(A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$, являющаяся фактор-группой свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию объединения взаимных коммутантов подгрупп A и K и подгрупп H и B. Строение этих групп может быть описано с помощью конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами следующим образом. Группа $(A * B;\ [H, K] = 1)$ является свободным произведением групп M и N с объединенной подгруппой U, где $U = H \times K$ — прямое произведение групп H и K, $M = (A * U;\ H)$ — свободное произведение групп A и U с объединенной подгруппой H и $N = (B * U;\ K)$ — свободное произведение групп B и U с объединенной подгруппой K. Группа $(A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$ является свободным произведением групп M' и N' с объединенной подгруппой U, где $M' = A \times K$ — прямое произведение групп A и K и $N' = H \times B$ — прямое произведение групп H и B.

Свойства конструкции свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами привлекали внимание ряда авторов. Так в работе [20] с помощью геометрических методов была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности в свободном произведении двух свободных групп с коммутирующими конечно порожденными подгруппами. Аналогичными методами решение ряда других алгоритмических проблем для этой группы получено в работах [2, 8]. В работе [23] рассматривалась аппроксимируемость конечными p-группами некоторого обобщения конструкций свободного произведения с коммутирующими или централизованными подгруппами.

Цель диссертационной работы состояла в изучении аппроксимационных свойств свободных произведений с коммутирующими или централизованными подгруппами таких, как финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами, финитная отделимость подгрупп и финитная аппроксимируемость относительно сопряженности.

Новизна результатов. Все представленные в работе результаты являются новыми. Для свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами найдены необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами, доказано, что группа, построенная с помощью этих конструкций наследует от сомножителей свойство финитной отделимости всех циклических подгрупп, если она финитно аппроксимируема. Доказано, что все конечно порожденные подгруппы свободного произведения с централизованными подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп финитно отделимы. Доказано, что свободное произведение с коммутирующими или централизованными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если коммутируемые или централизуемые подгруппы принадлежат центрам соответствующих сомножителей и финитно отделимы в этих сомножителях.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены самостоятельно.

Методы исследования. В работе использовались стандартные методы комбинаторной теории групп, все доказательства основаны на свойствах конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами. В частности, применялась методика, предложенная Г. Баумслагом [16] для изучения финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенными подгруппами, а также — полученная в данной работе и основанная на вышеупомянутом критерии Г. Хигмена [19] определенная модификация этой методики, применимая к изучению аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений с объединенными подгруппами.

Теоретическое и практическое значение работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты, а также методы их доказательства могут найти применения в дальнейших исследованиях в данной области.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре Ивановского государственного университета и на Международной алгебраической конференции памяти Д. К. Фаддеева в Санкт-Петербурге в 1997 году. Основные результаты опубликованы в работах [24 – 28].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения и трех глав, объединяющих одиннадцать параграфов. Список литературы содержит 28 наименований. Работа выполнена на 127 листах с использованием пакета $\mathcal{AMS}$-TEX.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении излагается актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи исследования и приводится краткое описание полученных результатов.

Первая глава работы посвящена свойствам финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами.

Все доказательства основных результатов работы используют представление свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами в виде свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, и первый параграф содержит определение и необходимые для дальнейшего свойства конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами.

В этом же параграфе для свободного произведения

$$G = (M * N;\, U = V, \varphi)$$

групп M и N с подгруппами U и V, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : U \to V$, напоминается понятие (U, V, φ)-совместимых подгрупп, введенное Г. Баумслагом в статье [16], и приводится использующая это понятие формулировка достаточного условия финитной аппроксимируемости группы G, полученного в этой статье. Затем приводится критерий Г. Хигмена [19] аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных p-групп и вводится понятие (U, V, φ, p)-совместимых подгрупп, являющееся подсказанной этим критерием модификацией понятия (U, V, φ)-совместимости. Это понятие позволяет получить достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными p-группами, аналогичное упомянутому условию из [16].

Основные результаты первой главы, формулируются следующим образом:

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является финитно аппрокси-*

мируемой группой тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K финитно отделимы.

Теорема 2. *Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p-группами, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются отделимыми в классе конечных p-групп.*

Теорема 3. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

Теорема 4. *Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p-группами, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются отделимыми в классе конечных p-групп.*

Следует заметить, что если хотя бы одна из подгрупп H или K является единичной, то свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K оказывается обычным свободным произведением групп A и B, а если хотя бы одна из подгрупп H или K совпадает со всей группой A или B соответственно, то свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является прямым произведением групп A и B. Поэтому в этих вырожденных случаях аппроксимируемость рассматриваемых групп равносильна аппроксимируемости сомножителей.

Перечисленные результаты показывают, в частности, что, в отличие от конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами, вопрос о финитной аппроксимируемости и об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух групп с коммутирующими и централизованными подгруппами решается исчерпывающим образом.

Приведем некоторые следствия сформулированных теорем.

Следствие 1. *Свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой аппроксимируемой группой в следующих случаях:*

(1) *группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппы H и K конечны;*
(2) *группы A и B являются полициклическими;*
(3) *группы A и B являются свободными, а подгруппы H и K являются конечно порожденными.*

В работе Г. Баумслага [15] доказано, что группа с одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$ финитно аппроксимируема, если ни один порождающий этой группы не входит одновременно в оба слова u и v. Так как такая группа, очевидно, является свободным произведением двух свободных групп с коммутирующими циклическими подгруппами, порождаемыми соответственно элементами u и v, утверждение (3) следствия 1 можно рассматривать как обобщение этого результата.

В утверждении (1) приведенного следствия свойство финитной аппроксимируемости можно заменить на аппроксимируемость конечными p-группами. Для формулировки других результатов об этом виде аппроксимируемости напомним, что подгруппу X некоторой группы Y называют p-изолированной (где p — простое число), если для любого элемента $y \in Y$ включение $y^p \in X$ возможно лишь при $y \in X$. Подгруппа X называется p'-изолированной, если она q-изолирована для любого простого числа $q \neq p$.

Легко видеть, что если подгруппа X группы Y отделима в классе конечных p-групп, то X должна быть p'-изолированной. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, но в некоторых случаях оно оказывается справедливым. Заметим, прежде всего, что, как нетрудно понять, произвольная p'-изолированная циклическая подгруппа свободной группы отделима в классе конечных p-групп. Поэтому из теоремы 2 получается следующий “p-аналог”вышеупомянутого результата Г. Баумслага:

Следствие 2. *Пусть группа G задана в образующих a_1, a_2, $\ldots$, a_n одним определяющим соотношением $[u, v] = 1$, где u и v — такие непустые несократимые слова, что ни один порождающий a_i не входит одновременно и в u, и в v. Группа G аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда в свободной группе $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ каждый из элементов u и v не является q-ой степенью ни для какого простого числа q, отличного от p.*

Удалось показать также, что каждая p'-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима в классе конечных p-групп. Поэтому из теорем 2 и 4 получается

Следствие 3. *Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p-группами, H и K — неединичные (или собственные) подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение групп A и B с коммутирующими (или, соответственно, централизованными) подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда подгруппы H и K групп A и B p'-изолированы.*

Так как каждая конечная p-группа является нильпотентной, то произвольная группа, аппроксимируемая конечными p-группами хотя бы для одного простого числа p, аппроксимируема, очевидно, и нильпотентными группами. Поскольку обратное, вообще говоря, неверно, представляет интерес

Следствие 4. *Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, H и K — неединичные (или собственные) подгруппы групп A и B соответственно. Группа G, являющаяся свободным произведением групп A и B с коммутирующими (соответственно, централизованными) подгруппами H и K, аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p она аппроксимируема конечными p-группами.*

Предположение об отсутствии кручения в группах A и B является здесь существенным (по меньшей мере, для свободного произведения с коммутирующими подгруппами), как показывает пример группы $G = \langle a, b, c;\ a^2 = b^2 = c^3 = [a, c] = [b, c] = 1\rangle$. Она является свободным произведением групп $A = \langle a, c;\ a^2 = c^3 = [a, c] = 1\rangle$ и $B = \langle b;\ b^2 = 1\rangle$ с коммутирующими подгруппами $H = \langle c; c^3 = 1\rangle$ и $K = B$, аппроксимируема нильпотентными группами, но не является, очевидно, аппроксимируемой конечными p-группами ни для какого простого числа p.

Во второй главе работы рассматривается свойство финитной отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами. В самом общем виде проблема может быть сформулирована следующим образом:

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B. Предположим, что в группах A и B все (или все конечно порожденные, или все циклические) подгруппы являются финитно отделимыми. Верно ли, что в свободном произведении G групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K будут финитно отделимы все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы?

Нетрудно видеть, что в том случае, когда речь идет об отделимости всех подгрупп, ответ на этот вопрос почти всегда отрицательный. А именно, если H и K — неединичные собственные подгруппы групп A и B соответственно, то в свободном произведении групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K существует подгруппа, являющаяся нециклической свободной группой. Если, к тому же, индекс хотя бы одной из подгрупп H или K в группе A или B соответственно не равен двум, то и в свободном произведении групп A и B с централизованными подгруппами H и K существует такая же подгруппа. Остается заметить, что нециклическая свободная группа содержит подгруппу, не являющуюся финитно отделимой.

Поскольку в свободной группе все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, неотделимая подгруппа, указанная в предыдущем замечании, не является конечно порожденной. Тем не менее, если подгруппы H и K являются нециклическими свободными группами, то свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K содержит конечно порожденную не финитно отделимую подгруппу. Действительно, в каждой из этих групп подгруппа, порожденная подгруппами H и K является их прямым произведением, а в прямом произведении двух нециклических свободных групп существует [14] конечно порожденная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой.

Ситуация с финитной отделимостью циклических подгрупп оказывается прямо противоположной: свободное произведение с коммутирующими или централизованными подгруппами наследует от сомножителей свойство финитной отделимости всех циклических подгрупп при условии, разумеется, что соответствующая группа оказывается финитно аппроксимируемой. А именно, справедливы следующие утверждения:

Теорема 5. *Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

Теорема 6. *Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

В частности, свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K в следующих случаях является группой с финитно отделимыми циклическими подгруппами:

(1) в группах A и B все циклические подгруппы финитно отделимы, а подгруппы H и K являются конечными;
(2) группы A и B являются полициклическими;
(3) группы A и B являются свободными, а подгруппы H и K — конечно порожденными.

Из предыдущих замечаний следует, что даже в случае, когда группы A и B являются конечно порожденными абелевыми, свободное произведение этих групп с коммутирующими или централизованными подгруппами может содержать неотделимую подгруппу. Тем не менее, имеет место

Теорема 7. *Пусть A и B — конечно порожденные абелевы группы, H и K — произвольные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда все конечно порожденные подгруппы свободного произведения групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы.*

Так как в этом случае группа G является свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечно порожденных абелевых групп теорема 7 вытекает непосредственно из следующего более общего результата:

Теорема 8. *Пусть M и N — конечно порожденные абелевы группы, U и V — изоморфные подгруппы групп M и N соответственно и $\varphi : U \to V$ — фиксированный изоморфизм. Все конечно порожденные подгруппы свободного произведения*

$$G = (M * N;\, U = V, \varphi)$$

групп M и N с объединенными подгруппами U и V финитно отделимы.

В третьей главе диссертации рсссматривается финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободных произведений с коммутирующими или централизованными подгруппами. Приведем, прежде всего, результат отрицательного характера.

Теорема 9. *Пусть подгруппа H группы A содержит элементы, сопряженные в группе A, но не сопряженные в H, а в группе B пусть существует элемент, не сопряженный ни с каким элементом из подгруппы K, но образ которого в любом конечном гомоморфном образе группы B сопряжен с образом некоторого элемента подгруппы K. Тогда свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

В качестве группы A, удовлетворяющей условиям этой теоремы, можно взять группу, заданную представлением $\langle a, h;\ a^{-1}ha =$

$h^{-1}\rangle$. Из теоремы C1 работы [22] следует, что в качестве группы B может быть выбрана некоторая конечно порожденная нильпотентная группа. Так как эти группы, будучи полициклическими, являются финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности (см. [9]), мы получаем пример свободного произведения с централизованными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося финитно аппроксимируемой группой, но не являющегося группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Следует заметить, что вопрос о существовании аналогичного примера свободного произведения с коммутирующими подгруппами остается открытым.

Результаты, положительного характера, полученные в работе, формулируются следующим образом.

Теорема 10. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение групп A и B с коммутирущими подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Теорема 11. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Поскольку все полициклические группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности (см. [9]), а их произвольные подгруппы финитно отделимы (см. [6]), из теорем 10 и 11 следует, что если A и B — произвольные полициклические группы, H — центральная подгруппа группы A и K — центральная подгруппа группы B, то свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Доказательства теорем 10 и 11 используют общий критерий сопряженности элементов свободного произведения с объединенными подгруппами, доставляемый теоремой Солитэра ([4], теорема 4.6). Ограничения, содержащиеся в формулировках теорем, позволили придать этому критерию более простой вид, и этого оказалось достаточно для доказательства теоремы 11. Технически более сложное доказательство теоремы 10 потребовало более детального изучения условий сопряженности элементов свободного произведения групп с коммутирущими подгруппами, принадлежащими центрам соответствующих множителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Научные труды Ивановск. гос. ун–та. Математика. Выпуск 5. 2002. С. 3 – 5.
2. *Безверхний В. Н., Новикова О. А.* Решение проблемы пересечения централизаторов элементов для свободного произведения с коммутирующими подгруппами // Известия Тульск. гос. ун-та. Сер. "Математика". Тула. 2001. Т. 7. С. 21 – 33.
3. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
5. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 405 – 422.
6. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49 – 60.
7. *Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В.* Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Известия ВУЗов. Математика. 1987. 12. С. 58 – 59.
8. *Новикова О. А.* Решение проблемы обобщенной сопряженности для свободного произведения с коммутирующими подгруппами // Чебышевский сборник. Научные труды по математике. Тула. 2001. Т. 2. С. 73 – 78.
9. *Ремесленников В. Н.* Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. 1969. Т. 8. С. 712 – 725.

10. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12, С. 1085 – 1099.
11. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, N 6. С. 1324 – 1329.
12. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Пер. сб-к переводов иностр. статей. 1968. Т. 12, N 1. С. 3 – 36.
13. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей. М.: Мир, 1985.
14. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. V. 319. P. 9 – 17.
15. *Baumslag G.* Free subgroups of certain one-relator groups defined by positive words // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1983. V. 93, N 2. P. 247 – 251.
16. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. AMS. 1963. V. 106, N 2. P. 193 – 209.
17. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. V. 29, P. 35 – 51.
18. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. V. 7. P. 29 – 62.
19. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. V. 1. P. 301 – 305.
20. *Hurwitz R. D.* On the conjugacy problem in a free product with commuting subgroups // Math. Ann. 1976. V. 221. P. 1 – 8.
21. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503 – 554.
22. *Segal D.* Decidable properties of polycycle groups // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61. P. 497 – 528.
23. *Wong P. C. and Tang C. K.* Free products of residually p-finite groups with commuting subgroups // Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series). 1996. V. 19. P. 25 – 28.
24. *Логинова Е. Д.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Международная алгебраическая конференция памяти Д.К.Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт-Петербург, 1997. С. 235 – 236.

25. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. ж. 1999. Т. 40, N 2. С. 395 – 407.
26. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Научные труды Ивановск. гос. ун–та. Математика. Выпуск 2. 1999. С. 101 – 104.
27. *Логинова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Научные труды Ивановск. гос. ун–та. Математика. Выпуск 3. 2000. С. 47 – 53.
28. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободного произведения групп с коммутирующими и централизованными подгруппами // Иванов. гос. ун-т. Иваново, 2002. 40 с. Деп. в ВИНИТИ 12.11.2002, N 1945-В2002.