

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 512.543

Логинова Елена Давидовна

**АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА
СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ
ГРУПП С КОММУТИРУЮЩИМИ
И ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫМИ ПОДГРУППАМИ**

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
профессор В. Н. Егоров

Иваново — 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
ГЛАВА I. Аппроксимируемость свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами	
§ 1. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами	20
§ 2. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами	37
§ 3. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами	56
ГЛАВА II. Финитная отделимость подгрупп свободных произведений с коммутирующими и централизованными под- группами	
§ 4. Предварительные замечания. Формулировка результатов	65
§ 5. Отделимость циклических подгрупп свободных произве- дений с коммутирующими и централизованными подгруп- пами	70
§ 6. Отделимость конечно порожденных подгрупп свободного произведения с централизованными подгруппами двух ко- нечно порожденных абелевых групп	83
ГЛАВА III. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами	
§ 7. Формулировка результатов. Контрпример	87
§ 8. Сопряженность элементов свободного произведения групп с объединенными подгруппами	91
§ 9. Сопряженность элементов свободного произведения групп с коммутирующими центральными подгруппами	96
§ 10. Доказательство теоремы 10	104
§ 11. Доказательство теоремы 11	119
Литература	125

Введение

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого ее неединичного элемента g можно указать такой гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу, при котором образ $g\varphi$ элемента g отличен от единицы. Как свидетельствуют авторы книги [13], понятие финитно аппроксимируемой группы сформировалось к концу 30-х годов прошлого века. Термин “финитная аппроксимируемость” был введен Ф. Холлом в 1955 году, но понятие финитно аппроксимируемой группы фактически присутствует уже в статье А. И. Мальцева [5] 1940 года. Эта работа, как следует из [13], является первой публикацией, где встречаются финитно аппроксимируемые группы, и именно в этой работе доказаны известные теоремы А. И. Мальцева о финитной аппроксимируемости конечно порожденных матричных групп (над произвольным полем) и о хопфовости конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп.

Одним из заметных направлений в изучении финитно аппроксимируемых групп является исследование поведения свойства финитной аппроксимируемости относительно тех или иных конструкций групп. Прямое произведение двух финитно аппроксимируемых групп является, очевидно, финитно аппроксимируемой группой. Для полупрямого произведения это уже, вообще говоря, не так, и достаточное условие финитной аппроксимируемости полупрямого произведения финитно аппроксимируемых групп было получено А. И. Мальцевым [6]. В работе К. Грюнберга [18] доказано, что свободное произведение финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой.

В отличие от обычного свободного произведения, свободное произведение с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых групп далеко не всегда является финитно аппроксимируемой группой, и в течение последних четырех десятилетий ведутся достаточно интенсивные исследования по нахождению условий, накладываемых на перемножаемые группы и (или) объединяемые подгруппы

и гарантирующих финитную аппроксимируемость соответствующей группы. Началом систематических исследований в этом направлении следует считать работу Г. Баумслага [16]. В этой работе, в частности, указано весьма общее достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами (см. ниже предложение 1.4), опирающееся на доказанное там же утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных групп. Тем не менее, это условие не является необходимым, и в настоящее время можно со значительной степенью уверенности утверждать, что простых необходимых и достаточных условий здесь не существует. Следует отметить также, что доказательства практически всех известных результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенными подгруппами используют идеи работы [16] и упомянутое достаточное условие.

Наряду с финитной аппроксимируемостью групп широко изучаются различные обобщения этого понятия, причем эти обобщения идут, главным образом, в следующих двух направлениях. С одной стороны, рассматривают аппроксимируемость данной группы в некоторых классах групп, отличных от класса всех конечных групп (например, в классе конечных p -групп или в классе нильпотентных групп). С другой стороны, можно говорить об аппроксимируемости группы относительно некоторого отношения (или предиката) между элементами и подмножествами группы. Здесь, в основном, рассматривают отношение сопряженности элементов и отношение принадлежности элемента подгруппе. (Таким образом, с этой, более общей точки зрения финитная аппроксимируемость — это аппроксимируемость в классе всех конечных групп относительно предиката равенства.)

Поведение некоторых из упомянутых обобщений финитной аппроксимируемости относительно различных теоретико-групповых конструкций также привлекало внимание ряда авторов. Так, в уже

упоминавшейся работе К. Грюнберга [18] доказано, что свободное произведение групп, аппроксимируемых конечными p -группами, является группой, аппроксимируемой конечными p -группами. В. Н. Ремесленников [10] доказал, что свободное произведение групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности; аналогичный результат получен Дж. Дайер [17] для свободного произведения с объединенными конечными подгруппами. Н. С. Романовский [11] доказал, что все конечно порожденные подгруппы свободного произведения групп финитно отделимы, если этим свойством обладает каждый из сомножителей (подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если G аппроксимируема в классе всех конечных групп относительно отношения принадлежности элементов подгруппе H). С другой стороны, конструкция прямого произведения групп не наследует свойство финитной отделимости конечно порожденных подгрупп: прямое произведение двух нециклических свободных групп содержит неотделимую конечно порожденную подгруппу [14]. Укажем также на построенный недавно в работе [1] пример свободного произведения с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося группой финитно аппроксимируемой, но не финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Ситуация с аппроксимируемостью конечными p -группами свободных произведений с объединенными подгруппами оказывается еще более сложной, чем с финитной аппроксимируемостью, поскольку уже свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p -групп не обязательно является группой, аппроксимируемой конечными p -группами. Соответствующий критерий был найден Г. Хигманом [19], и в данной работе будет (в предложении 1.9) указано основанное на этом критерии достаточное условие аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, являющееся аналогом выше-

упомянутого условия Г. Баумслага.

Строение некоторых групп может быть описано с помощью конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами; классическим примером таких групп являются группы с одним определяющим соотношением. В ряде случаев об аппроксимируемости таких групп позволяют судить имеющиеся в нашем распоряжении условия аппроксимируемости свободных произведений с объединенными подгруппами. То же самое относится и к теоретико-групповым конструкциям, описываемым в терминах свободного произведения с объединенными подгруппами. Две такие конструкции групп, введенные в книге [4] и названные там свободным произведением с коммутирующими подгруппами и свободным произведением с централизованными подгруппами, и являются основным объектом исследования данной диссертационной работы.

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B . Группа

$$(A * B; [H, K] = 1),$$

порождаемая образующими групп A и B и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[h, k] = 1$, где $h \in H$ и $k \in K$, называется *свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K* . Группа

$$(A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1),$$

порождаемая образующими групп A и B и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[a, k] = 1$ и $[h, b] = 1$, где $a \in A$, $b \in B$, $h \in H$ и $k \in K$, называется *свободным произведением групп A и B с централизованными подгруппами H и K* (см. [4, с. 230]). Иначе говоря, свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является фактор-группой (обычного) свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта подгрупп

H и K , а свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является фактор-группой свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию объединения взаимных коммутантов подгрупп A и K и подгрупп H и B .

Строение этих групп может быть описано с помощью конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами следующим образом (детали см. в параграфах 2 и 3).

Если $G = (A * B; [H, K] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K , то группы A и B оказываются естественным образом вложимыми в группу G , и мы можем считать их подгруппами этой группы. Обозначим, далее, через M подгруппу, порождаемую в G подгруппами A и K , через N — подгруппу, порожденную подгруппами B и H , и через U — подгруппу, порожденную подгруппами H и K . Тогда $U = H \times K$ — прямое произведение групп H и K , $M = (A * U; H)$ — свободное произведение групп A и U с объединенной подгруппой H , $N = (B * U; K)$ — свободное произведение групп B и U с объединенной подгруппой K , и, наконец, $G = (M * N; U)$ — свободное произведение групп M и N с объединенной подгруппой U .

Если $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K , то группы A и B тоже естественным образом вложимы в группу G , и их можно считать подгруппами этой группы. Снова обозначим через M подгруппу, порождаемую в G подгруппами A и K , через N — подгруппу, порожденную подгруппами B и H , и через U — подгруппу, порожденную подгруппами H и K . В этом случае $M = A \times K$ — прямое произведение групп A и K , $N = H \times B$ — прямое произведение групп H и B , $U = H \times K$ — прямое произведение групп H и K и $G = (M * N; U)$ — свободное произведение групп M и N с объединенной подгруппой U .

Конструкция свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами рассматривалась в работе [20], где с помощью

геометрических методов была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности в свободном произведении двух свободных групп с коммутирующими конечно порожденными подгруппами. Аналогичными методами решение ряда других алгоритмических проблем для этой группы получено в работах [2, 8]. В работе [23] рассмотрена аппроксимируемость конечными p -группами некоторого обобщения конструкций свободного произведения с коммутирующими или централизованными подгруппами.

Основными результатами данной диссертации являются критерии финитной аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными p -группами и финитной отделимости циклических подгрупп для указанных конструкций групп. Получены также некоторые другие результаты относительно финитной отделимости их подгрупп и указано достаточное условие финитной аппроксимируемости таких групп относительно сопряженности. Сформулируем результаты диссертации более подробно.

Очевидно, что если хотя бы одна из подгрупп H или K является единичной, то свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K оказывается обычным свободным произведением групп A и B , а если хотя бы одна из подгрупп H или K совпадает со всей группой A или B соответственно, то свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является прямым произведением групп A и B . Поэтому в этих вырожденных случаях вопросы об аппроксимируемости указанных групп решаются тривиально. В остальных случаях имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K финитно отделимы.*

Теорема 2. Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются separable в классе конечных p -групп.

Теорема 3. Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно separable.

Теорема 4. Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются separable в классе конечных p -групп.

Отметим, что утверждение о достаточности условий в теореме 2 доказано также (другим методом) в вышеупомянутой работе [23].

Перечисленные результаты показывают, в частности, что, в отличие от конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами, вопрос о финитной аппроксимируемости и об аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения

двух групп с коммутирующими и централизованными подгруппами решается исчерпывающим образом.

Приведем некоторые следствия сформулированных теорем.

Заметим, прежде всего, что если некоторая группа является финитно аппроксимируемой или аппроксимируемой конечными p -группами, то любая ее конечная подгруппа финитно отделима или отделима в классе конечных p -групп соответственно. Поэтому непосредственно из теорем 1 – 4 вытекает следующее утверждение:

1. *Свободное произведение G финитно аппроксимируемых (аппроксимируемых конечными p -группами) групп A и B с коммутирующими или централизованными конечными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой (соответственно, аппроксимируемой конечными p -группами) группой.*

Следует, впрочем, отметить, что часть этого утверждения, относящаяся к финитной аппроксимируемости группы G , может быть получена также из теоремы 3 работы Г. Баумслага [16], утверждающей, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными конечными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой. В самом деле, если подгруппы H и K являются конечными, то группа G в любом случае является свободным произведением групп M и N с объединенной конечной подгруппой U , причем в случае свободного произведения с коммутирующими подгруппами каждая из групп M и N , в свою очередь, является свободным произведением с объединенными конечными подгруппами финитно аппроксимируемых групп (и потому финитно аппроксимируема), а в случае свободного произведения с централизованными подгруппами финитная аппроксимируемость каждой из групп M и N просто очевидна. Аналогичное альтернативное обоснование аппроксимируемости группы G конечными p -группами невозможно, поскольку аналог упомянутой теоремы Г. Баумслага в этом случае не имеет места.

Так как каждая подгруппа произвольной полициклической групп-

пы финитно отделима (см. [6, теорема 6]), из теорем 1 и 3 имеем

2. *Свободное произведение полициклических групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Используя теорему Холла – Бернса (см., напр., [3, с. 34]) нетрудно показать, что конечно порожденные подгруппы произвольной свободной группы финитно отделимы. Поэтому

3. *Свободное произведение свободных групп A и B с коммутирующими или централизованными конечно порожденными подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой.*

В работе Г. Баумслага [15] доказано, что группа с одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$ финитно аппроксимируема, если ни один порождающий этой группы не входит одновременно в оба слова u и v . Так как такая группа, очевидно, является свободным произведением двух свободных групп с коммутирующими циклическими подгруппами, порождаемыми соответственно элементами u и v , соответствующая часть утверждения 3 является обобщением этого результата Г. Баумслага.

Напомним, далее, что подгруппу X группы Y называют p -изолированной (где p — простое число), если для любого элемента $y \in Y$ включение $y^p \in X$ возможно лишь при $y \in X$. Если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа X называется π -изолированной, если она p -изолирована для любого числа p из множества π . Наконец, p' , как обычно, обозначает множество всех простых чисел, отличных от p .

Легко видеть, что если подгруппа X группы Y отделима в классе конечных p -групп, то X должна быть p' -изолированной. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, но в некоторых случаях оно оказывается справедливым. Прежде всего, отметим здесь отделимость в классе конечных p -групп произвольной циклической p' -изолированной подгруппы свободной группы. Поэтому из теоремы 2 получается следующий “ p -аналог” вышеупомянутого результата

Г. Баумслага:

4. Пусть группа G задана в образующих $a_1, a_2, \dots, a_n$ одним определяющим соотношением $[u, v] = 1$, где u и v — такие непустые несократимые слова, что ни один порождающий a_i не входит одновременно и в u , и в v . Группа G аппроксимируема конечными p -группами тогда и только тогда, когда в свободной группе $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ каждый из элементов u и v не является q -ой степенью ни для какого простого числа q , отличного от p .

Можно показать также (см. предложение 2.5 данной работы), что произвольная p' -изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима в классе конечных p -групп. Поэтому из теорем 2 и 4 получается следующее утверждение:

5. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и K — неединичные (собственные) подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение G групп A и B с коммутирующими (соответственно, централизованными) подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, тогда и только тогда, когда подгруппы H и K групп A и B p' -изолированы.

Так как каждая конечная p -группа является нильпотентной, то произвольная группа, аппроксимируемая конечными p -группами хотя бы для одного простого числа p , аппроксимируема, очевидно, и нильпотентными группами. Поскольку обратное, вообще говоря, неверно, представляет интерес и следующее утверждение, которое, впрочем, не является столь же непосредственным следствием сформулированных выше теорем, как предыдущие (и доказывается в параграфах 2 и 3):

6. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, H и K — неединичные (собственные) подгруппы групп A и B соответственно. Группа G , являющаяся свободным произведением групп A и B с коммутирующими (соответственно, централизованными) подгруппами H и K , аппроксимируема ниль-

потентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p она аппроксимируема конечными p -группами.

Следующий пример показывает, что (в случае свободного произведения с коммутирующими подгруппами) предположение об отсутствии кручения в формулировке утверждения 6 является существенным.

Группа G , заданная образующими и определяющими соотношениями вида $G = \langle a, b, c; a^2 = b^2 = c^3 = [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$, является свободным произведением групп $A = \langle a, c; a^2 = c^3 = [a, c] = 1 \rangle$ и $B = \langle b; b^2 = 1 \rangle$ с коммутирующими подгруппами H , порождаемой элементом c , и K , совпадающей с B . Нетрудно видеть (см. § 2), что эта группа аппроксимируема нильпотентными группами, но не является, очевидно, аппроксимируемой конечными p -группами ни для какого простого числа p .

Перейдем теперь к изложению результатов относительно финитной отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами. В самом общем виде соответствующая проблема может быть сформулирована следующим образом:

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B . Предположим, что в группах A и B все (или все конечно порожденные, или все циклические) подгруппы являются финитно отделимыми. Верно ли, что в свободном произведении G групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K будут финитно отделимы все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы?

Разумеется, поскольку в каждом случае предполагается, в частности, отделимость единичной подгруппы, очевидным необходимым условием выполнимости любого из этих утверждений является финитная аппроксимируемость группы G , т. е. в силу результатов, перечисленных выше, — финитная отделимость в группах A и B подгрупп H и K . Но даже при выполнении этого условия, ответ на

поставленный вопрос в том случае, когда речь идет об отделимости всех подгрупп, почти всегда отрицательный. А именно, имеет место следующее утверждение:

Пусть A и B — произвольные группы, H и K — неединичные собственные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда в свободном произведении групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K существует подгруппа, не являющаяся финитно отделимой. Если, к тому же, индекс хотя бы одной из подгрупп H или K в группе A или B соответственно не равен двум, то и в свободном произведении групп A и B с централизованными подгруппами H и K существует подгруппа, не являющаяся финитно отделимой.

Неотделимая подгруппа, предъявляемая доказательством этого утверждения, не является конечно порожденной. Примеры свободных произведений с коммутирующими или централизованными подгруппами, не наследующих от сомножителей финитную отделимость конечно порожденных подгрупп, доставляются следующим утверждением:

Пусть подгруппа H группы A и подгруппа K группы B являются нециклическими свободными группами. Тогда в свободном произведении групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K существует конечно порожденная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой.

Ситуация с финитной отделимостью циклических подгрупп оказывается прямо противоположной. А именно, в работе получены следующие результаты:

Теорема 5. *Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.*

Теорема 6. Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.

Из теорем 5 и 6 и замечаний, приведенных выше при обсуждении следствий из теорем 1 и 3, следует, что

свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K в следующих случаях является группой с финитно отделимыми циклическими подгруппами:

- (1) в группах A и B все циклические подгруппы финитно отделимы, а подгруппы H и K являются конечными;
- (2) группы A и B являются полициклическими;
- (3) группы A и B являются свободными, а подгруппы H и K — конечно порожденными.

Сформулированные выше результаты отрицательного характера показывают, что даже в случае, когда группы A и B являются конечно порожденными абелевыми, свободное произведение этих групп с коммутирующими или централизованными подгруппами может содержать неотделимую подгруппу. Тем не менее, имеет место

Теорема 7. Пусть A и B — конечно порожденные абелевы группы, H и K — произвольные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда все конечно порожденные подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы.

(Отметим, что вопрос об отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения с коммутирующими подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп остается открытым.)

Если группы A и B являются абелевыми, то абелевыми будут и свободные множители M и N указанного выше разложения свободного произведения групп A и B с централизованными подгруппами H и K в свободное произведение с объединенными подгруппами. Поэтому теорема 7 является частным случаем следующего более общего результата:

Теорема 8. Пусть M и N — конечно порожденные абелевы группы, U и V — изоморфные подгруппы групп M и N соответственно и $\varphi : U \rightarrow V$ — фиксированный изоморфизм. Все конечно порожденные подгруппы свободного произведения

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

групп M и N с объединенными подгруппами U и V финитно отделены.

Перечислим, наконец, полученные в работе результаты, относящиеся к финитной аппроксимируемости относительно сопряженности рассматриваемых групповых конструкций. Начнем с простого замечания отрицательного характера:

Теорема 9. Пусть подгруппа H группы A содержит элементы, сопряженные в группе A , но не сопряженные в H , а в группе B пусть существует элемент, не сопряженный ни с каким элементом из подгруппы K , но образ которого в любом конечном гомоморфном образе группы B сопряжен с образом некоторого элемента подгруппы K . Тогда свободное произведение $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Для построения конкретных примеров групп A и B , удовлетворяющих условиям теоремы 9, в качестве группы A можно взять группу, заданную представлением $\langle a, h; a^{-1}ha = h^{-1} \rangle$; элементы h и

h^{-1} ее циклической подгруппы H , порожденной элементом h , сопряжены в группе A , но не сопряжены в H . Существование группы B с подгруппой K , обладающей требуемым свойством, можно получить из результатов работы [22]. Более того, из теоремы C1 этой работы следует, что в качестве B может быть выбрана некоторая конечно порожденная нильпотентная группа.

Так как группы A и B , будучи полициклическими, являются финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности (см. [9]), мы получаем пример свободного произведения с централизованными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося финитно аппроксимируемой группой, но не являющегося группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Этот пример можно сравнить с упомянутым выше аналогичным примером свободного произведения с объединенными подгруппами из работы [1]. Следует заметить, что вопрос о существовании соответствующих примеров свободного произведения с коммутирующими подгруппами остается открытым.

Результаты, полученные в положительном направлении, формулируются следующим образом.

Теорема 10. Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Теорема 11. Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, финитно

аппроксимируемой относительно сопряженности.

Поскольку все полициклические группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности (см. [9]), а их произвольные подгруппы финитно отделимы (см. [6]), из теорем 10 и 11 следует, что

если A и B — произвольные полициклические группы, H — центральная подгруппа группы A и K — центральная подгруппа группы B , то свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Диссертация состоит из трех глав, объединяющих одиннадцать параграфов. В первой главе рассматриваются свойства финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p -группами свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами. Первый параграф содержит определение и необходимые для дальнейшего свойства свободного произведения групп с объединенными подгруппами. В этом же параграфе приведено достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой из работы Г. Баумслага [16] и доказан основанный на вышеупомянутом критерии Г. Хигмена [19] аналог его для аппроксимируемости конечными p -группами. Во втором и третьем параграфах доказываются соответственно теоремы 1 и 2 и теоремы 3 и 4, а также следствия из этих теорем. В доказательствах всех основных результатов работы используются разложения свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами в свободное произведение с объединенными подгруппами; подробное описание этих разложений также приведено в параграфах 2 и 3.

Перечисленные выше результаты о финитной отделимости подгрупп доказываются во второй главе. Третья глава работы посвящена финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Открывающий ее § 7 содержит формулировки основных результатов и доказательство теоремы 9. Восьмой параграф, имеющий подго-

товительный характер, содержит необходимые результаты о сопряженности элементов свободного произведения с объединенными подгруппами. Здесь приведен общий критерий сопряженности (теорема Солитэра) и получен вид, приобретаемый этим критерием в той специфической ситуации, которая определяется условиями теорем 10 и 11. Доказательство теоремы 10, оказавшееся весьма громоздким, занимает параграфы 9 и 10; в параграфе 9 собраны предварительные результаты об условиях сопряженности элементов свободного произведения с коммутирующими подгруппами. Доказательство теоремы 11 приведено в § 11.

Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре Ивановского государственного университета и на Международной алгебраической конференции памяти Д. К. Фаддеева в Санкт-Петербурге в 1997 году. Основные результаты опубликованы в работах [24 – 28].

ГЛАВА I

Аппроксимируемость свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами

§ 1. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами

В этом параграфе будет сформулировано достаточное условие финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами из работы [14] и доказан его аналог для свойства аппроксимируемости конечными p -группами. (Для полноты в каждом случае приведены и почти очевидные необходимые условия.)

Начнем с определения и формулировок необходимых для дальнейшего свойств конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами.

Пусть M и N — некоторые группы, U — подгруппа группы M , V — подгруппа группы N . Предположим, что подгруппы U и V изоморфны и $\varphi : U \rightarrow V$ — фиксированный изоморфизм группы U на группу V . Свободным произведением групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ , называется группа

$$G = (M * N; U = V, \varphi),$$

порождаемая объединением (непересекающихся) систем образующих групп M и N и определяемая в этой системе порождающих всеми определяющими соотношениями этих групп и всевозможными соотношениями вида $u = u\varphi$, где $u \in U$.

Непосредственно из определения следует, что тождественные отображения множеств порождающих групп M и N продолжаемы до гомоморфизмов этих групп в группу G , и первым из основных свойств конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами является (см., напр., [3, теорема 2.6] или [4, теорема 4.3])

инъективность этих гомоморфизмов. Иначе говоря, подгруппы группы G , порождаемые в ней образующими групп M и N , изоморфны этим группам, и потому мы можем (и будем) считать M и N подгруппами группы G (и называть их *свободными множителями группы G*). При этом, поскольку каждый элемент из подгруппы U отождествлен с его φ -образом из подгруппы V , в группе G подгруппы U и V совпадают.

Так как группа G порождается подгруппами M и N , произвольный элемент ее может быть выражен в виде произведения некоторых элементов из этих подгрупп. В действительности, произвольный элемент $g \in G$ может быть записан в виде

$$g = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

где $n \geq 1$, элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат попеременно одной из подгрупп M или N группы G и если $n > 1$, то каждый из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ не принадлежит подгруппе $U = V$. Такая запись элемента g называется *несократимой*, а число n называется *длиной* этой записи.

Очевидно, что элементы с несократимой записью длины 1 принадлежат одной из подгрупп M или N . С другой стороны, можно доказать (см. [3, теорема 2.6] или [4, теорема 4.4 и следствие 4.4.2]), что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью длины $n > 1$, то он является неединичным элементом группы G (и вследствие этого, как легко видеть, не может принадлежать ни подгруппе M , ни подгруппе N). Это утверждение является вторым из основных свойств конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами. Из него легко следует, в частности, что пересечение в группе G подгрупп M и N совпадает с подгруппой U .

Отметим, хотя это и не будет использоваться в дальнейшем, что указанные свойства — вложимость групп M и N в группу G и неединичность произвольного элемента с несократимой записью длины, большей 1, — позволяют сформулировать внутреннее определение

свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. А именно, если M и N — некоторые подгруппы группы G , $U = M \cap N$ и группа G порождается подгруппами M и N , то нетрудно видеть, что каждый элемент группы G обладает несократимой записью в определенном выше смысле. Если каждый элемент, обладающий несократимой записью длины, большей, чем 1, отличен от единицы группы G , то группа G изоморфна свободному произведению изоморфных копий групп M и N с объединенными подгруппами, соответствующими подгруппе U . В этом случае группу G естественно называть свободным произведением (под)групп M и N с объединенной подгруппой U .

В доказательстве этого утверждения используется еще одно существенное и необходимое нам свойство конструкции свободного произведения с объединенными подгруппами — свойство *продолжаемости гомоморфизмов*:

Пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Пусть гомоморфизмы $\sigma : M \rightarrow X$ и $\tau : N \rightarrow X$ групп M и N в некоторую группу X согласованы с изоморфизмом φ , т. е. для любого элемента $u \in U$ имеет место равенство $u\sigma = (u\varphi)\tau$. Тогда существует гомоморфизм $\rho : G \rightarrow X$ группы G в группу X , действие которого на подгруппе M совпадает с действием σ , а на подгруппе N — с действием τ .

Вообще говоря, элемент g группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$ может обладать различными несократимыми записями; тем не менее, можно показать, что любые две несократимые записи элемента g должны иметь одну и ту же длину (называемую *длиной элемента g*), а их множители с одинаковыми номерами должны принадлежать одному и тому же свободному множителю M или N группы G . Это позволяет ввести следующее понятие:

Элемент g группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$ называется *циклически несократимым*, если либо его длина равна 1, либо его длина

больше 1 и в некоторой (а потому и любой) несократимой записи элемента g первый и последний сомножители не принадлежат одной и той же подгруппе M или N . Легко видеть, что произвольный элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом.

Напомним теперь основные понятия, связанные с аппроксимируемостью групп.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$* , если для любого элемента g группы G , отличного от единицы, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что $g\varphi \neq 1$.

Если $\mathcal{K}$ совпадает с классом всех конечных групп, то свойство аппроксимируемости группами из класса $\mathcal{K}$ совпадает с классическим свойством финитной аппроксимируемости. Если же $\mathcal{K}$ есть класс всех конечных p -групп, приходим к более тонкому свойству аппроксимируемости конечными p -группами.

Подгруппа H группы G называется *отделимой в классе $\mathcal{K}$* (см. [6]), если для любого элемента $g \in G \setminus H$ найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что $g\varphi \notin H\varphi$. Подгруппу, отделимую в классе всех конечных групп, называют финитно отделимой. Очевидно, что группа G является аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа отделима в классе $\mathcal{K}$.

Как уже отмечалось выше, началом систематических исследований финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенной подгруппой следует считать основополагающую работу Г. Баумслага [16]. Приведем необходимые нам понятия и результаты из этой работы.

Будем говорить, что семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G является *фильтрацией*, если

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1.$$

Если H — подгруппа группы G , то фильтрация $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ называется H -*фильтрацией* при условии, что

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H.$$

Легко видеть, что группа G является аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда семейство всех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$, является фильтрацией. Подгруппа H аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ группы G отделима в классе $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда указанное семейство является H -фильтрацией.

Предложение 1.1. (Теорема 2 из [16].) *Пусть*

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Если группы M и N конечны, то группа G является финитно аппроксимируемой.

В действительности, Г. Баумслаг лишь заметил, что эта теорема является непосредственным следствием доказанного Б. Нейманом [21] утверждения, что свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных групп является конечным расширением некоторой свободной группы. Остается вспомнить, что свободные группы финитно аппроксимируемы и что конечное расширение финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой.

Так как из теоремы Холла – Бернса (см., напр., [3], с. 34) следует, что конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы, и так как свойство финитной отделимости произвольной конечно порожденной подгруппы сохраняется при переходе к конечному расширению, из тех же соображений получается следующее усиление предложения 1.1:

Предложение 1.2. Пусть

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Если группы M и N конечны, то каждая конечно порожденная подгруппа группы G является финитно отделимой.

Приведенная выше (в предложении 1.1) теорема Г. Баумслага используется в доказательствах практически всех известных к настоящему времени результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой, причем соответствующие рассуждения так или иначе следуют методике, также предложенной Г. Баумслагом в той же работе [16]. Центральным понятием в этой методике является понятие совместимых подгрупп.

Пусть, как и выше, M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ называются (U, V, φ) -совместимыми, если $(U \cap R)\varphi = V \cap S$.

Значение этого понятия проясняется следующим утверждением, справедливость которого хорошо известна и может быть установлена непосредственно.

Предложение 1.3. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Тогда

- (1) Если нормальные подгруппы R и S групп M и N соответственно являются (U, V, φ) -совместимыми, то отображение

$$\varphi_{R,S} : UR/R \rightarrow VS/S,$$

определяемое по правилу

$$(uR)\varphi_{R,S} = (u\varphi)S \quad (u \in U),$$

хорошо определено и является изоморфизмом подгруппы UR/R фактор-группы M/R на подгруппу VS/S фактор-группы N/S .

- (2) Пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ и

$$G_{R,S} = (M/R * N/S; UR/R = VS/S, \varphi_{R,S})$$

— свободное произведение групп M/R и N/S с подгруппами UR/R и VS/S , объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$. Естественные отображения группы M на фактор-группу M/R и группы N на фактор-группу N/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

- (3) Пересечения произвольной нормальной подгруппы группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$ с подгруппой M и с подгруппой N являются нормальными (U, V, φ) -совместимыми подгруппами. Поэтому произвольный гомоморфизм группы G в некоторую группу проходит через гомоморфизм вида $\rho_{R,S}$ для подходящих (U, V, φ) -совместимых нормальных подгрупп R и S .

Легко видеть также, что если подгруппы R_1 и S_1 групп M и N соответственно (U, V, φ) -совместимы и подгруппы R_2 и S_2 (U, V, φ) -совместимы, то и подгруппы $R_1 \cap R_2$ и $S_1 \cap S_2$ являются (U, V, φ) -совместимыми. С помощью этого замечания и предложений 1.1 и 1.3 нетрудно доказать следующее утверждение, фактически совпадающее с предложением 2 из работы [16]:

Предложение 1.4. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (U, V, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп M и N и пусть

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Тогда

- (1) Если группа G финитно аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией.

- (2) Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения с объединенными подгруппами. Здесь ситуация оказывается более сложной, так как свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных p -групп далеко не всегда является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, т. е. аналог предложения 1.1 не имеет места. Необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечных p -групп указаны Г. Хигманом в работе [19]. Этот результат можно сформулировать следующим образом:

Предложение 1.5. Пусть M и N — конечные p -группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Группа

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

аппроксимируема конечными p -группами тогда и только тогда когда существуют главные ряды

$$1 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_k = M \quad \text{и} \quad 1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_l = N$$

групп M и N соответственно такие, что изоморфизм φ отображает множество пересечений $U \cap M_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$) на множество пересечений $V \cap N_j$ ($j = 0, 1, \dots, l$)

При этом, как обычно, главным рядом группы мы называем ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Легко видеть, что нормальный ряд конечной p -группы является главным тогда и только тогда, когда порядок каждого его фактора равен числу p .

Предложение 1.5 подсказывает, что при изучении аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения с объединенной подгруппой аналогом (U, V, φ) -совместимости будет служить следующее понятие.

Пусть снова M и N — произвольные группы с изоморфными подгруппами $U \leq M$ и $V \leq N$ и изоморфизмом $\varphi : U \rightarrow V$, p — некоторое простое число. Подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ будем называть (U, V, φ, p) -совместимыми, если существуют последовательности подгрупп

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_k = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_l = N$$

групп M и N соответственно такие, что

- (1) $R_i \trianglelefteq M$ и $S_j \trianglelefteq N$ ($i = 0, 1, \dots, k$; $j = 0, 1, \dots, l$);
- (2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$; $j = 0, 1, \dots, l-1$);
- (3) φ отображает множество пересечений $U \cap R_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$) на множество пересечений $V \cap S_j$ ($j = 0, 1, \dots, l$).

Легко видеть, что произвольные (U, V, φ, p) -совместимые подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ являются (U, V, φ) -совместимыми нормальными подгруппами групп M и N соответственно. В самом деле, по определению для подходящих номеров i и j должны выполняться равенства

$$(U \cap R_i)\varphi = V \cap S_0 \quad \text{и} \quad (U \cap R_0)\varphi = V \cap S_j.$$

Отсюда

$$V \cap S_j = (U \cap R_0)\varphi \leq (U \cap R_i)\varphi = V \cap S_0,$$

и потому

$$(U \cap R)\varphi = (U \cap R_0)\varphi = V \cap S_j = V \cap S_0 = V \cap S.$$

Таким образом, для (U, V, φ, p) -совместимых подгрупп $R \leq M$ и $S \leq N$ можно говорить о группе $G_{R,S}$ и гомоморфизме $\rho_{R,S}$, введенных в предложении 1.3. Из предложения 1.1 следует, что если R

и S — (U, V, φ) -совместимые подгруппы конечного индекса групп M и N , то группа $G_{R,S}$ является финитно аппроксимируемой. Следующее утверждение показывает, что понятие (U, V, φ, p) -совместимости действительно является аналогом понятия (U, V, φ) -совместимости.

Предложение 1.6. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть также R и S — (U, V, φ) -совместимые нормальные подгруппы конечного индекса групп M и N соответственно. Подгруппы R и S являются (U, V, φ, p) -совместимыми тогда и только тогда, когда группа

$$G_{R,S} = (M/R * N/S; UR/R = VS/S, \varphi_{R,S})$$

аппроксимируется конечными p -группами.

Доказательство. Очевидно, что если последовательности подгрупп

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_k = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_l = N$$

удовлетворяют условиям (1) и (2) определения (U, V, φ, p) -совместимости, то последовательности

$$\begin{aligned} 1 &= R_0/R \leq R_1/R \leq \dots \leq R_k/R = M/R \quad \text{и} \\ 1 &= S_0/S \leq S_1/S \leq \dots \leq S_l/S = N/S \end{aligned}$$

составляют главные ряды фактор-групп M/R и N/S . Наоборот, произвольные главные ряды этих фактор-групп получаются таким образом из последовательностей некоторых однозначно определяемых подгрупп групп M и N , удовлетворяющих условиям (1) и (2).

Покажем теперь, что для произвольных номеров i и j равенство

$$(U \cap R_i)\varphi = V \cap S_j \tag{1}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(UR/R \cap R_i/R)\varphi_{R,S} = VS/S \cap S_j/S. \tag{2}$$

Тем самым, ввиду предложения 1.5, наше утверждение будет доказано.

Итак, пусть имеет место равенство (1) и пусть xR — произвольный элемент из подгруппы $UR/R \cap R_i/R$. Тогда $x \in R_i$ и без потери общности можно считать, что $x \in U$. Следовательно, $x\varphi \in V \cap S_j$, и потому

$$(xR)\varphi_{R,S} = (x\varphi)S \in VS/S \cap S_j/S.$$

Таким образом,

$$(UR/R \cap R_i/R)\varphi_{R,S} \subseteq VS/S \cap S_j/S.$$

Обратно, если элемент yS принадлежит подгруппе $VS/S \cap S_j/S$, то без потери общности можно считать, что $y \in V \cap S_j$, и потому, в силу (1), $y = x\varphi$ для подходящего $x \in U \cap R_i$. Следовательно,

$$yS = (x\varphi)S = (xR)\varphi_{R,S} \in (UR/R \cap R_i/R)\varphi_{R,S},$$

и равенство (2) доказано.

Выводимость равенства (1) из равенства (2) доказывается аналогично.

Приведем еще два необходимых нам свойства (U, V, φ, p) -совместимых подгрупп.

Предложение 1.7. Пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ , и H — произвольная нормальная подгруппа конечного p -индекса группы G . Тогда подгруппы $R = M \cap H$ и $S = N \cap H$ являются (U, V, φ, p) -совместимыми.

Доказательство. Как было отмечено в предложении 1.3, подгруппы R и S являются (U, V, φ) -совместимыми, и потому мы можем ввести в рассмотрение группу

$$G_{R,S} = (M/R * N/S; UR/R = VS/S, \varphi_{R,S}).$$

Очевидно, что отображения

$$\sigma : aR \mapsto aH \quad \text{и} \quad \tau : bS \mapsto bH$$

являются вложениями групп M/R и N/S в конечную p -группу G/H . При этом, для элемента $u \in U$ имеем

$$(uR)\sigma = uH = (u\varphi)H = ((u\varphi)S)\tau = ((uR)\varphi_{R,S})\tau.$$

Следовательно, существует гомоморфизм

$$\rho : G_{R,S} \rightarrow G/H,$$

продолжающий отображения σ и τ . Так как действие отображения ρ на сомножителях M/R и N/S группы $G_{R,S}$ инъективно, по теореме Х. Неймана (см. напр. [4], следствие 4.9.2) подгруппа $F = \text{Ker } \rho$ этой группы свободна. Таким образом, группа $G_{R,S}$ является расширением свободной группы F при помощи конечной p -группы G/H и потому аппроксимируется конечными p -группами. (U, V, φ, p) -совместимость подгрупп R и S теперь следует из предложения 1.6.

Предложение 1.8. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть подгруппы $R \leq M$ и $S \leq N$ являются (U, V, φ, p) -совместимыми и подгруппы $R' \leq M$ и $S' \leq N$ являются (U, V, φ, p) -совместимыми. Тогда и подгруппы $R \cap R'$ и $S \cap S'$ являются (U, V, φ, p) -совместимыми.

Доказательство. Пусть

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_k = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_l = N$$

и

$$R' = R'_0 \leq R'_1 \leq \dots \leq R'_m = M \quad \text{и} \quad S' = S'_0 \leq S'_1 \leq \dots \leq S'_n = N$$

— последовательности подгрупп из определения (U, V, φ, p) -совместимости. Рассмотрим следующие последовательности нормальных подгрупп групп M и N :

$$R \cap R' = R_0 \cap R'_0 \leq R_0 \cap R'_1 \leq \dots \leq R_0 \cap R'_m = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_k = M$$

и

$$S \cap S' = S_0 \cap S'_0 \leq S_0 \cap S'_1 \leq \dots \leq S_0 \cap S'_n = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_l = N.$$

Для каждого $j = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$\begin{aligned} (R_0 \cap R'_{j+1}) / (R_0 \cap R'_j) &= (R_0 \cap R'_{j+1}) / ((R_0 \cap R'_{j+1}) \cap R'_j) \\ &\simeq (R_0 \cap R'_{j+1}) R'_j / R'_j \leq R'_{j+1} / R'_j, \end{aligned}$$

так что порядок фактора $(R_0 \cap R'_{j+1}) / (R_0 \cap R'_j)$ равен 1 или p . Аналогично, порядок каждого фактора $(S_0 \cap S'_{j+1}) / (S_0 \cap S'_j)$ тоже равен 1 или p . Далее, если $(U \cap R'_j) \varphi = V \cap S'_{j_1}$, то

$$\begin{aligned} (U \cap (R_0 \cap R'_j)) \varphi &= ((U \cap R_0) \cap (U \cap R'_j)) \varphi \\ &= (V \cap S_0) \cap (V \cap S'_{j_1}) = V \cap (S_0 \cap S'_{j_1}). \end{aligned}$$

Следовательно, отбрасывая повторяющиеся члены, мы получим последовательности подгрупп, удовлетворяющие всем требованиям определения (U, V, φ, p) -совместимости. Предложение доказано.

Теперь мы можем доказать для свойства аппроксимируемости конечными p -группами точный аналог предложения 1.4.

Предложение 1.9. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (U, V, φ, p) -совместимых подгрупп групп M и N и пусть

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Тогда

- (1) Если группа G аппроксимируема конечными p -группами, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией.
- (2) Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией, то группа G аппроксимируема конечными p -группами.

Доказательство. Утверждение (1) легко выводится из предложения 1.7. Действительно, пусть g — неединичный элемент группы M . Так как группа M является подгруппой группы G , то g является неединичным элементом этой группы, и поскольку она предполагается аппроксимируемой конечными p -группами, найдется нормальная подгруппа H конечного p -индекса группы G , не содержащая элемента g . Из предложения 1.7 (и того, что семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ содержит все пары (U, V, φ, p) -совместимых подгрупп) следует, что для подходящего $\lambda \in \Lambda$ должно выполняться равенство $M \cap H = R_\lambda$. Так как $g \notin M \cap H$, тем самым доказано, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией. Аналогично — для семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Переходя к доказательству утверждения (2), договоримся для произвольного $\lambda \in \Lambda$ писать для краткости G_λ вместо G_{R_λ, S_λ} и ρ_λ вместо $\rho_{R_\lambda, S_\lambda}$ (см. предложение 1.3).

Пусть теперь g — неединичный элемент группы G и

$$g = x_1 x_2 \cdots x_n$$

— его несократимая запись. Покажем, что существует гомоморфизм группы G в некоторую конечную p -группу, образ элемента g относительно которого отличен от единицы.

Рассмотрим сначала случай, когда длина n элемента g равна 1, т. е. g лежит в одном из свободных множителей группы G . Пусть $g \in M$ (случай $g \in N$ рассматривается аналогично).

Так как семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией (и g — отличный от 1 элемент группы M), найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что подгруппа R_λ не содержит элемента g . Это означает, очевидно, что образ $g\rho_\lambda$ элемента g относительно гомоморфизма ρ_λ является неединичным элементом группы G_λ . Ввиду предложения 1.6 группа G_λ является аппроксимируемой конечными p -группами, и потому существует гомоморфизм θ этой группы в некоторую конечную p -группу X , образ элемента $g\rho_\lambda$ относительно которого отличен от 1. Очевидно, что гомоморфизм $\rho_\lambda \theta$ является искомым.

Предположим теперь, что $n > 1$. В этом случае элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ лежат поочередно в одном из свободных множителей M или N группы G и не принадлежат соответствующей объединяемой подгруппе U или V . Пользуясь тем, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выберем элемент λ_i из множества Λ следующим образом:

если элемент x_i лежит в группе M (и не лежит в ее подгруппе U), выбираем λ_i так, чтобы $x_i \notin UR_{\lambda_i}$;

если элемент x_i лежит в группе N (и не лежит в ее подгруппе V), выбираем λ_i так, чтобы $x_i \notin VS_{\lambda_i}$.

Из предложения 1.8 следует существование $\lambda \in \Lambda$ такого, что имеют место равенства

$$R_\lambda = \bigcap_{i=1}^n R_{\lambda_i} \quad \text{и} \quad S_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_{\lambda_i}.$$

Так как действие гомоморфизма ρ_λ на подгруппах M и N совпадает с действием их естественных отображений на фактор-группы M/R_λ и N/S_λ соответственно, то

$$g\rho_\lambda = x_1 T_1 \cdot x_2 T_2 \cdots x_n T_n, \tag{3}$$

где $T_i = R_\lambda$, если $x_i \in M$, и $T_i = S_\lambda$, если $x_i \in N$.

Из способа выбора λ следует, что если элемент x_i лежит в группе M , то $x_i T_i \notin UR_\lambda/R_\lambda$, и если элемент x_i лежит в группе N , то $x_i T_i \notin VS_\lambda/S_\lambda$. Следовательно, (3) является несократимой записью элемента $g\rho_\lambda$ группы

$$G_\lambda = (M/R_\lambda * N/S_\lambda; UR_\lambda/R_\lambda = VS_\lambda/S_\lambda, \varphi_\lambda),$$

а потому $g\rho_\lambda$ является неединичным элементом этой группы. Как и в первом случае, пользуясь тем, что группа G_λ аппроксимируема конечными p -группами, найдем гомоморфизм θ этой группы в некоторую конечную p -группу X , образ элемента $g\rho_\lambda$ относительно которого отличен от 1. Очевидно, что тогда гомоморфизм $\rho_\lambda \theta$ является искомым. Предложение доказано.

Закончим этот параграф двумя полезными замечаниями. Первое из них дает простое достаточное условие аппроксимируемости конечными p -группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных p -групп, вытекающее из теоремы Хигмена (см. предложение 1.5). Второе доставляет достаточный признак (U, V, φ, p) -совместимости пары подгрупп.

Предложение 1.10. Пусть M и N — конечные p -группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Предположим, что подгруппа V выделяется в группе N прямым множителем, т. е. $N = V \times T$ для некоторой ее подгруппы T . Тогда группа

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

аппроксимируема конечными p -группами.

Доказательство. Пусть

$$1 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_r = M$$

— произвольный главный ряд группы M и пусть $S_i = (U \cap M_i) \varphi$ ($i = 0, 1, \dots, r$). Возьмем еще какой-либо главный ряд

$$1 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_s = T$$

группы T . Тогда последовательность подгрупп

$$1 = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_r = VT_0 \leq VT_1 \leq \dots \leq VT_s = N$$

является нормальным рядом группы N , семейство пересечений членов которого с подгруппой V совпадает с семейством подгрупп S_i . Так как $VT_{j+1}/VT_j \simeq T_{j+1}/T_j$, после отбрасывания повторяющихся членов в последовательности подгрупп $S_0, S_1, \dots, S_r$ получим главный ряд группы N , который вместе с выбранным вначале главным рядом группы M удовлетворяет требованиям предложения 1.5.

Предложение 1.11. Пусть M и N — некоторые группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть R и S — нормальные подгруппы конечного p -индекса групп M и N соответственно. Если существуют такие последовательности нормальных подгрупп

$$R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_n = M \quad \text{и} \quad S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n = N,$$

что для любого номера $i = 0, 1, \dots, n$ подгруппы R_i и S_i являются (U, V, φ) -совместимыми и для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ фактор-группа $(U \cap R_{i+1}) / (U \cap R_i)$ либо единична, либо имеет порядок p , то подгруппы R и S являются (U, V, φ, p) -совместимыми.

В самом деле, поскольку фактор-группы M/R и N/S являются конечными p -группами, указанные последовательности подгрупп можно уплотнить до таких последовательностей нормальных подгрупп, факторы которых имеют порядок p . Так как для любых уплотняющих подгрупп X и Y при $R_i \leq X \leq R_{i+1}$ и $S_j \leq Y \leq S_{j+1}$ подгруппа $U \cap X$ совпадает с $U \cap R_i$ или $U \cap R_{i+1}$, а подгруппа $V \cap Y$ совпадает с $V \cap S_j$ или $V \cap S_{j+1}$, эти новые последовательности подгрупп удовлетворяют и требованию (3) из определения (U, V, φ, p) -совместимости.

§ 2. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами

В этом параграфе рассматривается аппроксимируемость в классах всех конечных групп и всех конечных p -групп свободного произведения $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K . Напомним, что группа G определяется в системе порождающих, являющейся объединением (непересекающихся) систем образующих групп A и B , всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[h, k] = 1$, где $h \in H$ и $k \in K$. Как уже отмечалось во введении, если хотя бы одна из подгрупп H или K является единичной, то группа G оказывается, очевидно, обычным свободным произведением групп A и B , и в силу результатов работы [18] группа G является финитно аппроксимируемой (аппроксимируемой конечными p -группами) тогда и только тогда, когда финитно аппроксимируемы (аппроксимируемы конечными p -группами) группы A и B . В остальных случаях соответствующие критерии доставляются следующими теоремами:

Теорема 1. Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является финитно аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K финитно отделимы.

Теорема 2. Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой конечными p -группами, тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются отделимыми в классе конечных p -групп.

Доказательства этих теорем начнем с описания строения групп-

пы $G = (A * B; [H, K] = 1)$ в терминах конструкции свободного произведения групп с объединенными подгруппами.

Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через H_i изоморфную копию группы H , через K_i — изоморфную копию группы K и фиксируем изоморфизмы

$$\sigma^i : H \rightarrow H_i \quad \text{и} \quad \tau^i : K \rightarrow K_i.$$

Пусть, далее, $U_i = H_i \times K_i$ — прямое произведение групп H_i и K_i и

$$M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$$

— свободное произведение групп A и U_1 с подгруппами H и H_1 , объединенными в соответствии с изоморфизмом σ^1 ,

$$N = (B * U_2; K = K_2, \tau^2)$$

— свободное произведение групп B и U_2 с подгруппами K и K_2 , объединенными в соответствии с изоморфизмом τ^2 .

Пусть φ — изоморфизм группы U_1 на группу U_2 , продолжающий отображения

$$(\sigma^1)^{-1} \sigma^2 : H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{и} \quad (\tau^1)^{-1} \tau^2 : K_1 \rightarrow K_2.$$

Пусть, наконец,

$$P = (M * N; U_1 = U_2, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U_1 и U_2 , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ .

Предложение 2.1. *Группы G и P изоморфны. Более того, существует изоморфизм группы G на группу P , продолжающий тождественные отображения систем порождающих групп A и B (и потому естественные отображения групп A и B в группу G являются вложениями).*

Доказательство. Поскольку для произвольного элемента h из подгруппы H в группе P выполнены равенства $h = h\sigma^1$ и $h = h\varphi$,

имеем $h = h\varphi = h((\sigma^1)^{-1}\sigma^2) = h\sigma^2 \in H_2$. Так как, кроме того, для произвольного $k \in K$ элемент $k = k\tau^2$ принадлежит подгруппе K_2 , в группе P подгруппы H и K поэлементно перестановочны. Следовательно, тождественные отображения систем порождающих групп A и B переводят все определяющие соотношения группы G в равенства, справедливые в группе P , и потому определяют гомоморфизм α группы G в группу P .

С другой стороны, очевидно, что тождественное отображение системы порождающих группы A в группу G определяет гомоморфизм μ A в G . Аналогично, пусть ν — определяемый тождественным отображением системы порождающих гомоморфизм группы B в группу G . Так как для любых $h \in H$ и $k \in K$ элементы $h\mu$ и $k\nu$ группы G перестановочны, отображения $(\sigma^1)^{-1}\mu$ и $(\tau^1)^{-1}\nu$ определяют гомоморфизм δ_1 группы U_1 в группу G . Поскольку для любого $h \in H$ имеет место равенство $(h\sigma^1)\delta_1 = h\mu$, гомоморфизмы μ и δ_1 согласованы с изоморфизмом σ^1 и потому продолжаемы до гомоморфизма θ группы M в группу G . Аналогично, существует гомоморфизм δ_2 группы U_2 в группу G , продолжающий отображения $(\sigma^2)^{-1}\mu$ и $(\tau^2)^{-1}\nu$, и существует гомоморфизм η группы N в группу G , продолжающий гомоморфизмы ν и δ_2 . Если u — произвольный элемент подгруппы U_1 , $u = xy$, где $x \in H_1$, $y \in K_1$, то

$$\begin{aligned} (u\varphi)\eta &= (x((\sigma^1)^{-1}\sigma^2) \cdot y((\tau^1)^{-1}\tau^2))\eta = (x((\sigma^1)^{-1}\sigma^2) \cdot y((\tau^1)^{-1}\tau^2))\delta_2 \\ &= x((\sigma^1)^{-1}\mu) \cdot y((\tau^1)^{-1}\nu) = u\delta_1 = u\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, отображения θ и η согласованы с изоморфизмом φ , и потому существует продолжающий их гомоморфизм β группы P в группу G . Так как действие отображения β на подгруппах A и B совпадает с действием отображений μ и ν соответственно, произведение $\alpha\beta$ является тождественным автоморфизмом группы G . Поэтому отображение α инъективно, а ввиду того, что группа P , как легко видеть, порождается подгруппами A и B , оно является и сюръективным.

Обозначения, связанные с полученным разложением группы G в свободное произведение групп M и N с объединенными подгруппами U_1 и U_2 , предполагаются фиксированными всюду ниже.

Необходимость условий в обеих теоремах теперь почти очевидна. В действительности, отделимость подгрупп H и K является необходимой уже для аппроксимируемости в соответствующем классе групп подгрупп M и N группы G . Пусть, например, a — элемент группы A , не принадлежащий подгруппе H , и пусть образ этого элемента при любом гомоморфизме группы A на конечную группу (или на конечную p -группу) содержится в образе подгруппы H . Если еще k — неединичный элемент из подгруппы K , то элемент $w = [a, k(\tau^1)^{-1}]$ группы $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$ отличен от 1, поскольку его запись

$$w = a^{-1}(k(\tau^1)^{-1})^{-1}a(k(\tau^1)^{-1})$$

является несократимой в данном разложении группы M . Очевидно, с другой стороны, что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы M на конечную группу (или, соответственно, на конечную p -группу) равен 1.

Для доказательства достаточности условий теорем 1 и 2 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть X и Y — произвольные нормальные подгруппы конечного индекса групп A и B соответственно. Существуют нормальные подгруппы конечного индекса R группы M и S группы N такие, что*

- (1) $A \cap R = X$ и $B \cap S = Y$;
- (2) $U_1 \cap R = (X \cap H) \sigma^1 \cdot (Y \cap K) \tau^1$ и
 $U_2 \cap S = (X \cap H) \sigma^2 \cdot (Y \cap K) \tau^2$.

В частности, подгруппы R и S являются (U_1, U_2, φ) -совместимыми.

Доказательство. Пусть X — нормальная подгруппа конечного индекса группы A , Y — нормальная подгруппа конечного индекса

группы B . Полагаем $C = X \cap H$, $D = Y \cap K$ и для $i = 1, 2$ пусть

$$C_i = C\sigma^i, \quad D_i = D\tau^i \quad \text{и} \quad V_i = C_i D_i.$$

Тогда V_i является нормальной подгруппой конечного индекса группы U_i такой, что

$$U_i/V_i = H_i/C_i \times K_i/D_i, \quad H_i \cap V_i = C_i \quad \text{и} \quad K_i \cap V_i = D_i.$$

В частности, поскольку $(X \cap H)\sigma^1 = C_1 = H_1 \cap V_1$, нормальные подгруппы X и V_1 групп A и U_1 оказываются (H, H_1, σ^1) -совместимыми, и мы можем рассмотреть группу

$$M_{X,V_1} = (A/X * U_1/V_1; \quad HX/X = H_1V_1/V_1, \quad \sigma_{X,V_1}^1)$$

и гомоморфизм ρ_{X,V_1} группы M на группу M_{X,V_1} , продолжающий естественные отображения A на A/X и U_1 на U_1/V_1 .

Группа M_{X,V_1} является свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп и потому финитно аппроксимируема в силу предложения 1.1. Следовательно, в ней найдется нормальная подгруппа Z конечного индекса, тривиально пересекающаяся с каждой из (конечных) подгрупп A/X и U_1/V_1 :

$$A/X \cap Z = 1 = U_1/V_1 \cap Z.$$

Обозначим через R прообраз подгруппы Z относительно отображения ρ_{X,V_1} , $R = Z(\rho_{X,V_1})^{-1}$. Тогда R является такой нормальной подгруппой конечного индекса группы M , что $A \cap R = X$ и $U_1 \cap R = V_1$.

В самом деле, включения $X \leq A \cap R$ и $V_1 \leq U_1 \cap R$ очевидны. С другой стороны,

$$(A \cap R)\rho_{X,V_1} \leq A\rho_{X,V_1} \cap R\rho_{X,V_1} = A\rho_{X,V_1} \cap Z \quad \text{и}$$

$$(U_1 \cap R)\rho_{X,V_1} \leq U_1\rho_{X,V_1} \cap R\rho_{X,V_1} = U_1\rho_{X,V_1} \cap Z,$$

и так как гомоморфизм ρ_{X,V_1} продолжает естественные отображения группы A на фактор-группу A/X и группы U_1 на фактор-группу U_1/V_1 , то $A\rho_{X,V_1} = A/X$, $U_1\rho_{X,V_1} = U_1/V_1$, и потому в силу выбора подгруппы Z имеем $(A \cap R)\rho_{X,V_1} = 1$ и $(U_1 \cap R)\rho_{X,V_1} = 1$. Следовательно, если $g \in A \cap R$, то $g\rho_{X,V_1} = 1$ и $g\rho_{X,V_1} = gX$, и потому $g \in X$. Таким образом, $A \cap R \leq X$ и аналогично $U_1 \cap R \leq V_1$.

Аналогичные соображения, связанные с рассмотрением группы

$$N_{Y,V_2} = (B/Y * U_2/V_2; KY/Y = K_2V_2/V_2, \tau_{Y,V_2}^2),$$

приводят к существованию нормальной подгруппы S конечного индекса группы N такой, что $B \cap S = Y$ и $U_2 \cap S = V_2$. Очевидно, что подгруппы R и S являются искомыми.

Лемма 2.2. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы, а их подгруппы H и K финитно отделимы. Тогда*

- (1) *для любого неединичного элемента g группы M найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M , не содержащая элемента g и (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N , и для любого неединичного элемента g группы N найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , не содержащая элемента g и (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M ;*
- (2) *для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе U_1 , найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M такая, что $g \notin U_1R$, и (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N , и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе U_2 , найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , такая, что $g \notin U_2S$, и (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M .*

Доказательство. Построение подгрупп R и S будет происходить по схеме, указанной в доказательстве леммы 2.1, путем специального выбора подгрупп X , Y и Z . Ввиду очевидной симметрии можно ограничиться рассмотрением случая, когда g является элементом группы M .

Пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ — несократимая запись элемента g относительно свободного разложения $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$ группы M . Предположим сначала, что $n = 1$, т. е. $g \in A$ или $g \in U_1$.

Если $g \in A$ и $g \neq 1$, то ввиду финитной аппроксимируемости группы A в ней найдется нормальная подгруппа X конечного индекса, не содержащая элемента g . Если же, вдобавок, $g \notin U_1$, то (поскольку тогда $g \notin H$) ввиду финитной отделимости подгруппы H в группе A подгруппу X можно выбрать так, чтобы $g \notin HX$. Возьмем еще произвольную нормальную подгруппу Y конечного индекса группы B и построим для подгрупп X и Y подгруппы R и S групп A и B в соответствии с леммой 2.1. Тогда $g \notin R$, поскольку $g \notin X = A \cap R$. Если же $g \notin HX$, то элемент gX фактор-группы A/X не входит в объединяемую подгруппу HX/X , а потому — и в другой сомножитель U_1/V_1 разложения группы M_{X,V_1} (в обозначениях доказательства леммы 2.1). Так как этот сомножитель конечен, а произвольная конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы является финитно отделимой, в построении из леммы 2.1 подгруппу Z группы M_{X,V_1} можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла и требованию $gX \notin U_1/V_1 \cdot Z$. Очевидно, что тогда для соответствующих подгрупп R и S будем иметь $g \notin U_1 R$.

Если элемент g является неединичным элементом группы U_1 и $g = h_1 k_1$, где $h_1 \in H_1$ и $k_1 \in K_1$, то хотя бы один из элементов h_1 или k_1 отличен от единицы. Если $h_1 \neq 1$, в качестве X возьмем такую подгруппу конечного индекса группы A , которая не содержит элемента $h_1(\sigma^1)^{-1}$, а в качестве Y — произвольную нормальную подгруппу конечного индекса группы B . Если $k_1 \neq 1$, в качестве Y возьмем такую подгруппу конечного индекса группы B , которая не содержит

элемента $k_1(\tau^1)^{-1}$, а в качестве X — произвольную нормальную подгруппу конечного индекса группы A . Очевидно, что в любом случае тогда gV_1 будет неединичным элементом фактор-группы U_1/V_1 и потому не будет входить в подгруппу Z группы M_{X,V_1} из построения в лемме 2.1. Ясно, что соответствующие подгруппы R и S являются искомыми.

Предположим теперь, что $n > 1$. Тогда элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат попеременно одному из подмножеств $A \setminus H$ и $U_1 \setminus H_1$. Пусть, для определенности, $x_1, x_3, \dots \in A \setminus H$, $x_2, x_4, \dots \in U_1 \setminus H_1$. Так как подгруппа H группы A предполагается финитно отделимой, в A найдется нормальная подгруппа конечного индекса X такая, что элементы $x_1, x_3, \dots$ не входят в подгруппу HX . Так как K_1 -проекции элементов $x_2, x_4, \dots$ отличны от единицы, а группа B финитно аппроксимируема, в ней существует нормальная подгруппа конечного индекса Y , не содержащая τ^1 -прообразов этих проекций. Очевидно тогда, что запись элемента

$$g\rho_{X,V_1} = (x_1\rho_{X,V_1})(x_2\rho_{X,V_1}) \cdots (x_n\rho_{X,V_1})$$

является несократимой в свободном разложении группы

$$M_{X,V_1} = \left(A/X * U_1/V_1; HX/X = H_1V_1/V_1, \sigma_{X,V_1}^1 \right).$$

В частности, элемент $g\rho_{X,V_1}$ этой группы отличен от единицы и не входит в ее конечную подгруппу U_1/V_1 . Выбирая подгруппу Z в построении из леммы 2.1 так, чтобы этот элемент не вошел в подгруппу $U_1/V_1 \cdot Z$, получим нормальные подгруппы R и S с требуемым свойством.

Достаточность условий теоремы 1 является следствием леммы 2.2 и предложения 1.4. Действительно, если $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (U_1, U_2, φ) -совместимых подгрупп групп M и N из разложения группы G , то утверждение (1) леммы 2.2 означает, что каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, а

утверждение (2) леммы 2.2 означает, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U_1 -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U_2 -фильтрацией.

Таким образом, теорема 1 доказана. Для завершения доказательства теоремы 2 приведем еще два вспомогательных результата.

Лемма 2.3. *Пусть X и Y — произвольные нормальные подгруппы конечного p -индекса групп A и B соответственно. Тогда существуют (U_1, U_2, φ, p) -совместимые подгруппы конечного индекса R группы M и S группы N такие, что $A \cap R = X$ и $B \cap S = Y$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если подгруппы X и Y имеют конечный p -индекс в группах A и B , то подгруппы R и S в лемме 2.1 можно выбрать также имеющими p -индекс. В самом деле, в этом случае группа M_{X, V_1} оказывается в силу предложения 1.10 аппроксимируемой конечными p -группами, и потому подгруппу Z можно считать имеющей p -индекс. Тогда и подгруппа R будет иметь конечный p -индекс.

Поскольку фактор-группы A/X и B/Y являются конечными p -группами, то существуют последовательности

$$X = X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k = A \quad \text{и} \quad Y = Y_0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_l = B$$

нормальных подгрупп групп A и B , все факторы X_{i+1}/X_i и Y_{j+1}/Y_j которых имеют порядок p . Из леммы 2.1 с учетом замечания, сделанного выше, следует существование для каждого $i = 0, 1, \dots, k$ пары нормальных подгрупп конечного p -индекса $\bar{R}_i$ группы M и $\bar{S}_i$ группы N таких, что

$$U_1 \cap \bar{R}_i = (X_i \cap H) \sigma^1 \cdot (Y_0 \cap K) \tau^1 \quad \text{и}$$

$$U_2 \cap \bar{S}_i = (X_i \cap H) \sigma^2 \cdot (Y_0 \cap K) \tau^2.$$

Аналогично, для каждого $j = 0, 1, \dots, l$ пусть $\bar{R}_{k+j}$ и $\bar{S}_{k+j}$ — нормальные подгруппы конечного p -индекса групп M и N такие, что

$$U_1 \cap \bar{R}_{k+j} = (X_k \cap H) \sigma^1 \cdot (Y_j \cap K) \tau^1 = H_1 \cdot (Y_j \cap K) \tau^1 \quad \text{и}$$

$$U_2 \cap \bar{S}_{k+j} = (X_k \cap H) \sigma^2 \cdot (Y_j \cap K) \tau^2 = H_2 \cdot (Y_j \cap K) \tau^2.$$

Можно считать при этом, что $\overline{R}_{k+l} = M$ и $\overline{S}_{k+l} = N$. Отметим, что пересечения $U_1 \cap \overline{R}_i$ и $U_2 \cap \overline{S}_i$ ($i = 0, 1, \dots, k+l$) образуют в группах U_1 и U_2 возрастающие последовательности нормальных подгрупп, все факторы которых имеют порядок, равный 1 или p .

Полагая теперь для любого номера $i = 0, 1, \dots, k+l$

$$R_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{R}_j \quad \text{и} \quad S_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{S}_j,$$

получаем две последовательности

$$R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_{k+l} = M \quad \text{и} \quad S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_{k+l} = N$$

нормальных подгрупп конечного p -индекса групп M и N . Так как для любого $i = 0, 1, \dots, k+l$ имеют место очевидные равенства

$$U_1 \cap R_i = U_1 \cap \overline{R}_i \quad \text{и} \quad U_2 \cap S_i = U_2 \cap \overline{S}_i,$$

из предложения 1.11 следует, что подгруппы $R = R_0$ и $S = S_0$ являются (U_1, U_2, φ, p) -совместимыми. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть группы A и B аппроксимируемы конечными p -группами, а их подгруппы H и K отделимы в классе конечных p -групп. Тогда

- (1) для любого неединичного элемента g группы M найдется нормальная подгруппа R группы M , не содержащая элемента g и являющаяся (U_1, U_2, φ, p) -совместимой с некоторой нормальной подгруппой S группы N , и для любого неединичного элемента g группы N найдется нормальная подгруппа S группы N , не содержащая элемента g и являющаяся (U_1, U_2, φ, p) -совместимой с некоторой нормальной подгруппой R группы M ;
- (2) для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе U_1 , найдется нормальная подгруппа R группы M такая, что $g \notin U_1 R$, и (U_1, U_2, φ, p) -совместимая с некоторой

нормальной подгруппой S группы N , и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе U_2 , найдется нормальная подгруппа S группы N такая, что $g \notin U_2 S$, и (U_1, U_2, φ, p) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R группы M .

Доказательство этой леммы проводится по уже понятной схеме. Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 2.2, с учетом аппроксимируемости групп A и B конечными p -группами и отделимости подгрупп H и K в классе конечных p -групп, подберем для элемента $g \in M$ такого, что $g \neq 1$ или $g \notin U_1$, нормальные подгруппы X и Y конечных p -индексов групп A и B и подгруппу Z так, чтобы для соответствующих подгрупп конечных p -индексов R' и S' , построенных, как в лемме 2.1, выполнялись условия $g \notin R'$ или $g \notin U_1 R'$ соответственно. Если теперь в построении из доказательства леммы 2.3, примененном к подгруппам X и Y , взять $\bar{R}_0 = R'$ и $\bar{S}_0 = S'$, то для полученных в этом построении подгрупп R и S будут иметь место включения $R \leq R'$ и $S \leq S'$, так что они окажутся искомыми.

Достаточность условий в теореме 2 следует теперь из леммы 2.4 и предложения 1.9 аналогично тому, как теорема 1 получается из леммы 2.2 и предложения 1.4.

Приведем теперь ряд конкретных утверждений, вытекающих из теорем 1 и 2.

Заметим, прежде всего, что если некоторая группа является финитно аппроксимируемой или аппроксимируемой конечными p -группами, то любая ее конечная подгруппа финитно отделима или отделима в классе конечных p -групп соответственно. Отсюда получаем

Следствие 2.1. *Свободное произведение*

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

финитно аппроксимируемых (аппроксимируемых конечными p -группами) групп A и B с коммутирующими конечными подгруппами H

и K является финитно аппроксимируемой (соответственно, аппроксимируемой конечными p -группами) группой.

Заметим, впрочем, что если подгруппы H и K являются конечными, то группа G является свободным произведением групп M и N с объединенными конечными подгруппами U_1 и U_2 (и каждая из групп M и N является свободным произведением с объединенными конечными подгруппами). Поэтому утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения финитно аппроксимируемых групп с коммутирующими конечными подгруппами следует также из теоремы 3 работы Г. Баумслага [16], утверждающей, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными конечными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.

Поскольку каждая подгруппа полициклической группы финитно отделима (см. теорему 6 из [6]), из теоремы 1 получаем

Следствие 2.2. *Пусть группы A и B являются полициклическими. Тогда группа*

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

финитно аппроксимируема (при любых подгруппах H и K групп A и B соответственно).

Из теоремы Холла – Бернса (см. напр. [3, с. 34]) следует, что конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы. Имеем поэтому

Следствие 2.3. *Пусть группы A и B свободны, а подгруппы H и K являются конечно порожденными. Тогда группа*

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

является финитно аппроксимируемой.

В работе Г. Баумслага [15] доказано, что группа с одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$ финитно аппроксимируема, если ни один порождающий этой группы не входит одновременно в оба слова u и v . Так как такая группа, очевидно, является свободным произведением двух свободных групп с коммутирующими циклическими подгруппами, порождаемыми соответственно элементами u и v , следствие 3 является обобщением этого результата Г. Баумслага.

Напомним, далее, что подгруппу X группы Y называют p -изолированной (где p — простое число), если для любого элемента $y \in Y$ включение $y^p \in X$ возможно лишь при $y \in X$. Если π — некоторое множество простых чисел, то подгруппа X называется π -изолированной, если она p -изолирована для любого числа p из множества π . Наконец, p' , как обычно, обозначает множество всех простых чисел, отличных от p .

Справедливо следующее простое

Предложение 2.2. *Если подгруппа X группы Y отделима в классе конечных p -групп, то X является p' -изолированной.*

В самом деле, пусть элемент $y \in Y$ такой, что $y^q \in X$ для некоторого простого числа $q \neq p$. Пусть ρ — гомоморфизм группы Y на некоторую группу порядка p^n , и пусть целое число r удовлетворяет сравнению $qr \equiv 1 \pmod{p^n}$. Тогда

$$y\rho = ((y\rho)^q)^r \in X\rho,$$

и так как подгруппа X предполагается отделимой в классе конечных p -групп, отсюда следует, что $y \in X$.

Вообще говоря, обращение предложения 2.2 не имеет места, но в некоторых случаях оно оказывается справедливым. Прежде всего, отметим здесь

Предложение 2.3. *Произвольная циклическая p' -изолированная подгруппа свободной группы является отделимой в классе конечных p -групп.*

Доказательство. Пусть Y — свободная группа и пусть X — p' -изолированная циклическая подгруппа группы Y , порождаемая элементом x . Так как единичная подгруппа группы, аппроксимируемой конечными p -группами, является отделимой в классе конечных p -групп и так как свободные группы аппроксимируемы конечными p -группами, мы можем считать, что $x \neq 1$. Обозначим через z элемент группы Y , порождающий централизатор Z элемента x . Так как подгруппа X p' -изолирована, $x = z^{p^k}$ для некоторого целого $k \geq 0$.

Пусть y — элемент группы Y , не принадлежащий подгруппе X . Если y не входит в подгруппу Z , то коммутатор $[x, y]$ отличен от единицы, и так как группа Y аппроксимируема конечными p -группами, найдется гомоморфизм ρ группы Y на некоторую конечную p -группу такой, что $[x, y]\rho \neq 1$. Ясно, что тогда $y\rho \notin X\rho$.

Если $y = z^n$ для некоторого целого числа n , то ввиду того, что $y \notin X$, число n не делится на p^k . Так как $z^{p^k} \neq 1$, то существует гомоморфизм ρ группы Y на конечную p -группу P такой, что $(z^{p^k})\rho \neq 1$. Это означает, что если порядок элемента $z\rho$ в группе P равен p^l , то $l \geq k$. Пусть для некоторого целого числа m имеет место равенство $y\rho = (x\rho)^m$. Переписанное в виде $(z\rho)^n = (z\rho)^{p^k m}$, оно равносильно сравнению $n \equiv p^k m \pmod{p^l}$, из которого следует, что n должно делиться на p^k . Полученное противоречие доказывает, что $y\rho \notin X\rho$.

Из предложения 2.3 и теоремы 2 получается следующий “ p -аналог” вышеупомянутого результата Г.Баумслага:

Следствие 2.4. Пусть группа G задана в образующих

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

одним определяющим соотношением $[u, v] = 1$, где u и v — такие непустые несократимые слова, что ни один порождающий a_i не входит в u и в v одновременно. Группа G аппроксимируема конечными p -группами тогда и только тогда, когда в свободной группе $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ элементы u и v не являются q -ой степенью ни для какого простого числа q , отличного от p .

Докажем теперь

Предложение 2.4. *Произвольная p' -изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима в классе конечных p -групп.*

Доказательство. Пусть Y — конечно порожденная нильпотентная группа и X — p' -изолированная подгруппа группы Y . Если подгруппа X инвариантна в Y , то ее отделимость в классе конечных p -групп очевидна, поскольку в этом случае фактор-группа Y/X , являясь нильпотентной группой без p' -крючения, аппроксимируема конечными p -группами по теореме Грюнберга [18].

Таким образом, мы располагаем основанием индукции по длине ряда

$$X = X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k = Y$$

последовательных нормализаторов подгруппы X .

Пусть y — элемент группы Y , не принадлежащий подгруппе X . Мы хотим доказать существование такой нормальной подгруппы N конечного p -индекса группы Y , что $y \notin XN$. Так как все члены X_i ряда нормализаторов являются p' -изолированными подгруппами (см., напр., [12], теорема 4.11), по индуктивным соображениям можно считать, что $y \in X_1$. Так как $X \trianglelefteq X_1$, ввиду замечания, сделанного выше, существует нормальная подгруппа N_1 конечного p -индекса группы X_1 такая, что $y \notin XN_1$. Предположим, что для некоторого номера i , $1 \leq i < k$, уже построена такая нормальная подгруппа N_i конечного p -индекса группы X_i , что $y \notin XN_i$. Покажем, что тогда можно найти нормальную подгруппу N_{i+1} конечного p -индекса группы X_{i+1} такую, что $y \notin XN_{i+1}$. Тем самым существование искомой подгруппы N будет доказано.

Так как подгруппа X_i конечно порождена, пересечение C всех подгрупп, сопряженных с N_i в группе X_{i+1} , имеет конечный индекс в группе X_i , являющийся, к тому же, p -числом. Из p' -изолированности подгруппы X_i следует поэтому p' -изолированность нормальной под-

группы C группы X_{i+1} , а потому — и аппроксимируемость конечными p -группами фактор-группы X_{i+1}/C . Так как элемент yC этой фактор-группы не входит в ее конечную подгруппу XC/C , найдется нормальная подгруппа N_{i+1}/C конечного p -индекса группы X_{i+1}/C такая, что yC не входит в подгруппу $XC/C \cdot N_{i+1}/C = XN_{i+1}/C$. Таким образом, N_{i+1} — такая нормальная подгруппа конечного p -индекса группы X_{i+1} , что $y \notin XN_{i+1}$.

Из предложения 2.4 и теоремы 2 получаем

Следствие 2.5. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p -группами (т. е. (см. [18]) их периодические части являются p -группами), H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

является аппроксимируемой конечными p -группами тогда и только тогда, когда подгруппы H и K групп A и B p' -изолированы.

Произвольная группа, аппроксимируемая конечными p -группами хотя бы для одного простого числа p , аппроксимируема, разумеется, и нильпотентными группами. Поскольку обратное, вообще говоря, неверно, представляет интерес

Следствие 2.6. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B; [H, K] = 1)$ является аппроксимируемой нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p она аппроксимируема конечными p -группами.

Доказательство. Так как каждая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируема конечными p -группами для любого простого числа p (см. [18]), то ввиду следствия 2.5 нам достаточно показать, что если свободное произведение

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

нильпотентных групп A и B с коммутирующими неединичными подгруппами H и K является группой, аппроксимируемой нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппы H и K групп A и B p' -изолированы.

Предположим сначала, что в группе A существуют такие элементы a и b , не принадлежащие подгруппе H , что для некоторых различных простых чисел p и q элементы a^p и b^q входят в H . Тогда в группе $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$ имеют место равенства $a^p = (k^{-1}ak)^p$ и $b^q = (k^{-1}bk)^q$, где k — неединичный элемент из подгруппы K_1 . Поэтому (см., напр., [12, лемма 4.6]) при любом гомоморфизме группы M в нильпотентную группу порядок образа коммутатора $[a, k]$ является p -числом, а порядок образа коммутатора $[b, k]$ является q -числом, и так как в нильпотентной группе элементы взаимно простых порядков коммутируют, то при любом гомоморфизме группы M в нильпотентную группу элемент $w = [[a, k], [b, k]]$ переходит в единицу. Покажем, с другой стороны, что запись этого элемента

$$w = k^{-1}a^{-1}k a k^{-1}b^{-1}k (b a^{-1}) k^{-1}a k b^{-1}k^{-1}b k$$

является несократимой в разложении группы

$$M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1),$$

и потому $w \neq 1$. Для этого достаточно убедиться в том, что элемент ba^{-1} не входит в подгруппу H .

Если H является нормальной подгруппой группы A , то это утверждение очевидно, так как в противном случае в фактор-группе A/H имеют место равенства

$$(Ha)^p = H \quad \text{и} \quad (Ha)^q = (Hb)^q = H,$$

из которых ввиду того, что $(p, q) = 1$, следует, что $a \in H$.

В общем случае рассмотрим ряд

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_s = A$$

последовательных нормализаторов подгруппы H . Очевидно, что найдется номер k , $0 < k \leq s$, такой, что $a \in H_k \setminus H_{k-1}$. Если предположить, что $Ha = Hb$, то поскольку тогда для любого i будет выполнено равенство $H_i a = H_i b$, получаем, что и $b \in H_k \setminus H_{k-1}$. Так как, при этом, $a^p \in H_{k-1}$, $b^q \in H_{k-1}$ и H_{k-1} является нормальной подгруппой группы H_k , то рассуждая так же, как и выше, приходим к включению $a \in H_{k-1}$, противоречащему выбору k .

Таким образом, мы показали, что если группа

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

аппроксимируема нильпотентными группами, то для некоторого простого числа p подгруппа H группы A является p' -изолированной. Точно так же и подгруппа K группы B q' -изолирована для подходящего простого числа q . Если при этом H не является q' -изолированной, а K не является p' -изолированной, то $p \neq q$ и найдутся элементы $a \in A \setminus H$ и $b \in B \setminus K$ такие, что $a^p \in H$ и $b^q \in K$.

Несократимая запись элемента $[a, k]$ группы M , где k — неединичный элемент из подгруппы K_1 , имеет длину 4, и потому этот элемент не входит в подгруппу U_1 . Аналогично, элемент $[b, h]$ группы N (где h неединичный элемент из группы H_2) не лежит в ее подгруппе U_2 . Поэтому $v = [[a, k], [b, h]]$ — отличный от единицы элемент группы G . Но, как и выше, образы коммутаторов $[a, k]$ и $[b, h]$ при любом гомоморфизме группы G в нильпотентную группу являются p - и q -элементом соответственно, и потому образ элемента v при любом таком гомоморфизме равен 1.

Итак, подгруппы H и K p' -изолированы для некоторого простого числа p , и следствие 2.6 доказано.

В заключение, приведем простой пример, показывающий, что отсутствие кручения в группах A и B в доказанном следствии существенно.

Пусть G — группа с представлением образующими и определяющими соотношениями вида

$$G = \langle a, b, c; a^2 = b^2 = c^3 = [a, c] = [b, c] = 1 \rangle.$$

Тогда $G = (A * B; [H, K] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K , где

$A = \langle a, c; a^2 = c^3 = [a, c] = 1 \rangle$ — прямое произведение двух циклических групп порядков 2 и 3,

$B = \langle b; b^2 = 1 \rangle$ — циклическая группа порядка 2,

H — циклическая подгруппа группы A , порождаемая элементом c , и $K = B$.

Очевидно, что группа G не является аппроксимируемой конечными p -группами ни для какого простого числа p . Покажем, что она, тем не менее, аппроксимируема нильпотентными группами.

В самом деле, подгруппа H лежит, очевидно, в центре группы G . Так как фактор-группа $G/H = \langle a, b; a^2 = b^2 = 1 \rangle$ является свободным произведением двух циклических групп порядка 2, то она аппроксимируема конечными 2-группами, а потому — и нильпотентными группами. Поэтому если неединичный элемент $g \in G$ не входит в подгруппу H , то существование гомоморфизма группы G на нильпотентную группу, отделяющего g от 1, не вызывает сомнений.

Пусть $g \in H$. Очевидно, что отображение

$$a \mapsto a, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto c$$

множества образующих группы G в группу A определяет гомоморфизм первой из них на вторую. Поскольку этот гомоморфизм действует тождественно на подгруппе H , он является искомым.

§ 3. Аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами

В этом параграфе свойства финитной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p -группами рассматриваются для свободного произведения

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K . Напомним, что группа G определяется в системе порождающих, являющейся объединением (непересекающихся) систем образующих групп A и B , всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида

$$[a, k] = 1 \quad \text{и} \quad [h, b] = 1, \quad \text{где } a \in A, b \in B, h \in H \text{ и } k \in K.$$

Напомним также, что если хотя бы одна из подгрупп H или K совпадает со всей группой A или B соответственно, то группа G является прямым произведением групп A и B , и потому является финитно аппроксимируемой (аппроксимируемой конечными p -группами) тогда и только тогда, когда финитно аппроксимируемы (аппроксимируемы конечными p -группами) группы A и B . В остальных случаях имеют место следующие две теоремы, аналогичные доказанным в параграфе 2 соответствующим утверждениям для свободного произведения с коммутирующими подгруппами:

Теорема 3. Пусть A и B — произвольные финитно аппроксимируемые группы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Группа $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.

Теорема 4. Пусть A и B — произвольные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Группа

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

аппроксимируема конечными p -группами тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются separable в классе конечных p -групп.

Как и в параграфе 2, доказательство этих теорем начнем с описания строения группы

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

с помощью конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой.

Пусть H_1 и K_1 — изоморфные копии групп H и K соответственно и $\sigma : H \rightarrow H_1$ и $\tau : K \rightarrow K_1$ — фиксированные изоморфизмы. Пусть, далее, $M = A \times K_1$ — прямое произведение групп A и K_1 и $U = H \times K_1$ — подгруппа группы M , порожденная подгруппами H и K_1 . Аналогично, пусть $N = H_1 \times B$ — прямое произведение групп H_1 и B и $V = H_1 \times K$ — подгруппа группы N , порожденная подгруппами H_1 и K . Наконец, пусть φ — изоморфизм группы U на группу V , продолжающий отображения σ и τ^{-1} , и пусть

$$P = (M * N; U = V, \varphi)$$

— свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ .

Имеет место следующее утверждение, аналогичное предложению 2.1 из параграфа 2:

Предложение 3.1. *Группы G и P изоморфны. Более того, существует изоморфизм группы G на группу P , продолжающий тождественные отображения систем порождающих групп A и B (и потому естественные отображения групп A и B в группу G являются вложениями).*

Доказательство. Так как для любых элементов $h \in H$ и $k \in K$ в группе P выполнены равенства $h = h\varphi = h\sigma$ и $k = k(\varphi^{-1}) = k\tau$, имеем для произвольных $a \in A$ и $b \in B$

$$[a, k] = [a, k\tau] = 1 \quad \text{и} \quad [h, b] = [h\sigma, b] = 1.$$

Следовательно, тождественные отображения систем порождающих групп A и B переводят все определяющие соотношения группы G в равенства, справедливые в группе P , и потому определяют гомоморфизм α группы G в группу P .

С другой стороны, очевидно, что тождественное отображение системы порождающих группы A в группу G определяет гомоморфизм μ группы A в группу G . Аналогично, пусть ν — гомоморфизм в группу G , продолжающий тождественное отображение системы порождающих группы B . Так как для любых $a \in A$ и $k_1 \in K_1$ элементы $a\mu$ и $(k_1\tau^{-1})\nu$ группы G перестановочны, отображения μ и $\tau^{-1}\nu$ определяют гомоморфизм θ группы M в группу G . Аналогично, существует гомоморфизм η группы N в группу G , продолжающий гомоморфизмы $\sigma^{-1}\mu$ и ν . Если теперь u — произвольный элемент подгруппы U , $u = xy$, где $x \in H$, $y \in K_1$, то

$$(u\varphi)\eta = (x\sigma) \cdot y\tau^{-1})\eta = x\mu \cdot y(\tau^{-1}\nu) = u\theta.$$

Следовательно, отображения θ и η согласованы с изоморфизмом φ , и потому существует продолжающий их гомоморфизм β группы P в группу G . Так как действие отображения β на подгруппах A и B совпадает с действием отображений μ и ν соответственно, произведение $\alpha\beta$ является тождественным автоморфизмом группы G . Поэтому отображение α инъективно, а ввиду того, что группа P , как легко видеть, порождается подгруппами A и B , оно является и сюръективным.

Необходимость условий в теоремах 3 и 4 теперь почти очевидна. Пусть, например, a — такой элемент группы A , не принадлежащий подгруппе H , что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы A на конечную группу (или на конечную p -группу) содержится в образе подгруппы H . Если еще b — произвольный элемент группы B , не входящий в подгруппу K , то элемент $w = [a, b]$ группы G отличен от 1, так как его запись $w = a^{-1}b^{-1}ab$ является несократимой в разложении группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$ и имеет длину 4.

Очевидно, с другой стороны, что образ этого элемента при любом гомоморфизме группы G на конечную группу (или, соответственно, на конечную p -группу) равен 1.

Достаточность условий теорем 3 и 4 вытекает из следующих двух вспомогательных утверждений, в формулировках и доказательствах которых предполагаются введенные выше обозначения, связанные с разложением группы G в свободное произведение групп M и N с объединенными подгруппами U и V .

Лемма 3.1. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы, а их подгруппы H и K финитно отделимы. Тогда*

- (1) *для любого неединичного элемента g группы M найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M , не содержащая элемента g и (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N , и для любого неединичного элемента g группы N найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , не содержащая элемента g и (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M ;*
- (2) *для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе U , найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M , (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N и такая, что $g \notin UR$, и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе V , найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M и такая, что $g \notin VS$.*

Лемма 3.2. *Пусть группы A и B аппроксимируемы конечными p -группами, а их подгруппы H и K отделимы в классе конечных p -групп. Тогда*

- (1) *для любого неединичного элемента g группы M найдется нор-*

- мальная подгруппа R группы M , не содержащая элемента g и являющаяся (U, V, φ, p) -совместимой с некоторой нормальной подгруппой S группы N , и для любого неединичного элемента g группы N найдется нормальная подгруппа S группы N , не содержащая элемента g и являющаяся (U, V, φ, p) -совместимой с некоторой нормальной подгруппой R группы M ;
- (2) для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе U , найдется нормальная подгруппа R группы M (U, V, φ, p) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S группы N и такая, что $g \notin UR$, и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе V , найдется нормальная подгруппа S группы N , (U, V, φ, p) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R группы M и такая, что $g \notin VS$.

Доказательство этих лемм начнем со следующего общего построения. Пусть X — произвольная нормальная подгруппа группы A , Y — произвольная нормальная подгруппа группы B . Полагаем

$$C = X \cap H, \quad D = Y \cap K \quad \text{и} \quad C_1 = C\sigma, \quad D_1 = D\tau.$$

Тогда $R = XD_1$ — такая нормальная подгруппа группы M , что

$$M/R = A/X \times K_1/D_1, \quad R \cap A = X \quad \text{и} \quad R \cap U = CD_1,$$

а $S = C_1Y$ — такая нормальная подгруппа группы N , что

$$N/S = H_1/C_1 \times B/Y, \quad S \cap B = Y \quad \text{и} \quad S \cap V = C_1D.$$

В частности, подгруппы R и S являются (U, V, φ) -совместимыми.

Докажем теперь лемму 3.1. Рассмотрим произвольный элемент g группы M (рассуждения, связанные с элементами группы N , совершенно аналогичны). Имеем $g = at$, где $a \in A$ и $t \in K_1$.

Если $g \neq 1$, то $a \neq 1$ или $t \neq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $a \neq 1$. Так как группа A финитно аппроксимируема, то

найдется нормальная подгруппа X конечного индекса группы A , не содержащая элемента a . Очевидно, что при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B построенные выше (U, V, φ) -совместимые подгруппы R и S будут иметь конечный индекс в группах M и N соответственно и $a \notin R$. Если $t \neq 1$, то пользуясь финитной аппроксимируемостью группы B , найдем в ней нормальную подгруппу Y конечного индекса, не содержащую элемента $t\tau^{-1}$. Подгруппы R и S , построенные по этой подгруппе Y и произвольной нормальной подгруппе X конечного индекса группы A , снова обладают требуемыми свойствами.

Предположим теперь, что элемент g не входит в подгруппу U . Это означает, что элемент a не входит в подгруппу H , и так как эта подгруппа финитно отделима, найдется такая нормальная подгруппа X конечного индекса группы A , что $a \notin HX$. Если подгруппы R и S построены по этой подгруппе X и произвольной нормальной подгруппе Y конечного индекса группы B , то $g \notin UR$, поскольку $UR = HX \cdot K_1$.

Таким образом, лемма 3.1 доказана.

Для доказательства леммы 3.2 заметим сначала, что если в рассуждениях, используемых для доказательства леммы 3.1, подгруппы X и Y выбирать имеющими конечный p -индекс в группах A и B (а это можно сделать ввиду предположений из условия леммы 3.2), то и соответствующие подгруппы R и S будут иметь конечный p -индекс в группах M и N . Следовательно, можно считать доказанным, что для любого элемента $g \in M$, отличного от единицы или не принадлежащего подгруппе U , существуют такие подгруппы X и Y конечного p -индекса групп A и B , что если

$$\overline{R}_0 = X \cdot (Y \cap K)\tau \quad \text{и} \quad \overline{S}_0 = (X \cap H)\sigma \cdot Y$$

— соответствующие (U, V, φ) -совместимые нормальные подгруппы конечного p -индекса групп M и N , то $g \notin \overline{R}_0$ или $g \notin U\overline{R}_0$ соответственно.

Для построения (U, V, φ, p) -совместимых подгрупп с аналогичным свойством поступим так же, как в доказательстве леммы 2.3. Так как фактор-группы A/X и B/Y являются конечными p -группами, то существуют последовательности

$$X = X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k = A \quad \text{и} \quad Y = Y_0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_l = B$$

нормальных подгрупп групп A и B , все факторы X_{i+1}/X_i и Y_{j+1}/Y_j которых имеют порядок p . Для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ полагаем

$$\overline{R}_i = X_i \cdot (Y \cap K)\tau \quad \text{и} \quad \overline{S}_i = (X_i \cap H)\sigma \cdot Y$$

Аналогично, для каждого $j = 0, 1, \dots, l$ пусть

$$\overline{R}_{k+j} = A \cdot (Y_j \cap K)\tau \quad \text{и} \quad \overline{S}_{k+j} = H_1 \cdot Y_j.$$

Так как

$$U \cap \overline{R}_i = \begin{cases} (X_i \cap H) \cdot (Y \cap K)\tau, & \text{если } 0 \leq i \leq k \\ H \cdot (Y_{k-i} \cap K)\tau, & \text{если } k < i \leq k+l, \end{cases}$$

все факторы последовательности

$$U \cap \overline{R}_0 \leq U \cap \overline{R}_1 \leq \dots \leq U \cap \overline{R}_{k+l}$$

имеют порядок, равный 1 или p .

Полагая теперь для любого номера $i = 0, 1, \dots, k+l$

$$R_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{R}_j \quad \text{и} \quad S_i = \bigcap_{j=i}^{k+l} \overline{S}_j,$$

получаем две последовательности

$$R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_{k+l} = M \quad \text{и} \quad S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_{k+l} = N$$

нормальных подгрупп конечного p -индекса групп M и N . Так как для любого $i = 0, 1, \dots, k + l$ имеют место очевидные равенства

$$U_1 \cap R_i = U_1 \cap \overline{R}_i \quad \text{и} \quad U_2 \cap S_i = U_2 \cap \overline{S}_i,$$

из предложения 1.11 следует, что подгруппы $R = R_0$ и $S = S_0$ являются (U_1, U_2, φ, p) -совместимыми. Наконец, поскольку $\overline{R}_0 \leq R$, подгруппы R и S являются искомыми, и лемма 3.2 доказана.

Доказательство теорем 3 и 4 закончено. Приведем без подробных комментариев несколько следствий из этих теорем, аналогичных следствиям из теорем 1 и 2, перечисленным в параграфе 2.

Следствие 3.1. Пусть $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K . Тогда

1. Группа G является финитно аппроксимируемой, если выполнено любое из следующих условий:

- (1.1) группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппы H и K конечны;
- (1.2) группы A и B полициклические, а подгруппы H и K произвольные;
- (1.3) группы A и B свободные, а подгруппы H и K конечно порожденные.

2. Если группы A и B аппроксимируемы конечными p -группами, а подгруппы H и K конечны, то группа G является аппроксимируемой конечными p -группами.

3. Если группы A и B свободные, а подгруппы H и K являются циклическими и имеющими p -индекс в своих централизаторах в подгруппах A и B соответственно, то группа G аппроксимируема конечными p -группами.

Следствие 3.2. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p -группами, H и

K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Группа

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

является аппроксимируемой конечными p -группами тогда и только тогда, когда подгруппы H и K групп A и B p' -изолированы.

Следствие 3.3. Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Группа

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

является аппроксимируемой нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p она аппроксимируема конечными p -группами.

В то время, как для обоснования следствий 3.1 и 3.2 достаточно аргументов, приведенных в параграфе 2, для доказательства следствия 3.3 необходимо внести следующие два изменения в доказательство следствия 2.6.

Во-первых, для приведения к противоречию предположения о существовании таких элементов a и b , не принадлежащих подгруппе H , что для некоторых различных простых чисел p и q элементы a^p и b^q входят в H , следует рассмотреть коммутаторы $[a, c]$ и $[b, c]$, где c — элемент группы B , не принадлежащий подгруппе K .

Во-вторых, если элементы $a \in A \setminus H$ и $b \in B \setminus K$ таковы, что $a^p \in H$ и $b^q \in K$, то коммутатор $[a, b]$ отличен от 1 в группе G , а его образ при любом гомоморфизме группы G в нильпотентную группу является одновременно и p -элементом, и q -элементом и потому равен единице.

ГЛАВА II

Финитная отделимость подгрупп свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами

§ 4. Предварительные замечания.

Формулировка результатов

В этой главе рассматривается вопрос о финитной отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами. В самом общем виде соответствующая проблема может быть сформулирована следующим образом:

Пусть A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B . Предположим, что в группах A и B все (или все конечно порожденные, или все циклические) подгруппы являются финитно отделимыми. Верно ли, что в свободном произведении G групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K будут финитно отделимы все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы?

Разумеется, поскольку в каждом случае предполагается, в частности, отделимость единичной подгруппы, очевидным необходимым условием выполнимости любого из этих утверждений является финитная аппроксимируемость группы G , т. е. в силу результатов первой главы — финитная отделимость в группах A и B подгрупп H и K . Но даже при выполнении этого условия, ответ на поставленный вопрос в том случае, когда речь идет об отделимости всех подгрупп, почти всегда отрицательный. А именно, имеет место

Предложение 4.1. *Пусть A и B — произвольные группы, H и K — неединичные собственные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K содержит не финитно отделимую подгруппу. Если, к тому же, индекс хотя бы одной из подгрупп H*

или K в группе A или B соответственно больше двух, то и свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K содержит не финитно отделимую подгруппу.

Для его доказательства воспользуемся следующим хорошо известным и легко проверяемым утверждением:

Свободное произведение двух групп с объединенными подгруппами содержит нециклическую свободную подгруппу, если каждая из объединяемых подгрупп не совпадает с соответствующим свободным множителем и индекс хотя бы одной из них в этом свободном множителе отличен от 2.

Так как каждая нециклическая свободная группа обладает подгруппой, не являющейся финитно отделимой (см. [6]), отсюда следует, что при тех же предположениях свободное произведение двух групп с объединенными подгруппами содержит подгруппу, не являющуюся финитно отделимой.

Пусть теперь $G = (A * B; [H, K] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K . Тогда (см. § 2) группа G является свободным произведением $(M * N; U_1 = U_2, \varphi)$ групп $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$ и $N = (B * U_2; K = K_2, \tau^2)$ с объединенными подгруппами U_1 и U_2 . Если H и K являются неединичными собственными подгруппами групп A и B , то в указанном разложении группы M в свободное произведение с объединенными подгруппами каждый свободный множитель отличен от объединяемой подгруппы и потому, как легко видеть, имеет в группе M бесконечный индекс. В частности, индекс подгруппы U_1 в группе M бесконечен и, аналогично, индекс подгруппы U_2 в группе N бесконечен. Поэтому существование в группе G неотделимой подгруппы следует из предыдущего замечания.

Наконец, пусть $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ — свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K . Напомним, что эта группа является свободным произведением $(M * N; U = V, \varphi)$ групп M и N с объединенными подгруппами U и

V , где $M = A \times K_1$ — прямое произведение группы A и группы K_1 , изоморфной группе K , $N = H_1 \times B$ — прямое произведение группы H_1 , изоморфной группе H , и группы B , подгруппа U порождается в M подгруппами H и K_1 и подгруппа V порождается в N подгруппами H_1 и K (см. § 3). Если H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно и (для определенности) индекс подгруппы H в группе A не равен 2, то $U \neq M$, $V \neq N$ и индекс подгруппы U в группе M больше 2. Таким образом, и второе утверждение предложения 3.1 доказано.

Как уже отмечалось в параграфе 2, в свободных группах все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Поэтому неотделимая подгруппа, указанная в предложении 4.1, не является конечно порожденной. Примеры свободных произведений с коммутирующими или централизованными подгруппами, обладающих неотделимой конечно порожденной подгруппой, возникают из следующего замечания:

Предложение 4.2. *Пусть подгруппа H группы A и u подгруппа K группы B являются нециклическими свободными группами. Тогда свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K содержит конечно порожденную не финитно отделимую подгруппу.*

Действительно, как в свободном произведении групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K , так и в свободном произведении групп A и B с централизованными подгруппами H и K подгруппа, порождаемая подгруппами H и K , является их прямым произведением, а в прямом произведении двух нециклических свободных групп существует конечно порожденная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой (см. [14]).

Ситуация с финитной отделимостью циклических подгрупп оказывается прямо противоположной. А именно, имеют место следующие утверждения:

Теорема 5. Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — неединичные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.

Теорема 6. Пусть A и B — произвольные группы, все циклические подгруппы которых финитно отделимы, H и K — собственные подгруппы групп A и B соответственно. Все циклические подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.

Из теорем 5 и 6 с учетом замечаний, приведенных в параграфе 2, получаем

Следствие. Свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K является группой с финитно отделимыми циклическими подгруппами в следующих случаях:

- (1) в группах A и B все циклические подгруппы финитно отделимы, а подгруппы H и K конечны;
- (2) группы A и B полициклические, а подгруппы H и K произвольные;
- (3) группы A и B свободные, а подгруппы H и K конечно порожденные.

Из предложения 4.1 следует, что даже в том случае, когда группы A и B являются абелевыми с конечным числом порождающих, свободное произведение этих групп с коммутирующими или централизованными подгруппами может содержать неотделимую подгруппу. Тем не менее, имеет место

Теорема 7. Пусть A и B — конечно порожденные абелевы группы, H и K — произвольные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда все конечно порожденные подгруппы свободного произведения $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K финитно отделимы.

Вопрос об отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения конечно порожденных абелевых групп с коммутирующими подгруппами остается открытым.

Если группы A и B являются абелевыми, то абелевыми будут и свободные множители M и N указанного выше разложения

$$(M * N; U = V, \varphi)$$

свободного произведения групп A и B с централизованными подгруппами H и K в свободное произведение с объединенными подгруппами. Поэтому теорема 7 является частным случаем следующего более общего утверждения:

Теорема 8. Пусть M и N — конечно порожденные абелевы группы, U и V — изоморфные подгруппы групп M и N соответственно и $\varphi : U \rightarrow V$ — фиксированный изоморфизм. Все конечно порожденные подгруппы свободного произведения

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

групп M и N с объединенными подгруппами U и V являются финитно отделимыми.

§ 5. Отделимость циклических подгрупп свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами

В этом параграфе будут доказаны теоремы 5 и 6. Как отмечено выше, необходимость условий в теоремах 5 и 6 следует из теорем 1 и 3 ввиду финитной аппроксимируемости произвольной группы, все циклические подгруппы которой финитно отделимы.

Для доказательства достаточности нам необходима некоторая модификация предложения 1.4:

Предложение 5.1. Пусть M и N — произвольные группы, $U \leq M$, $V \leq N$ и $\varphi : U \rightarrow V$ — изоморфизм. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех пар (U, V, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп M и N и пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Тогда

- (1) Если все циклические подгруппы группы G финитно отделимы, то для любой циклической подгруппы X группы M семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является X -фильтрацией и для любой циклической подгруппы Y группы N семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является Y -фильтрацией.
- (2) Если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U -фильтрацией и X -фильтрацией для любой циклической подгруппы X группы M и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией и Y -фильтрацией для любой циклической подгруппы Y группы N , то все циклические подгруппы группы G финитно отделимы.

Доказательство. Если в группе G все циклические подгруппы финитно отделимы, X — произвольная циклическая подгруппа группы M и g — элемент этой группы, не принадлежащий подгруппе X , то для некоторой нормальной подгруппы T конечного индекса группы G имеем $g \notin XT$. Из пункта (3) предложения 1.3 следует, что пересечение $M \cap T$ совпадает с подгруппой R_λ для некоторо-

го $\lambda \in \Lambda$. Так как тогда $g \notin XR_\lambda$, тем самым доказано, что для любой циклической подгруппы X группы M семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является X -фильтрацией. Аналогично доказывается, что для любой циклической подгруппы Y группы N семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является Y -фильтрацией, и утверждение (1) доказано.

Переходя к доказательству утверждения (2), сделаем два предварительных замечания.

Первое состоит в том, что если некоторая подгруппа X группы Y является финитно отделимой, то и любая подгруппа, сопряженная с X , также финитно отделима. В самом деле, если элемент $y \in Y$ не принадлежит подгруппе $u^{-1}Xu$ для некоторого $u \in Y$, то элемент uyu^{-1} не принадлежит подгруппе X , и потому $uyu^{-1} \notin XZ$ для некоторой нормальной подгруппы Z конечного индекса группы Y . Так как тогда $y \notin (u^{-1}Xu)Z$, финитная отделимость подгруппы $u^{-1}Xu$ установлена.

Из этого замечания следует, что при доказательстве финитной отделимости циклической подгруппы W , порождаемой в группе G элементом w , мы можем без потери общности считать, что элемент w циклически несократим.

Второе замечание основано на предложении 1.2, утверждающем, в частности, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечных групп все циклические подгруппы финитно отделимы. Отсюда следует, что для того, чтобы для элемента g группы G , не принадлежащего ее циклической подгруппе W , найти гомоморфизм θ группы G в некоторую конечную группу такой, что $g\theta \notin W\theta$, достаточно указать такой номер $\lambda \in \Lambda$, что $g\rho_\lambda \notin W\rho_\lambda$ (здесь и ниже мы используем обозначения из § 1).

Итак, пусть W — циклическая подгруппа группы G , порожденная циклически несократимым элементом w , и пусть элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе W . Рассмотрим сначала случай, когда длина элемента w равна 1, т. е. элемент w лежит в одном из свободных множителей M или N группы G . Пусть, для определенности,

$w \in M$ и потому $W \leq M$.

Пусть $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ — несократимая запись элемента g . Снова рассмотрим сначала случай, когда длина n элемента g равна 1, т. е. g лежит в одном из свободных множителей группы G .

Если $g \in M$, то поскольку семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является W -фильтрацией, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что подгруппа WR_λ не содержит элемента g . Так как гомоморфизм ρ_λ действует на подгруппе M группы G как естественное отображение M на фактор-группу M/R_λ , это и означает, очевидно, что $g\rho_\lambda \notin W\rho_\lambda$.

Пусть $g \in N$ и $g \notin M$. Тогда элемент g не принадлежит подгруппе V , и так как семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что подгруппа VS_λ не содержит элемента g . Это означает, что элемент $g\rho_\lambda$, принадлежащий свободному множителю N/S_λ группы G_λ , не входит в объединяемую подгруппу VS_λ/S_λ и потому не входит в другой свободный множитель $M/R_\lambda = M\rho_\lambda$ группы G_λ . Так как $W\rho_\lambda \leq M\rho_\lambda$, мы снова имеем $g\rho_\lambda \notin W\rho_\lambda$.

Если $n > 1$, то элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ лежат поочередно в одном из свободных множителей M или N группы G и не принадлежат соответствующей объединяемой подгруппе U или V . Пользуясь тем, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является U -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является V -фильтрацией, как и в доказательстве предложения 1.9, найдем такой $\lambda \in \Lambda$, что если элемент x_i лежит в группе M , то $x_i R_\lambda \notin UR_\lambda/R_\lambda$, и если элемент x_i лежит в группе N , то $x_i S_\lambda \notin VS_\lambda/S_\lambda$. Следовательно, несократимая запись элемента $g\rho_\lambda$ имеет длину $n > 1$, и потому этот элемент не входит в свободный множитель $M/R_\lambda = M\rho_\lambda$ группы G_λ . Таким образом, и в этом случае мы нашли такой $\lambda \in \Lambda$, что $g\rho_\lambda \notin W\rho_\lambda$.

Предположим теперь, что элемент w имеет длину $m > 1$. Пусть $w = y_1 y_2 \cdots y_m$ — несократимая запись элемента w . Заметим, что поскольку элемент w является циклически несократимым, то для любого целого числа $k > 0$ запись

$$y_1 y_2 \cdots y_m \cdot y_1 y_2 \cdots y_m \cdots y_1 y_2 \cdots y_m$$

элемента w^k является несократимой. Аналогично, при $k < 0$ несократимая запись элемента w^k имеет вид

$$y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \cdots y_1^{-1} \cdot y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \cdots y_1^{-1} \cdots \cdots y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \cdots y_1^{-1}.$$

Таким образом, для любого целого числа $k \neq 0$ длина элемента w^k равна $m|k|$.

Опять рассмотрим сначала случай, когда длина n элемента g равна 1. Следуя, как и выше, рассуждениям из доказательства предложения 1.9, с учетом финитной аппроксимируемости группы G , найдем такой номер $\lambda \in \Lambda$, что $g\rho_\lambda \neq 1$ и если элемент y_j лежит в группе M , то $y_j R_\lambda \notin UR_\lambda/R_\lambda$, а если элемент y_j лежит в группе N , то $y_j S_\lambda \notin VS_\lambda/S_\lambda$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Очевидно, что тогда $w\rho_\lambda$ является в группе G_λ циклически несократимым элементом длины m , и из предыдущего замечания следует, что все неединичные элементы порожденной им циклической подгруппы $W\rho_\lambda$ имеют длину, большую, чем 1. Следовательно, $g\rho_\lambda \notin W\rho_\lambda$.

Пусть теперь $n > 1$. Снова повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, найдем такой номер $\lambda_1 \in \Lambda$, что если элементы x_i и y_j лежат в группе M , то $x_i R_{\lambda_1} \notin UR_{\lambda_1}/R_{\lambda_1}$ и $y_j R_{\lambda_1} \notin UR_{\lambda_1}/R_{\lambda_1}$, а если элементы x_i и y_j лежат в группе N , то $x_i S_{\lambda_1} \notin VS_{\lambda_1}/S_{\lambda_1}$ и $y_j S_{\lambda_1} \notin VS_{\lambda_1}/S_{\lambda_1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$). Тогда элемент $g\rho_{\lambda_1}$ группы G_{λ_1} имеет длину n , а $w\rho_{\lambda_1}$ является циклически несократимым элементом длины m . Если $g\rho_{\lambda_1} \in W\rho_{\lambda_1}$, то для некоторого целого числа $k \neq 0$ имеет место равенство $g\rho_{\lambda_1} = (w\rho_{\lambda_1})^k$, и потому (см. замечание выше) $n = m|k|$. Следовательно, если число n не делится на m , то $g\rho_{\lambda_1} \notin W\rho_{\lambda_1}$, и номер λ_1 искомый.

Пусть, наконец, $n = ml$ для некоторого целого числа l . Так как в группе G элемент g не входит в подгруппу W , каждый из элементов gw^l и gw^{-l} этой группы отличен от 1. Поскольку группа G финитно аппроксимируема, существует гомоморфизм ее на конечную группу, при котором образы этих элементов отличны от 1. Как отмечено в предложении 1.3, каждый гомоморфизм группы G на конеч-

ную группу проходит через некоторый гомоморфизм вида ρ_λ . Поэтому существует $\lambda_2 \in \Lambda$ такой, что в группе G_{λ_2} $g\rho_{\lambda_2} \neq (w\rho_{\lambda_2})^l$ и $g\rho_{\lambda_2} \neq (w\rho_{\lambda_2})^{-l}$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ такой, что $R_\lambda = R_{\lambda_1} \cap R_{\lambda_2}$ и $S_\lambda = S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2}$. Покажем, что номер λ искомый. Заметим для этого, что ввиду включений $R_\lambda \leq R_{\lambda_1}$, $S_\lambda \leq S_{\lambda_1}$, $R_\lambda \leq R_{\lambda_2}$ и $S_\lambda \leq S_{\lambda_2}$ каждый из гомоморфизмов ρ_{λ_1} и ρ_{λ_2} проходит через гомоморфизм ρ_λ . Поэтому, если в группе G_λ $g\rho_\lambda \in W\rho_\lambda$ и потому для некоторого целого k в этой группе выполнено равенство $g\rho_\lambda = (w\rho_\lambda)^k$, то в группе G_{λ_1} должно выполняться равенство $g\rho_{\lambda_1} = (w\rho_{\lambda_1})^k$, откуда $n = m|k|$. Следовательно, $k = \pm l$, и в группе G_λ выполнено одно из равенств $g\rho_\lambda = (w\rho_\lambda)^l$ и $g\rho_\lambda = (w\rho_\lambda)^{-l}$. Поэтому и в группе G_{λ_2} должно выполняться одно из равенств $g\rho_{\lambda_2} = (w\rho_{\lambda_2})^l$ и $g\rho_{\lambda_2} = (w\rho_{\lambda_2})^{-l}$, что противоречит выбору λ_2 .

Нам потребуется еще одно простое

Предложение 5.2. *Если все циклические подгруппы некоторой группы Y финитно отделимы, то для любого элемента бесконечного порядка $y \in Y$ и любого целого числа $m > 1$ найдется нормальная подгруппа X конечного индекса группы Y , порядок элемента y по модулю которой делится на m .*

В самом деле, поскольку каждый из элементов $y, y^2, \dots, y^{m-1}$ не принадлежит циклической подгруппе (y^m) , порожденной элементом y^m , то для некоторой нормальной подгруппы X конечного индекса группы Y все эти элементы не входят в подгруппу $(y^m)X$. Пусть $n > 0$ такое целое число, что $y^n \in X$. Если d — наибольший общий делитель чисел m и n , и если целые числа r и s удовлетворяют равенству $d = mr + ns$, то $y^d = y^{mr} \cdot y^{ns} \in (y^m)X$. Поэтому $d = m$, и число n делится на m .

Рассмотрим теперь свободное произведение

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K . В формулировке следующей леммы используются обозначения, связанные с

разложением группы G в свободное произведение групп M и N с объединенными подгруппами U_1 и U_2 , описанным в параграфе 2.

Лемма 5.1. *Пусть в группах A и B финитно отделимы все циклические подгруппы и подгруппы H и K . Тогда для любой циклической подгруппы W группы M и для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе W , найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M , (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N и такая, что $g \notin WR$, и для любой циклической подгруппы W группы N и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе W , найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , (U_1, U_2, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M и такая, что $g \notin WS$.*

Доказательство. Напомним (см. § 2), что группа

$$M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$$

является свободным произведением групп A и U_1 с подгруппами H и H_1 , объединенными в соответствии с изоморфизмом σ^1 , а группа

$$N = (B * U_2; K = K_2, \tau^2)$$

является свободным произведением групп B и U_2 с подгруппами K и K_2 , объединенными в соответствии с изоморфизмом τ^2 .

Построение подгрупп R и S будет происходить по схеме, описанной в доказательстве леммы 2.1, с помощью специального выбора нормальных подгрупп X и Y групп A и B и подгруппы Z группы M_{X, V_1} или группы N_{Y, V_2} , как это уже делалось выше при доказательстве леммы 2.2.

Пусть W — циклическая подгруппа группы M , порожденная элементом w , и пусть элемент $g \in M$ не принадлежит подгруппе W (случай, когда подгруппа W и элемент g лежат в группе N , рассматривается аналогично). Договоримся сразу (снова без потери общности) считать, что элемент w является циклически несократимым относительно указанного разложения группы M .

Заметим, что для построения (U_1, U_2, φ) -совместимых нормальных подгрупп R и S конечного индекса групп M и N соответственно, удовлетворяющих условию $g \notin WR$, достаточно указать такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B , что в группе M_{X, V_1} элемент $g\rho_{X, V_1}$ не принадлежит подгруппе $W\rho_{X, V_1}$. Действительно, поскольку группа M_{X, V_1} является свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, ввиду предложения 1.2 все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Поэтому существует нормальная подгруппа Z конечного индекса группы M_{X, V_1} такая, что подгруппа $(W\rho_{X, V_1})Z$ не содержит элемента $g\rho_{X, V_1}$ и имеют место равенства

$$A/X \cap Z = 1 = U_1/V_1 \cap Z.$$

Очевидно, что тогда для соответствующей подгруппы R (прообраза подгруппы Z относительно отображения ρ_{X, V_1}) будем иметь $g \notin WR$.

Рассмотрим сначала случай, когда длина элемента w равна 1, т. е. элемент w лежит в одном из свободных множителей A или U_1 группы M .

Пусть $w \in A$. Если и элемент g лежит в подгруппе A , то из отделимости циклических подгрупп этой группы следует, что $g \notin WX$ для подходящей нормальной подгруппы X конечного индекса группы A . Пусть Y — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы B и пусть, как в доказательстве леммы 2.1,

$$V_1 = (X \cap H)\sigma^1 \cdot (Y \cap K)\tau^1.$$

Тогда в группе $M_{X, V_1} = (A/X * U_1/V_1; HX/X = H_1V_1/V_1, \sigma_{X, V_1}^1)$ элемент gX не принадлежит подгруппе WX/X . Так как действие гомоморфизма ρ_{X, V_1} на подгруппе A совпадает с действием естественного отображения группы A на фактор-группу A/X , подгруппы X и Y являются искомыми.

Если же элемент g лежит в подгруппе U_1 , но не входит в подгруппу A , то он не входит и в подгруппу H_1 и потому имеет вид

$g = h_1 k_1$, где $h_1 \in H_1$, $k_1 \in K_1$ и $k_1 \neq 1$. Так как группа B финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа Y конечного индекса, не содержащая τ^1 -прообраза элемента k_1 . Тогда $k_1 \notin (Y \cap K)\tau^1$, и потому при любой нормальной подгруппе X конечного индекса группы A элемент g не принадлежит подгруппе $H_1 V_1$. Следовательно, элемент $g\rho_{X,V_1}$ свободного множителя U_1/V_1 группы M_{X,V_1} не входит в объединяемую подгруппу $H_1 V_1/V_1$, а потому не входит и в подгруппу $W\rho_{X,V_1}$, лежащую в другом свободном множителе A/X . Таким образом, подгруппы X и Y являются искомыми.

Пусть, наконец, длина n элемента g больше 1. Тогда, как показано при доказательстве леммы 2.2, можно выбрать нормальную подгруппу X конечного индекса группы A и нормальную подгруппу Y конечного индекса группы B так, что длина элемента $g\rho_{X,V_1}$ группы M_{X,V_1} останется равной n . Эти подгруппы являются искомыми, так как тогда элемент $g\rho_{X,V_1}$ не входит в свободный множитель A/X группы M_{X,V_1} , содержащий подгруппу $W\rho_{X,V_1}$.

Предположим теперь, что элемент w лежит в подгруппе U_1 , так что $w = e_1 f_1$, где $e_1 \in H_1$, $f_1 \in K_1$. Если длина n элемента g больше 1, то требуемые подгруппы X и Y можно построить, как в предыдущем абзаце.

Если элемент g принадлежит подгруппе A и не принадлежит подгруппе U_1 , то g не входит в подгруппу H , и можно выбрать нормальную подгруппу X конечного индекса группы A так, чтобы $g \notin HX$. Тогда при любой подгруппе Y конечного индекса группы B в соответствующей группе M_{X,V_1} элемент $g\rho_{X,V_1}$ свободного множителя A/X не принадлежит объединяемой подгруппе HX/X и потому не принадлежит свободному множителю U_1/V_1 , содержащему подгруппу $W\rho_{X,V_1}$. Таким образом, подгруппы X и Y являются искомыми.

Предположим, что $g \in U_1$; пусть снова $g = h_1 k_1$, где $h_1 \in H_1$ и $k_1 \in K_1$. Если элемент h_1 не принадлежит циклической подгруппе E_1 , порожденной элементом e_1 , то для подходящей нормальной подгруппы X конечного индекса группы A элемент $h_1(\sigma^1)^{-1}$ не бу-

дет принадлежать подгруппе $E_1(\sigma^1)^{-1}X$. Очевидно, что тогда при произвольно выбранной нормальной подгруппе Y группы B элемент gV_1 не войдет в подгруппу WV_1/V_1 группы U_1/V_1 , и подгруппы X и Y являются искомыми. Аналогично рассматривается случай, когда элемент k_1 не принадлежит циклической подгруппе, порожденной элементом f_1 . Остается предположить, что $h_1 = e_1^r$ и $k_1 = f_1^s$ для некоторых целых чисел r и s . Здесь придется отдельно рассмотреть три случая в зависимости от порядков элементов e_1 и f_1 .

Предположим сначала, что элементы e_1 и f_1 имеют конечные порядки m и n соответственно. Ввиду финитной аппроксимируемости групп A и B в них можно найти такие нормальные подгруппы конечного индекса X и Y соответственно, по модулю которых элементы $e_1(\sigma^1)^{-1}$ и $f_1(\tau^1)^{-1}$ имеют те же порядки m и n . Покажем, что тогда $g \notin WV_1$. Действительно, если для некоторого целого числа t имеет место сравнение $g \equiv w^t \pmod{V_1}$, то должны выполняться и сравнения

$$\begin{aligned} (e_1(\sigma^1)^{-1})^r &\equiv (e_1(\sigma^1)^{-1})^t \pmod{X} \quad \text{и} \\ (f_1(\tau^1)^{-1})^s &\equiv (f_1(\tau^1)^{-1})^t \pmod{Y}, \end{aligned}$$

которые равносильны сравнениям $r \equiv t \pmod{m}$ и $s \equiv t \pmod{n}$ соответственно. Но тогда в группе G выполнено равенство

$$g = h_1 k_1 = e_1^r f_1^s = e_1^t f_1^t = w^t,$$

которое противоречит условию $g \notin W$.

Пусть теперь в точности один из элементов e_1 и f_1 имеет конечный порядок; для определенности предположим, что порядок элемента e_1 бесконечен, а $|f_1| = n$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, что порядок элемента $e_1(\sigma^1)^{-1}$ по модулю X делится на n (в соответствии с предложением 5.2), а порядок элемента $f_1(\tau^1)^{-1}$ по модулю Y равен n . Тогда из сравнения $g \equiv w^t \pmod{V_1}$ следует, что $r \equiv s \pmod{n}$,

откуда снова в группе M получаем противоречащее предположению равенство

$$g = h_1 k_1 = e_1^r f_1^s = e_1^r f_1^r = w^r.$$

Предположим, наконец, что порядки элементов e_1 и f_1 бесконечны. Так как $r - s \neq 0$, найдется целое число $n > 0$, не делящее разности $r - s$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, чтобы порядок элемента $e_1(\sigma^1)^{-1}$ по модулю X и порядок элемента $f_1(\tau^1)^{-1}$ по модулю Y делились на n . Тогда из сравнения $g \equiv w^t \pmod{V_1}$ следовало бы сравнение $r \equiv s \pmod{n}$, что противоречит выбору n .

Таким образом, во всех трех случаях установлено существование в группах A и B таких нормальных подгрупп конечного индекса X и Y соответственно, что в группе M_{X,V_1} образ элемента g не принадлежит образу подгруппы W .

Остается рассмотреть случай, когда длина m элемента w больше 1. Снова рассуждая, как в доказательстве леммы 2.2, выберем нормальную подгруппу X конечного индекса группы A и нормальную подгруппу Y конечного индекса группы B так, чтобы элементы $\hat{w} = w\rho_{X,V_1}$ и $\hat{g} = g\rho_{X,V_1}$ имели длину m и n соответственно (и при $n = 1$ элемент $\hat{g}$ отличен от 1). Если для некоторого целого числа k выполнено равенство $\hat{g} = \hat{w}^k$, то ввиду циклической несократимости элемента $\hat{w}$ мы должны иметь $n = m|k|$. Поэтому, если n не делится на m , указанные подгруппы X и Y являются искомыми. Пусть $n = ml$. Так как элемент g не принадлежит подгруппе W , элементы gw^l и gw^{-l} группы M отличны от единицы. В этом случае искомые подгруппы X и Y получаются, если выбирать их так, чтобы при переходе к образам сохранялась длина и этих элементов. Лемма доказана.

Теорема 5 является очевидным следствием леммы 5.1 и предложения 5.1.

Для доказательства теоремы 6 нам необходимо получить еще одно вспомогательное утверждение о свободном произведении $G =$

$(A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K , являющееся аналогом леммы 5.1. В его формулировке используются обозначения, связанные с описанным в параграфе 3 разложением группы G в свободное произведение с объединенными подгруппами.

Лемма 5.2. *Пусть в группах A и B финитно отделимы все циклические подгруппы и подгруппы H и K . Тогда для любой циклической подгруппы W группы M и для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе W , найдется нормальная подгруппа R конечного индекса группы M , (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой S конечного индекса группы N и такая, что $g \notin WR$, и для любой циклической подгруппы W группы N и для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе W , найдется нормальная подгруппа S конечного индекса группы N , (U, V, φ) -совместимая с некоторой нормальной подгруппой R конечного индекса группы M и такая, что $g \notin WS$.*

Доказательство. Напомним, что разложение группы

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

в свободное произведение групп M и N с объединенными подгруппами U и V строится следующим образом.

Полагаем $M = A \times K_1$ и $N = H_1 \times B$, где H_1 и K_1 — изоморфные копии групп H и K соответственно и $\sigma : H \rightarrow H_1$ и $\tau : K \rightarrow K_1$ — фиксированные изоморфизмы. Полагаем также $U = H \times K_1$, $V = H_1 \times K$ и обозначаем через φ — изоморфизм группы U на группу V , продолжающий отображения σ и τ . Тогда группа G является свободным произведением $(M * N; U = V, \varphi)$ групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ .

Напомним, далее, что, полагая для произвольных нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B соответственно

$$R = X \cdot (Y \cap K)\tau \quad \text{и} \quad S = (X \cap H)\sigma \cdot Y,$$

получим (U, V, φ) -совместимые нормальные подгруппы R и S конечного индекса групп M и N соответственно.

Пусть теперь W — циклическая подгруппа группы M , порожденная элементом w , и пусть элемент $g \in M$ не принадлежит подгруппе W (случай, когда подгруппа W и элемент g лежат в группе N , рассматривается аналогично). Пусть $w = ef$ и $g = xy$, где $e, x \in A$ и $f, y \in K_1$.

Если элемент x не принадлежит циклической подгруппе E , порожденной элементом e , то для подходящей нормальной подгруппы X конечного индекса группы A будем иметь $x \notin EX$. Легко видеть, что если тогда подгруппа R определяется как выше по этой подгруппе X и произвольно выбранной нормальной подгруппе Y конечного индекса группы B , то элемент g не принадлежит подгруппе WR . Аналогично, если элемент y не принадлежит циклической подгруппе F , порожденной элементом f , то в группе B элемент $y\tau^{-1}$ не принадлежит циклической подгруппе $F\tau^{-1}$, и потому для некоторой нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элемент $y\tau^{-1}$ не будет принадлежать подгруппе $F\tau^{-1}Y$. Снова легко видеть, что если тогда подгруппа R строится по этой подгруппе Y и произвольно выбранной нормальной подгруппе X конечного индекса группы A , то элемент g не принадлежит подгруппе WR .

Остается рассмотреть случай, когда $x = e^r$ и $y = f^s$ для некоторых целых чисел r и s . Здесь, как и в доказательстве леммы 5.1 придется отдельно рассмотреть три случая в зависимости от порядков элементов e и f .

Предположим сначала, что элементы e и f имеют конечные порядки m и n соответственно. Ввиду финитной аппроксимируемости групп A и B , в них можно найти такие нормальные подгруппы конечного индекса X и Y соответственно, по модулю которых элементы e и $f\tau^{-1}$ имеют те же порядки m и n . Утверждается, что тогда $g \notin WR$, где подгруппа R строится по этим подгруппам X и Y . Действительно, если для некоторого целого числа t имеет место сравнение $g \equiv w^t$

$(\text{mod } R)$, то должны выполняться и сравнения

$$e^r \equiv e^t \pmod{X} \quad \text{и} \quad (f\tau^{-1})^s \equiv (f\tau^{-1})^t \pmod{Y},$$

которые равносильны сравнениям $r \equiv t \pmod{m}$ и $s \equiv t \pmod{n}$ соответственно. Но тогда в группе G выполнено равенство

$$g = xy = e^r f^s = e^t f^t = w^t,$$

которое противоречит условию $g \notin W$.

Пусть теперь в точности один из элементов e и f имеет конечный порядок; для определенности предположим, что порядок элемента e бесконечен, а $|f| = n$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, что порядок элемента e по модулю X делится на n , а порядок элемента $f\tau^{-1}$ по модулю Y равен n . Тогда для соответствующей подгруппы R из сравнения $g \equiv w^t \pmod{R}$ следует, что $r \equiv s \pmod{n}$, откуда снова в группе M получаем противоречащее предположению равенство

$$g = xy = e^r f^s = e^r f^r = w^r.$$

Предположим, наконец, что порядки элементов e и f бесконечны. Так как $r - s \neq 0$, найдется целое число $n > 0$, не делящее разности $r - s$. Выберем нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно так, чтобы порядки элемента e по модулю X и элемента $f\tau^{-1}$ по модулю Y делились на n . Тогда для соответствующей подгруппы R из сравнения $g \equiv w^t \pmod{R}$ следовало бы сравнение $r \equiv s \pmod{n}$, что противоречит выбору n . Лемма доказана.

Теорема 6 является теперь очевидным следствием леммы 5.2 и предложения 5.1.

§ 6. Отделимость конечно порожденных подгрупп свободного произведения с централизованными подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп

Как было отмечено в параграфе 4, для доказательства теоремы 7 достаточно доказать теорему 8, утверждающую финитную отделимость всех конечно порожденных подгрупп свободного произведения с объединенными подгруппами двух конечно порожденных абелевых групп.

Начнем с двух предварительных замечаний.

Предложение 6.1. (Предложение 1 из [7]) *Пусть $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс групп. Пусть G — группа с бесконечным центром, отличным от квазициклической группы. Если для любой неединичной центральной подгруппы A группы G все $\mathcal{K}$ -подгруппы (т. е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathcal{K}$) фактор-группы G/A являются финитно отделимыми, то и все $\mathcal{K}$ -подгруппы группы G финитно отделимы.*

Предложение 6.2. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа и F — конечная нормальная подгруппа группы G . Все (или все конечно порожденные, или все циклические) подгруппы группы G являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда финитно отделимы все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы фактор-группы G/F .*

Доказательство. Предположим сначала, что все (все конечно порожденные или все циклические) подгруппы группы G являются финитно отделимыми. Если K — произвольная подгруппа фактор-группы G/F , то для некоторой подгруппы H группы G имеет место равенство $K = HF/F$. При этом, если подгруппа K порождается конечным множеством элементов $x_1F, x_2F, \dots, x_nF$ или одним элементом xF , то в качестве H можно взять подгруппу, порожденную соответственно элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ или одним элементом x .

Таким образом, если подгруппа K является конечно порожденной или циклической, то и подгруппу H можно выбрать конечно порожденной или циклической соответственно.

Пусть элемент gF фактор-группы G/F не входит в подгруппу K . Тогда элемент g группы G не входит в подгруппу HF , и потому все элементы вида gf , где $f \in F$, не входят в подгруппу H . Так как семейство таких элементов конечно, то из наших предположений и выбора подгруппы H следует, что найдется нормальная подгруппа N конечного индекса группы G такая, что $gf \notin HN$ для любого $f \in F$. Это и означает, очевидно, что элемент gF группы G/F не входит в подгруппу $HN F/F = K\bar{N}$, где $\bar{N} = NF/F$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G/F .

Обратно, пусть в фактор-группе G/F все (все конечно порожденные или все циклические) подгруппы финитно отделимы. Так как группа G финитно аппроксимируема, а ее подгруппа F конечна, найдется нормальная подгруппа M конечного индекса группы G такая, что $M \cap F = 1$. Группа M вложима в фактор-группу G/F , и потому все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) ее подгруппы финитно отделимы. Следовательно, группа G является конечным расширением группы, все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы которой финитно отделимы. Хорошо известно (и легко видеть), что тогда и в группе G все подгруппы соответствующего вида являются финитно отделимыми.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 8. Пусть M и N — конечно порожденные абелевы группы, U и V — изоморфные подгруппы групп M и N соответственно и $\varphi : U \rightarrow V$ — фиксированный изоморфизм. Пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$ — свободное произведение групп M и N с подгруппами U и V , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ .

Заметим, что центр группы G совпадает с подгруппой $U(= V)$, а фактор-группа G/U является (обычным) свободным произведени-

ем групп A/U и B/V . Из теоремы Н. С. Романовского [11], утверждающей, что свободное произведение групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами является группой с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами, следует поэтому, что в фактор-группе G/U все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Так как, к тому же, группа G является финитно аппроксимируемой (см. напр. [16], теорема 8), из предложения 6.2 следует, что если подгруппы U и V являются конечными, то все конечно порожденные подгруппы группы G финитно отделимы.

Предыдущее замечание говорит о том, что мы располагаем основанием индукции по рангу объединяемой подгруппы U . Здесь имеется в виду обычное определение ранга абелевой группы, как числа элементов в максимальной линейно независимой системе элементов этой группы (и потому ранг конечной абелевой группы равен 0).

Предположим теперь, что подгруппа U является бесконечной и что в любом свободном произведении двух конечно порожденных абелевых групп с объединенной подгруппой, ранг которой меньше ранга группы U , все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Покажем, что тогда и в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Для этого заметим, прежде всего, что без потери общности можно предполагать, что подгруппы U и V не имеют кручения. Действительно, если T — периодическая часть подгруппы U , то ранги групп U и U/T совпадают. Кроме того, фактор-группа G/T группы G по ее конечной (центральной) подгруппе T изоморфна свободному произведению групп M/T и $N/(T\varphi)$ с объединенными подгруппами U/T и $V/(T\varphi)$, не содержащими элементов конечного порядка, а в силу предложения 6.2 все конечно порожденные подгруппы группы G финитно отделимы тогда и только тогда, когда все конечно порожденные подгруппы группы G/T финитно отделимы.

Итак, пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$, где подгруппы U и V являются свободными абелевыми группами конечного ранга. Очевидно, что тогда для любой неединичной подгруппы W группы U

ранг фактор-группы U/W меньше ранга группы U . Поэтому из индуктивного предположения следует, что в группе G/W , являющейся свободным произведением групп M/W и $N/(W\varphi)$ с объединенными подгруппами U/W и $V/(W\varphi)$, все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Таким образом, G является группой, центр которой (совпадающий с подгруппой U) бесконечен и отличен от квазициклической группы. В фактор-группах группы G по произвольным неединичным центральным подгруппам все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Из предложения 6.1 следует, что тогда и в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, и индуктивный шаг завершен. Тем самым, теорема 8 доказана.

ГЛАВА III

Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободных произведений с коммутирующими и централизованными подгруппами

§ 7. Формулировка результатов. Контрпример

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых ее несопряженных элементов a и b существует гомоморфизм группы G на конечную группу X , переводящий элементы a и b в элементы, не сопряженные в группе X . В этой главе будет получено одно достаточное условие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с коммутирующими или централизованными подгруппами. Но сначала приведем простой результат противоположного характера.

Теорема 9. *Пусть подгруппа H группы A содержит элементы, сопряженные в группе A , но не сопряженные в H , и пусть в группе B существует элемент, не сопряженный ни с каким элементом из подгруппы K , но образ которого в любом конечном гомоморфном образе группы B сопряжен с образом некоторого элемента подгруппы K . Тогда свободное произведение $G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$ групп A и B с централизованными подгруппами H и K не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Доказательство. Пусть h_1 и h_2 — элементы из подгруппы H , не сопряженные в этой подгруппе, и пусть для некоторого элемента $a \in A$ имеет место равенство $h_1 = a^{-1}h_2a$. Обозначим еще через b элемент группы B , не сопряженный ни с каким элементом из подгруппы K , образ которого в любом конечном гомоморфном образе группы B сопряжен с образом некоторого элемента подгруппы K . Полагаем $f = h_1b$, $g = h_2b$ и покажем сначала, что элементы f и g не сопряжены в группе G .

Напомним для этого, что в силу предложения 3.1 группа G является свободным произведением своих подгрупп M и N с объединенной подгруппой U , где M обозначает подгруппу, порождаемую в G подгруппами A и K и являющуюся их прямым произведением, N обозначает подгруппу, порождаемую в G подгруппами B и H и являющуюся их прямым произведением, и $U = H \times K$.

Таким образом, оба элемента f и g лежат в свободном множителе $N = H \times B$ группы G , и так как элемент b в группе B не сопряжен ни с каким элементом из подгруппы K , элементы f и g в группе N не сопряжены ни с каким элементом из объединяемой подгруппы U . Кроме того, поскольку элементы h_1 и h_2 не сопряжены в группе H , элементы f и g не являются сопряженными в группе N . Поэтому в силу теоремы Солитэра (см. предложение 8.1 ниже) эти элементы действительно не являются сопряженными в группе G .

Пусть теперь $\bar{G}$ — произвольный конечный гомоморфный образ группы G ; через $\bar{x}$ и $\bar{X}$ будем обозначать соответствующие образы элементов $x \in G$ и подгруппы $X \leq G$. Покажем, что в группе $\bar{G}$ элементы $\bar{f}$ и $\bar{g}$ сопряжены.

По предположению существует такой элемент $c \in B$, что элемент $\bar{c}^{-1}\bar{b}\bar{c}$ принадлежит подгруппе $\bar{K}$. Поскольку подгруппы $\bar{H}$ и $\bar{B}$ и подгруппы $\bar{A}$ и $\bar{K}$ поэлементно перестановочны, имеем

$$\begin{aligned} (\bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1})^{-1}\bar{g}(\bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1}) &= \bar{c}\bar{a}^{-1}\bar{c}^{-1}\bar{h}_2\bar{b}\bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1} = \bar{c}\bar{a}^{-1}\bar{h}_2\bar{c}^{-1}\bar{b}\bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1} \\ &= \bar{c}\bar{a}^{-1}\bar{h}_2\bar{a}\bar{c}^{-1}\bar{b}\bar{c}\bar{c}^{-1} = \bar{c}\bar{h}_1\bar{c}^{-1}\bar{b} = \bar{h}_1\bar{b} = \bar{f}. \end{aligned}$$

Таким образом, группа G не является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, и теорема доказана.

Конкретные примеры двух групп, удовлетворяющих условиям теоремы 9, могут быть указаны следующим образом.

Пусть A обозначает группу, заданную в системе двух порождающих a и h одним определяющим соотношением $a^{-1}ha = h^{-1}$, и пусть H — циклическая подгруппа этой группы, порожденная элементом h . Очевидно, что элементы h и h^{-1} , сопряженные в группе

A , не сопряжены в H .

Как отмечено в работе А. И. Мальцева [6], финитная аппроксимируемость относительно некоторого свойства конечно определенной группы с разрешимой проблемой равенства означает, в частности, алгоритмическую распознаваемость этого свойства. В работе [22] построен пример конечно порожденной нильпотентной группы B , для некоторой подгруппы K которой проблема распознавания, сопряжены ли элемент группы B с каким-либо элементом из подгруппы K , алгоритмически неразрешима. Отсюда и следует существование элемента $b \in B$, не сопряженного ни с каким элементом из подгруппы K , образ которого в любом конечном гомоморфном образе группы B сопряжен с образом некоторого элемента подгруппы K .

Свободное произведение G этих групп A и B с централизованными подгруппами H и K в силу теоремы 9 не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. С другой стороны, обе группы A и B являются полициклическими, и потому они финитно аппроксимируемы относительно сопряженности. Кроме того, ввиду следствия 3.1 группа G является финитно аппроксимируемой. Таким образом, построен пример свободного произведения с централизованными подгруппами двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп, являющегося группой финитно аппроксимируемой, но не финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Отметим, что аналогичный пример свободного произведения с объединенными подгруппами приведен в работе [1]. Отметим также, что вопрос о существовании соответствующих примеров свободного произведения с коммутирующими подгруппами остается открытым.

Основными результатами, полученными в этой главе, являются следующие утверждения:

Теорема 10. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B*

подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Теорема 11. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности и пусть H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Если в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми, то свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Поскольку все полициклические группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности (см. [9]) и их подгруппы финитно отделимы (см. [6]), имеем очевидное

Следствие. *Пусть A и B — произвольные полициклические группы, H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда свободное произведение групп A и B с коммутирующими или централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Необходимые для доказательства теорем 10 и 11 результаты о сопряженности элементов свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами приведены в следующем параграфе. Здесь сформулирован общий критерий сопряженности (теорема Солитэра) и получен вид, приобретаемый этим критерием в той специфической ситуации, которая определяется условиями теорем 10 и 11. В параграфе 9 собраны некоторые предварительные результаты об условиях сопряженности элементов свободного произведения с коммутирующими подгруппами; содержание этого параграфа является фактически первой частью доказательства теоремы 10, завершение доказательства этой теоремы — в параграфе 10. Более простое доказательство теоремы 11 приведено в параграфе 11.

§ 8. Сопряженность элементов свободного произведения групп с объединенными подгруппами

В этом параграфе будут приведены необходимые нам свойства свободного произведения групп с объединенными подгруппами, связанные с отношением сопряженности. Начнем с общей формулировки критерия сопряженности элементов свободного произведения $G = (M * N; U = V, \varphi)$ групп M и N с объединенными подгруппами U и V , известного как теорема Солитера (см. [4, теорема 4.6]):

Предложение 8.1. *Произвольный элемент группы*

$$G = (M * N; U = V, \varphi)$$

сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Если длины двух циклически несократимых элементов группы G различны, то эти элементы не являются сопряженными. Пусть f и g — циклически несократимые элементы группы G равной длины. Тогда

- (1) *Если элемент f принадлежит подгруппе M и не сопряжен в этой подгруппе ни с каким элементом из подгруппы U , то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент g также принадлежит подгруппе M и элементы f и g сопряжены в M . Аналогично, если элемент f принадлежит подгруппе N и не сопряжен в этой подгруппе ни с каким элементом из подгруппы V , то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент g также принадлежит подгруппе N и элементы f и g сопряжены в N .*
- (2) *Если элемент f принадлежит подгруппе U , то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда существует такая последовательность элементов*

$$f = u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1} = g,$$

что для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ $u_i \in U$ и элементы u_i и u_{i+1} сопряжены в одной из подгрупп M или N .

- (3) Если длина элемента f больше 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент f сопряжен с некоторой циклической перестановкой g' элемента g при помощи элемента из подгруппы U .

При этом, циклическими перестановками элемента g с несократимой записью $g = x_1 x_2 \cdots x_n$ называются элементы вида

$$x_i x_{i+1} \cdots x_n x_1 \cdots x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В следующем частном случае пункт (2) сформулированного критерия становится излишним:

Предложение 8.2. Предположим, что для любого элемента g группы M и произвольного элемента $u \in U$ включение $g^{-1}ug \in U$ имеет место лишь тогда, когда элементы g и u перестановочны, и, аналогично, для любого элемента g группы N и произвольного элемента $v \in V$ включение $g^{-1}vg \in V$ имеет место лишь тогда, когда элементы g и v перестановочны.

Тогда если f и g — циклически несократимые элементы группы G и если элемент f принадлежит одной из подгрупп M или N , то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент g лежит в той же подгруппе M или N , что и элемент f , и в этой подгруппе элементы f и g сопряжены.

Действительно, если элемент f принадлежит, скажем, подгруппе M и не сопряжен в M ни с каким элементом из подгруппы U , то требуемое утверждение содержится в предложении 8.1. В противном случае можно без потери общности считать, что $f \in U$, и если элемент f сопряжен в группе G с элементом g , то по теореме Солитэра в этой группе существует последовательность элементов

$$f = u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1} = g,$$

такая, что для любого $i = 0, 1, \dots, n$ имеет место включение $u_i \in U$ и для некоторого элемента x_i , принадлежащего одной из подгрупп M или N , выполнено равенство $x_i^{-1}u_ix_i = u_{i+1}$.

Так как тогда для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место включение $x_i^{-1}u_ix_i \in U = V$, из нашего предположения следует, что для всех таких номеров i имеет место равенство $x_i^{-1}u_ix_i = u_i$. Следовательно, $u_0 = u_n$, и потому $g = x_n^{-1}fx_n$. Это означает, очевидно, что элементы f и g принадлежат той из подгрупп M или N , в которой лежит x_n , и сопряжены в этой подгруппе.

Условие предложения 8.2 выполняется, очевидно, в том случае, когда подгруппы U и V принадлежат центру соответствующей группы M или N . Так как тогда подгруппа $U = V$ совпадает с центром группы G (см.[4, с. 221]), получаем

Предложение 8.3. Пусть U и V — центральные подгруппы групп M и N соответственно, и пусть f и g — циклически несократимые элементы равной длины группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$. Тогда

- (1) если длина элемента f равна 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же подгруппе M или N и сопряжены в этой подгруппе;
- (2) если длина элемента f больше 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент f совпадает с некоторой циклической перестановкой g' элемента g .

Нам потребуется еще одно свойство свободного произведения двух групп с объединенными центральными подгруппами:

Предложение 8.4. Пусть подгруппы U и V лежат в центре групп M и N соответственно. Тогда в группе $G = (M * N; U = V, \varphi)$ для любого ее элемента g , не принадлежащего подгруппе M , имеет место равенство $g^{-1}Mg \cap M = U$.

В самом деле, поскольку подгруппа U лежит в центре группы G , включение $U \leq g^{-1}Mg \cap M$ очевидно. Для доказательства противоположного включения заметим сначала, что без потери общности можно, очевидно, считать, что первый слог x_1 несократимой записи $x_1x_2 \cdots x_n$ элемента g принадлежит подгруппе N (и не принадлежит подгруппе V и при $n = 1$). Если поэтому для некоторого элемента $a \in M$ имеет место включение $g^{-1}ag \in M$, то поскольку при $a \notin U$ запись

$$x_n^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1} a x_1 x_2 \cdots x_n$$

элемента $g^{-1}ag$ является несократимой с числом сомножителей ≥ 3 , элемент a должен принадлежать подгруппе U , т. е. — лежать в центре группы G . Следовательно, $g^{-1}ag = a \in U$.

Возвращаясь к предложению 8.1, опишем более подробно ситуацию, возникающую в пункте (3) этого предложения.

Предложение 8.5. Пусть $f = x_1x_2 \cdots x_r$ и $g = y_1y_2 \cdots y_r$ — несократимые записи элементов f и g группы $G = (M * N; U = V, \varphi)$, причем $r > 1$. Элементы f и g сопряжены в группе G при помощи некоторого элемента из подгруппы U тогда и только тогда, когда в подгруппе U найдутся элементы $u_0, u_1, u_2, \dots, u_r = u_0$ такие, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено равенство

$$x_i = u_{i-1}^{-1} y_i u_i \quad (1)$$

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Доказательство необходимости проведем индукцией по r . В действительности, нам будет удобно доказывать несколько более сильное утверждение:

Если для некоторого элемента $u \in U$ имеет место равенство $f = u^{-1}gu$, то существует такая последовательность $u_0, u_1, u_2, \dots, u_r = u_0$ элементов подгруппы U , удовлетворяющих системе равенств (1), у которой $u_0 = u$.

Для доказательства перепишем равенство $f = u^{-1}gu$ в виде

$$x_r^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1} u^{-1} y_1 y_2 \cdots y_r u = 1. \quad (2)$$

Так как выражение в левой части этого равенства не может быть несократимой записью, элементы x_1 и y_1 должны принадлежать одной и той же подгруппе M или N , и элемент $x_1^{-1}u^{-1}y_1$ должен принадлежать подгруппе U . Обозначив этот элемент через u_1^{-1} , имеем $x_1 = u^{-1}y_1u_1$. Если $r = 2$, равенство (2) принимает вид $x_2^{-1}u_1^{-1}y_2u = 1$, откуда $x_2 = u_1^{-1}y_2u$, и полагая $u_0 = u_2 = u$, получаем искомую последовательность. При $r > 2$ перепишем равенство $f = u^{-1}gu$ в виде $u^{-1}y_1u_1x_2 \cdots x_r = u^{-1}y_1y_2 \cdots y_ru$, откуда получаем $u_1x_2 \cdots x_r = y_2 \cdots y_ru$. Полагая теперь $f' = u^{-1}u_1x_2 \cdots x_r$ и $g' = y_2 \cdots y_r$, имеем, очевидно, $f' = u^{-1}g'u$. Так как длина элементов f' и g' равна $r - 1$, из индуктивного предположения следует существование такой последовательности $u'_1, u'_2, \dots, u'_r = u'_1$ элементов подгруппы U , что $u^{-1}u_1x_2 = (u'_1)^{-1}y_2u'_2$ и для любого $i = 2, 3, \dots, r$

$$x_i = (u'_{i-1})^{-1}y_iu'_i.$$

Кроме того, $u'_1 = u$. Так как тогда $x_2 = u_1^{-1}y_2u'_2$, полагая для $i = 2, 3, \dots, r$ $u_i = u'_i$, получаем искомую последовательность. Предложение 8.5 доказано.

В заключение этого параграфа приведем необходимый нам результат о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения с объединенными подгруппами, полученный в работе [17].

Предложение 8.6. *Пусть $G = (M * N; U = V, \varphi)$. Если группы M и N являются финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности, а подгруппы U и V конечны, то группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

В частности, если группы M и N являются конечными, то группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

§ 9. Сопряженность элементов свободного произведения групп с коммутирующими центральными подгруппами

В этом параграфе будут изучены условия сопряженности элементов группы

$$G = (A * B; [H, K] = 1),$$

являющейся свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K . Всюду ниже предполагается, что подгруппы H и K принадлежат центрам групп A и B соответственно.

Решающую роль здесь играет разложение группы G в свободное произведение $G = (M * N; U_1 = U_2, \varphi)$ групп M и N с объединенными подгруппами, описанное в параграфе 2, и аналогичные разложения групп M и N (все обозначения, связанные с этими разложениями, будут использоваться здесь без дополнительных напоминаний, а несократимая запись элементов этих групп определяется в указанных разложениях).

Начнем с установления ряда свойств групп M и N . Так как объединяемые подгруппы в указанных разложениях этих групп в свободное произведение с объединенными подгруппами принадлежат центрам свободных множителей, непосредственно из предложения 8.4 вытекает

Предложение 9.1. *Для любого элемента g группы M , не принадлежащего подгруппе U_1 , имеет место равенство*

$$g^{-1}U_1g \cap U_1 = H.$$

Аналогично, для любого элемента g группы N , не принадлежащего подгруппе U_2 , имеет место равенство

$$g^{-1}U_2g \cap U_2 = K.$$

В частности, для любого элемента g из группы M и произвольного элемента u из подгруппы U_1 включение $g^{-1}ug \in U_1$ имеет

место тогда и только тогда, когда элементы g и u перестановочны. Аналогично, для любого элемента g из группы N и произвольного элемента u из подгруппы U_2 включение $g^{-1}ug \in U_2$ имеет место тогда и только тогда, когда элементы g и u перестановочны.

Отсюда и из предложений 8.1 и 8.2 получаем

Предложение 9.2. *Произвольный элемент группы*

$$G = (A * B; [H, K] = 1)$$

сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Если длины двух циклически несократимых элементов группы G различны, то эти элементы не являются сопряженными. Пусть f и g — циклически несократимые элементы группы G равной длины. Тогда

- (1) *если длина элемента f равна 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда они принадлежат одной и той же подгруппе M или N и сопряжены в этой подгруппе;*
- (2) *Если длина элемента f больше 1, то элементы f и g сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда элемент f сопряжен с некоторой циклической перестановкой g' элемента g при помощи элемента из подгруппы U .*

Следующие два утверждения направлены на более детальное описание ситуации из пункта (2) этого предложения.

Предложение 9.3. *Пусть f и g — элементы группы M , не принадлежащие подгруппе U_1 и определяющие один и тот же смежный класс по двойному модулю (U_1, U_1) . Пусть $f = ugv$ и $f = u'gv'$ для некоторых элементов u, u', v и v' из подгруппы U_1 и пусть*

$$u = xy, \quad u' = x'y', \quad v = st \quad \text{и} \quad v' = s't',$$

где $x, x', s, s' \in H_1$ и $y, y', t, t' \in K_1$. Тогда

$$xs = x's', \quad y = y' \text{ и } t = t'.$$

Аналогично, пусть f и g — элементы группы N , не принадлежащие подгруппе U_2 и определяющие один и тот же смежный класс по двойному модулю (U_2, U_2) . Пусть $f = ugv$ и $f = u'gv'$ для некоторых элементов u, u', v и v' из подгруппы U_2 и

$$u = xy, \quad u' = x'y', \quad v = st \text{ и } v' = s't',$$

где $x, x', s, s' \in H_2$ и $y, y', t, t' \in K_2$. Тогда

$$yt = y't', \quad x = x' \text{ и } s = s'.$$

Доказательство. Пусть элементы f и g принадлежат подгруппе M . Переписывая равенство $ugv = u'gv'$ в виде $g^{-1}(u')^{-1}ug = v'v^{-1}$, имеем в силу предложения 9.2

$$(u')^{-1}u = v'v^{-1} \quad \text{и} \quad (u')^{-1}u \in H_1.$$

Так как $U_1 = H_1 \times K_1$ и

$$(u')^{-1}u = (x')^{-1}x \cdot (y')^{-1}y \quad \text{и} \quad v'v^{-1} = s's^{-1} \cdot t't^{-1},$$

отсюда и следует, что $(x')^{-1}x = s's^{-1}$, $(y')^{-1}y = 1$ и $t't^{-1} = 1$.

Случай, когда элементы f и g принадлежат подгруппе N , рассматривается аналогично.

Предложение 9.4. Пусть $f = f_1 f_2 \cdots f_r$ и $g = g_1 g_2 \cdots g_r$ ($r > 1$) — несократимые записи элементов f и g группы

$$G = (A * B; [H, K] = 1),$$

и пусть для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ имеет место равенство $f_i = u_i g_i v_i$ для некоторых элементов u_i и v_i из подгруппы U_1 . Тогда существует не более одной последовательности $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$

элементов подгруппы U_1 таких, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено равенство

$$f_i = w_{i-1}^{-1} g_i w_i. \quad (1)$$

Более того, если элементы f_1 и g_1 принадлежат подгруппе M и

$$u_i = x_i y_i \quad \text{и} \quad v_i = s_i t_i$$

где $x_i, s_i \in H_1$ и $y_i, t_i \in K_1$ ($i = 1, 2, \dots, r$), то такая последовательность существует тогда и только тогда, когда для каждого номера i , $1 < i < r$,

$$\begin{aligned} x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i &= 1, \text{ если } i \text{ нечетное, и} \\ y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i &= 1, \text{ если } i \text{ четное.} \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично, если элементы f_1 и g_1 принадлежат подгруппе N и

$$u_i = x_i y_i \quad \text{и} \quad v_i = s_i t_i$$

где $x_i, s_i \in H_2$ и $y_i, t_i \in K_2$ ($i = 1, 2, \dots, r$), то такая последовательность существует тогда и только тогда, когда для каждого номера i , $1 < i < r$,

$$\begin{aligned} x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i &= 1, \text{ если } i \text{ четное, и} \\ y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i &= 1, \text{ если } i \text{ нечетное.} \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Пусть элементы f_1 и g_1 принадлежат подгруппе M . Предположим сначала, что последовательность $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$ элементов подгруппы U_1 , удовлетворяющих равенствам (1), существует, и запишем ее элементы в виде

$$w_i = c_i d_i,$$

где $c_i \in H_1$ и $d_i \in K_1$.

Так как тогда для любого $i = 1, 2, \dots, r$ имеет место равенство $w_{i-1}^{-1} g_i w_i = u_i y_i v_i$, получаем

$$g_i^{-1} (w_{i-1} u_i) g_i = w_i v_i^{-1}. \quad (4)$$

Ввиду того, что $r > 1$, каждый элемент g_i , входящий в одну из подгрупп M или N , не принадлежит подгруппе $U_1 = U_2$, и потому из предложения 9.1 следует, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено равенство

$$w_{i-1}u_i = w_iv_i^{-1}.$$

Подставляя сюда выражения элементов w_i , u_i и v_i , получаем

$$c_{i-1}x_i \cdot d_{i-1}y_i = c_is_i^{-1} \cdot d_it_i^{-1}.$$

Ввиду того, что $U_1 = H_1 \times K_1$, для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ имеем

$$c_{i-1}x_i = c_is_i^{-1} \quad \text{и} \quad d_{i-1}y_i = d_it_i^{-1}. \quad (5)$$

Так как ввиду (4) для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ элемент $w_iv_i^{-1}$ принадлежит пересечению $g_i^{-1}U_1g_i \cap U_1$ и по предположению элементы $g_1, g_3, \dots$ принадлежат подгруппе M , а элементы $g_2, g_4, \dots$ принадлежат подгруппе N , из предложения 9.1 следует, что для нечетных номеров i должно выполняться включение

$$w_{i-1}u_i = w_iv_i^{-1} \in H = H_1,$$

а для четных номеров i должно выполняться включение

$$w_{i-1}u_i = w_iv_i^{-1} \in K = K_2.$$

Поскольку $U_1 = H_1 \times K_1$ и $U_2 = H_2 \times K_2$, это означает, что для каждого нечетного i ($i = 1, 2, \dots, r$) имеют место равенства

$$d_{i-1}y_i = 1 \quad \text{и} \quad d_it_i^{-1} = 1,$$

а для каждого четного i ($i = 1, 2, \dots, r$) имеют место равенства

$$c_{i-1}x_i = 1 \quad \text{и} \quad c_is_i^{-1} = 1.$$

Отсюда следует, что элементы c_i и d_i определены однозначно. А именно,

$$c_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } i \text{ четное и } 1 \leq i \leq r \\ x_{i+1}^{-1}, & \text{если } i \text{ нечетное и } 0 \leq i \leq r-1, \end{cases} \quad (6)$$

и

$$d_i = \begin{cases} y_{i+1}^{-1}, & \text{если } i \text{ четное и } 0 \leq i \leq r-1 \\ t_i, & \text{если } i \text{ нечетное и } 1 \leq i \leq r, \end{cases} \quad (7)$$

Равенства (6) и (7) не содержат определений значения элемента c_0 , элемента c_r при r нечетном и элемента d_r при r четном. Но из равенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} c_0 &= (x_1 x_2 s_1)^{-1}, \text{ и} \\ c_r &= x_r s_{r-1} s_r, \text{ если } r \text{ нечетное,} \\ d_r &= y_r t_{r-1} t_r, \text{ если } r \text{ четное.} \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, утверждение о том, что может существовать не более одной последовательности элементов $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$ подгруппы U_1 , удовлетворяющих равенствам (1), доказано.

Для каждого нечетного номера i , $1 < i < r$, соответствующее равенство $c_{i-1} x_i = c_i s_i^{-1}$ системы (5) после подстановки в него значений $c_{i-1} = s_{i-1}$ и $c_i = x_{i+1}^{-1}$, определенных в (6), принимает вид $x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i = 1$. Аналогично, для каждого четного номера i , $1 < i < r$, соответствующее равенство $d_{i-1} y_i = d_i t_i^{-1}$ системы (5) после подстановки в него значений $d_{i-1} = t_{i-1}$ и $d_i = y_{i+1}^{-1}$, определенных в (7), принимает вид $y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i = 1$.

Итак, мы видим, что из существования в подгруппе U_1 последовательности элементов, удовлетворяющих равенствам (1), следует выполнимость условий (2).

Предположим теперь, что условия (2) имеют место, и определим последовательность элементов $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$, полагая

$$w_0 = (x_1 x_2 s_1)^{-1} y_1^{-1},$$

$$w_i = \begin{cases} s_i y_{i+1}^{-1}, & \text{если } i \text{ четное,} \\ x_{i+1}^{-1} t_i, & \text{если } i \text{ нечетное,} \end{cases} \quad \text{для } 1 \leq i < r, \text{ и}$$

$$w_r = \begin{cases} s_r y_r t_{r-1} t_r, & \text{если } r \text{ четное,} \\ x_r s_{r-1} s_r t_r, & \text{если } r \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Покажем, что эта последовательность элементов действительно удовлетворяет равенствам (1).

При $i = 1$, используя перестановочность элемента g_1 с каждым элементом из подгруппы H_1 , имеем

$$w_0^{-1} g_1 w_1 = x_1 x_2 s_1 y_1 g_1 x_2^{-1} t_1 = x_1 y_1 g_1 s_1 t_1 = u_1 g_1 v_1 = f_1.$$

Если $1 < i < r$ и число i четное, то используя перестановочность элемента g_i с каждым элементом из подгруппы $K = K_2$ и равенство $y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i = 1$, имеем

$$\begin{aligned} w_{i-1}^{-1} g_i w_i &= (x_i^{-1} t_{i-1})^{-1} g_i s_i y_{i+1}^{-1} = x_i (t_{i-1} y_{i+1})^{-1} g_i s_i \\ &= x_i y_i t_i g_i s_i = u_i g_i v_i = f_i. \end{aligned}$$

Если $1 < i < r$ и число i нечетное, то используя перестановочность элемента g_i с каждым элементом из подгруппы H_1 и равенство $x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i = 1$, имеем

$$\begin{aligned} w_{i-1}^{-1} g_i w_i &= (s_{i-1} y_i^{-1})^{-1} g_i x_{i+1}^{-1} t_i = (x_{i+1} s_{i-1})^{-1} y_i g_i t_i = \\ &= x_i s_i y_i g_i t_i = u_i g_i v_i = f_i. \end{aligned}$$

Наконец, если число r четное, то

$$w_{r-1}^{-1} g_r w_r = (x_r^{-1} t_{r-1})^{-1} g_r s_r y_r t_{r-1} t_r = x_r y_r g_r s_r t_r = f_r,$$

а если число r нечетное, то

$$w_{r-1}^{-1} g_r w_r = (s_{r-1} y_r^{-1})^{-1} g_r x_r s_{r-1} s_r t_r = x_r y_r g_r s_r t_r = f_r.$$

Предложение 9.4 доказано.

Отметим, в заключение, что несмотря на то, что условия (2) и (3) в формулировке предложения 9.4 относятся к конкретным выражениям слогов несократимой записи элемента f через соответствующие слоги несократимой записи элемента g и элементы подгруппы U_1 , из предложения 9.3 следует, тем не менее, что в действительности выполнимость этих условий зависит лишь от слогов этих несократимых записей.

В самом деле, пусть, например, элементы f_1 и g_1 принадлежат подгруппе M и пусть наряду с равенствами $f_i = u_i g_i v_i$, где

$$u_i = x_i y_i \quad \text{и} \quad v_i = s_i t_i$$

для некоторых элементов $x_i, s_i \in H_1$ и $y_i, t_i \in K_1$, имеют место равенства $f_i = u'_i g_i v'_i$, где

$$u'_i = x'_i y'_i \quad \text{и} \quad v'_i = s'_i t'_i$$

для некоторых элементов $x'_i, s'_i \in H_1$ и $y'_i, t'_i \in K_1$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Если тогда для некоторого i , $1 < i < r$, элементы f_i и g_i принадлежат подгруппе M (и потому элементы f_{i-1} , f_{i+1} , g_{i-1} и g_{i+1} принадлежат подгруппе N), из предложения 9.3 следует, что $x_i s_i = x'_i s'_i$, $s_{i-1} = s'_{i-1}$ и $x_{i+1} = x'_{i+1}$. Следовательно, $x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i = x'_i x'_{i+1} s'_{i-1} s'_i$.

Аналогично, если элементы f_i и g_i принадлежат подгруппе N , из предложения 9.3 выводимо равенство $y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i = y'_i y'_{i+1} t'_{i-1} t'_i$.

§ 10. Доказательство теоремы 10

Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что группы A и B финитно аппроксимируемы относительно сопряженности, H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно, являющиеся к тому же финитно отделимыми. Мы докажем здесь, что при этих предположениях свободное произведение $G = (A * B; [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Пусть X — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A , Y — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы B . Введем в рассмотрение свободное произведение

$$G(X, Y) = (A/X * B/Y; [HX/X, KY/Y] = 1)$$

фактор-групп A/X и B/Y с коммутирующими подгруппами HX/X и KY/Y . Очевидно, что естественные отображения группы A на фактор-группу A/X и группы B на фактор-группу B/Y продолжаемы до гомоморфизма $\theta(X, Y)$ группы G на группу $G(X, Y)$. Столь же очевидно, что если X_1 и X_2 — нормальные подгруппы конечного индекса группы A , Y_1 и Y_2 — нормальные подгруппы конечного индекса группы B , причем $X_1 \leq X_2$ и $Y_1 \leq Y_2$, то существует гомоморфизм χ группы $G(X_1, Y_1)$ в группу $G(X_2, Y_2)$ такой, что

$$\theta(X_2, Y_2) = \theta(X_1, Y_1) \cdot \chi.$$

Группа $G(X, Y)$, как и группа G , разложима в свободное произведение двух групп с объединенными подгруппами. А именно, предполагая обозначения, введенные в § 2 для описания разложения группы G , и полагая, как в доказательстве леммы 2.1, $C = X \cap H$, $D = Y \cap K$ и для каждого $i = 1, 2$

$$C_i = C\sigma^i, \quad D_i = D\tau^i \quad \text{и} \quad V_i = C_i D_i,$$

введем в рассмотрение группы

$$M_{X, V_1} = \left(A/X * U_1/V_1; HX/X = H_1 V_1/V_1, \sigma_{X, V_1}^1 \right)$$

и

$$N_{Y,V_2} = \left(B/Y * U_2/V_2; KY/Y = K_2V_2/V_2, \tau_{Y,V_2}^2 \right).$$

Изоморфизм φ группы U_1 на группу U_2 индуцирует изоморфизм $\varphi_{X,Y}$ фактор-группы U_1/V_1 на фактор-группу U_2/V_2 , и группа $G(X, Y)$ является, очевидно, свободным произведением

$$G(X, Y) = (M_{X,V_1} * N_{Y,V_2}; U_1/V_1 = U_2/V_2, \varphi_{X,Y})$$

групп M_{X,V_1} и N_{Y,V_2} с подгруппами U_1/V_1 и U_2/V_2 , объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{X,Y}$.

Обозначим через ρ_{X,V_1} гомоморфизм группы M на группу M_{X,V_1} , продолжающий естественные гомоморфизмы группы A на фактор-группу A/X и группы U_1 на фактор-группу U_1/V_1 , и через ρ'_{Y,V_2} — гомоморфизм группы N на группу N_{Y,V_2} , продолжающий естественные гомоморфизмы группы B на фактор-группу B/Y и группы U_2 на фактор-группу U_2/V_2 . Так как гомоморфизмы ρ_{X,V_1} и ρ'_{Y,V_2} согласованы на подгруппах U_1 и U_2 с изоморфизмом φ , существует продолжающий их гомоморфизм группы G на группу

$$G(X, Y) = (M_{X,V_1} * N_{Y,V_2}; U_1/V_1 = U_2/V_2, \varphi_{X,Y}).$$

Этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом $\theta(X, Y)$, поскольку оба действуют одинаково на подгруппах A и B группы G . Отсюда следует, в частности, что при гомоморфизме $\theta(X, Y)$ группы G на группу $G(X, Y)$ подгруппы M и N переходят в подгруппы M_{X,V_1} и N_{Y,V_2} соответственно.

Каждая из групп M_{X,V_1} и N_{Y,V_2} является свободным произведением с объединенными подгруппами двух конечных групп и потому в силу предложения 8.6 финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Поэтому группа $G(X, Y)$, являясь свободным произведением двух финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп с объединенными конечными подгруппами, в силу того

же предложения финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Таким образом, для доказательства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G достаточно для любых двух несопряженных элементов f и g этой группы указать такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $G(X, Y)$.

Для этого нам потребуется ряд предварительных результатов.

Предложение 10.1. 1) Для любого отличного от единицы элемента g группы $G = (M * N; U_1 = U_2, \varphi)$ в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что образ $g\theta(X, Y)$ элемента g отличен от единицы.

2) Для каждого элемента g любой из групп M или N , не принадлежащего подгруппе $U_1 = U_2$, в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что образ $g\theta(X, Y)$ элемента g не принадлежит образу $U_1\theta(X, Y)$ подгруппы U_1 .

3) Для любого конечного набора $g_1, g_2, \dots, g_n$ элементов группы G , длина каждого из которых больше 1, в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ длина элемента $g_i\theta(X, Y)$ в группе

$$G(X, Y) = (M_{X, V_1} * N_{Y, V_2}; U_1/V_1 = U_2/V_2, \varphi_{X, Y}).$$

совпадает с длиной элемента g_i в группе G .

Доказательство. Докажем сначала, что если g — неединичный элемент из подгруппы U_1 , то для некоторых нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B соответственно будем иметь $g\theta(X, Y) \neq 1$. Если $g = hk$, где $h \in H_1$ и $k \in K_1$, то хотя бы один из этих элементов отличен от 1. Если $h \neq 1$, то из предположения о финитной аппроксимируемости группы A получаем существование нормальной подгруппы X конечного индекса группы A , не содержа-

щей элемента $h(\sigma^1)^{-1}$. Очевидно, что тогда при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элемент $g\theta(X, Y)$ отличен от 1. Если $k \neq 1$, то выбираем нормальную подгруппу Y конечного индекса группы B , не содержащую элемента $k(\tau^1)^{-1}$. Тогда $k \notin D_1$ и потому при любом выборе нормальной подгруппы X конечного индекса группы A имеем $g \notin V_1$, т. е. $g\theta(X, Y) \neq 1$.

Предположим теперь, что элемент $g \in M$ не принадлежит подгруппе U_1 . Пусть $g = g_1 g_2 \cdots g_r$ — несократимая запись этого элемента в группе $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$. Если $r = 1$, то элемент g принадлежит подгруппе A и не входит в подгруппу H . Так как по предположению подгруппа H в группе A финитно отделима, существует нормальная подгруппа X конечного индекса группы A такая, что $g \notin HX$. Тогда для любой нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элемент $g\rho_{X, V_1}$ группы

$$M_{X, V_1} = \left(A/X * U_1/V_1; HX/X = H_1V_1/V_1, \sigma_{X, V_1}^1 \right)$$

лежит в ее свободном множителе A/X и не принадлежит объединяемой подгруппе HX/X . Таким образом, $g\rho_{X, V_1} \notin U_1/V_1$, и так как действие гомоморфизма $\theta(X, Y)$ на подгруппе A совпадает с действием ρ_{X, V_1} , подгруппы X и Y искомые.

Пусть теперь $r > 1$. Тогда все слоги g_i несократимой записи элемента g , входящие в A , не принадлежат подгруппе H , и снова используя финитную отделимость H в A , мы можем выбрать нормальную подгруппу X конечного индекса группы A так, чтобы все они не входили в подгруппу HX . Все слоги g_i несократимой записи элемента g , входящие в U_1 , не принадлежат подгруппе H_1 , и потому их K_1 -проекции отличны от 1. Из финитной аппроксимируемости группы B следует существование такой ее нормальной подгруппы Y конечного индекса, что эти проекции не войдут в соответствующую подгруппу D_1 , и потому все рассматриваемые слоги не будут принадлежать подгруппе H_1V_1 . Это означает, что при указанном выборе подгрупп X и Y запись $(g_1\rho_{X, V_1})(g_2\rho_{X, V_1}) \cdots (g_r\rho_{X, V_1})$ элемента $g\rho_{X, V_1}$

является несократимой в группе M_{X,V_1} , и так как $r > 1$, он не может принадлежать свободному множителю U_1/V_1 этой группы.

Аналогично доказывается, что если элемент $g \in N$ не принадлежит подгруппе U_2 , то при подходящем выборе подгрупп X и Y элемент $g\theta(X, Y)$ не принадлежит подгруппе $U_1\theta(X, Y)$. Таким образом, справедливость утверждения 2) установлена.

Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n$ — элементы группы G , длина каждого из которых больше 1, и пусть $g_i = x_{i1}x_{i2} \cdots x_{ir_i}$ — несократимая запись элемента g_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Так как каждый элемент x_{ij} принадлежит одной из групп M или N и не принадлежит подгруппе $U_1 = U_2$, по доказанному существуют нормальные подгруппы X_{ij} и Y_{ij} конечного индекса групп A и B соответственно такие, что образ $x_{ij}\theta(X_{ij}, Y_{ij})$ элемента x_{ij} не принадлежит образу $U_1\theta(X_{ij}, Y_{ij})$ подгруппы U_1 . Обозначим через X и Y пересечение всех подгрупп X_{ij} и пересечение всех подгрупп Y_{ij} соответственно. Так как для любых i и j гомоморфизм $\theta(X_{ij}, Y_{ij})$ проходит через гомоморфизм $\theta(X, Y)$, все элементы $x_{ij}\theta(X, Y)$ не принадлежат подгруппе U_1/V_1 группы $G(X, Y)$. Поэтому для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ запись

$$(x_{i1}\theta(X, Y))(x_{i2}\theta(X, Y)) \cdots (x_{ir_i}\theta(X, Y))$$

элемента $g_i\theta(X, Y)$ является несократимой в группе $G(X, Y)$, и потому $l(g_i\theta(X, Y)) = r_i = l(g_i)$.

Таким образом, утверждение 3) также доказано. Утверждение 1) следует из утверждений 2) и 3) и случая, рассмотренного в начале доказательства.

Заметим, что поскольку при доказательстве предложения 10.1 использовалось лишь предположение о финитной отделимости подгрупп H и K , мы получили еще одно доказательство теоремы 1.

Используя предложение 8.3, нетрудно показать, что группы M и N финитно аппроксимируемы относительно сопряженности. Тем не менее, нам требуется несколько более сильное утверждение.

Предложение 10.2. *Для любых элементов f и g группы M , не сопряженных в этой группе, существуют нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно такие, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $M\theta(X, Y)$. Аналогичное утверждение справедливо для группы N .*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что для любого элемента $g \in M$ в группах A и B существуют нормальные подгруппы X и Y конечного индекса такие, что длина элемента $g\theta(X, Y)$ в группе M_{X, Y_1} совпадает с длиной элемента g в группе M . Действительно, если $l(g) = 1$, это очевидно, а если $l(g) > 1$, это установлено при доказательстве утверждения 2) предложения 10.1. Очевидно также, что если элемент $g \in M$ циклически несократим и $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$, то и элемент $g\theta(X, Y)$ циклически несократим.

Пусть теперь f и g — элементы группы M , не сопряженные в этой группе. Считая без потери общности эти элементы циклически несократимыми, рассмотрим отдельно ряд случаев.

Случай 1. $l(f) \neq l(g)$. Пользуясь предыдущим замечанием, выберем нормальные подгруппы X_1 и X_2 конечного индекса группы A и нормальные подгруппы Y_1 и Y_2 конечного индекса группы B так, чтобы $l(f\theta(X_1, Y_1)) = l(f)$ и $l(g\theta(X_2, Y_2)) = l(g)$. Тогда при $X = X_1 \cap X_2$ и $Y = Y_1 \cap Y_2$, как и в доказательстве предложения 10.1, будем иметь $l(f\theta(X, Y)) = l(f)$ и $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$. Таким образом, циклически несократимые элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ группы $M\theta(X, Y) = M_{X, Y_1}$ имеют разную длину и в силу предложения 8.1 не являются сопряженными в ней.

Случай 2. $l(f) = l(g) = 1$. В этом случае каждый из элементов f и g принадлежит одной из подгрупп A или U_1 , и здесь, в свою очередь, возникают три возможности.

а) Элементы f и g принадлежат подгруппе A . Так как они не сопряжены в этой группе и так как по предположению группа A финитно аппроксимируема относительно сопряженности, в ней найдется такая нормальная подгруппа X конечного индекса, что элемен-

ты fX и gX не сопряжены в группе A/X . Утверждается, что тогда при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B эти элементы не сопряжены в группе M_{X,V_1} . Действительно, эта группа является свободным произведением групп A/X и U_1/V_1 с объединяемыми подгруппами, лежащими в центрах сомножителей, и потому наше утверждение следует из предложения 8.3. Так как $fX = f\theta(X, Y)$ и $gX = g\theta(X, Y)$, подгруппы X и Y искомые.

б) Элементы f и g принадлежат подгруппе U_1 . Так как элемент fg^{-1} отличен от 1, из предложения 10.1 следует существование нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B соответственно таких, что $fg^{-1} \notin V_1$. Тогда fV_1 и gV_1 являются различными элементами абелевой группы U_1/V_1 , и потому в соответствии с предложением 8.3 не могут быть сопряженными в группе M_{X,V_1} .

в) Один из элементов, скажем, f принадлежит группе A и не принадлежит ее подгруппе H , а другой элемент g принадлежит группе U_1 и не принадлежит ее подгруппе H_1 . Так как подгруппа H группы A финитно отделима, в группе A найдется такая нормальная подгруппа X конечного индекса, что элемент fX не принадлежит подгруппе HX/X . Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 10.1, придем к существованию в группе B такой нормальной подгруппы Y конечного индекса, что элемент gV_1 не войдет в подгруппу H_1V_1/V_1 . Снова из предложения 8.3 следует, что в группе M_{X,V_1} элементы fX и gV_1 не могут быть сопряженными.

Случай 3. $l(f) = l(g) > 1$. Пусть $g = x_1x_2 \cdots x_r$ — несократимая запись элемента g в группе $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$ и пусть для каждого $i = 1, 2, \dots, r$

$$g_i = x_i x_{i+1} \cdots x_r x_1 x_2 \cdots x_{i-1}$$

— циклическая перестановка элемента g . Так как f и g не сопряжены в группе M , все элементы $fg_1^{-1}, fg_2^{-1}, \dots, fg_r^{-1}$ отличны от единицы в группе G . Так как группа G является финитно аппроксимируемой, существует гомоморфизм α этой группы на некоторую конечную

группу, образы элементов $fg_1^{-1}, fg_2^{-1}, \dots, fg_r^{-1}$ относительно которого отличны от единицы. Если $X_1 = A \cap \text{Ker } \alpha$ и $Y_1 = B \cap \text{Ker } \alpha$, то, как легко видеть, гомоморфизм α проходит через гомоморфизм $\theta(X_1, Y_1)$, и потому для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ $f\theta(X_1, Y_1) \neq g_i\theta(X_1, Y_1)$.

В соответствии с предложением 10.1 выберем также такие нормальные подгруппы конечного индекса X_2 группы A и Y_2 группы B , что $l(f\theta(X_2, Y_2)) = l(f)$ и $l(g\theta(X_2, Y_2)) = l(g)$. Полагаем $X = X_1 \cap X_2$ и $Y = Y_1 \cap Y_2$. Так как гомоморфизм $\theta(X_1, Y_1)$ проходит через гомоморфизм $\theta(X, Y)$, для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ $f\theta(X, Y) \neq g_i\theta(X, Y)$, а так как гомоморфизм $\theta(X_2, Y_2)$ проходит через гомоморфизм $\theta(X, Y)$, для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ запись

$$(x_1\theta(X, Y))(x_2\theta(X, Y)) \cdots (x_r\theta(X, Y))$$

элемента $g\theta(X, Y)$ является несократимой и элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ циклически несократимы. Произвольная циклическая перестановка элемента $g\theta(X, Y)$ имеет вид

$$(x_i\theta(X, Y))(x_{i+1}\theta(X, Y)) \cdots (x_r\theta(X, Y))(x_1\theta(X, Y)) \\ (x_2\theta(X, Y)) \cdots (x_{i-1}\theta(X, Y))$$

для некоторого i и потому совпадает с элементом $g_i\theta(X, Y)$. Таким образом, $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ — циклически несократимые элементы группы M_{X, V_1} длины > 1 , и элемент $f\theta(X, Y)$ отличен от каждой циклической перестановки элемента $g\theta(X, Y)$. Из предложения 8.3 следует, что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ в группе M_{X, V_1} не сопряжены. Предложение 10.2 доказано.

Предложение 10.3. *Для любых элементов f и g группы M , принадлежащих различным смежным классам по двойному модулю (U_1, U_1) , существуют нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно такие, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g принадлежат различным смежным классам по двойному модулю $(U_1/V_1, U_1/V_1)$ в группе $M\theta(X, Y)$. Аналогичное утверждение справедливо для группы N .*

Доказательство. Если один из элементов f и g принадлежит подгруппе U_1 , скажем, $f \in U_1$, то двойной смежный класс $U_1 f U_1$ совпадает с подгруппой U_1 и условие предложения становится равносильным требованию $g \notin U_1$. Поэтому в этом случае утверждение предложения 10.3 содержится в предложении 10.1.

Будем считать теперь, что элементы f и g не лежат в подгруппе U_1 , и пусть

$$f = f_1 f_2 \cdots f_r \quad \text{и} \quad g = g_1 g_2 \cdots g_s$$

— несократимые записи этих элементов в группе $M = (A * U_1; H = H_1, \sigma^1)$. Очевидно, что без потери общности можно считать, что крайние слоги f_1, f_r, g_1 и g_s этих записей не принадлежат подгруппе U_1 . Заметим также, что каждый слог f_i и g_j не принадлежит соответствующей объединяемой подгруппе: при $r > 1$ и $s > 1$ это следует непосредственно из определения несократимой записи, а если, скажем, $r = 1$, — из предположения $f \notin U_1$.

Обозначим через $\overline{M}$ фактор-группу группы M по подгруппе H (совпадающей, напомним, с центром группы M). Очевидно, что группа $\overline{M}$ является свободным произведением групп A/H и U_1/H_1 . Так как $H \leq U_1$, образы $\overline{f}$ и $\overline{g}$ элементов f и g при естественном гомоморфизме группы M на группу $\overline{M}$ принадлежат различным смежным классам по двойному модулю $(U_1/H_1, U_1/H_1)$. Из включения $H \leq U_1$ следует также, что записи

$$\overline{f}_1 \overline{f}_2 \cdots \overline{f}_r \quad \text{и} \quad \overline{g}_1 \overline{g}_2 \cdots \overline{g}_s$$

элементов $\overline{f}$ и $\overline{g}$ являются несократимыми в группе $\overline{M}$.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — все попарно различные элементы из группы U_1/H_1 , участвующие в несократимых записях элементов $\overline{f}$ и $\overline{g}$. Так как $U_1/H_1 \simeq K_1$, из финитной аппроксимируемости группы B следует существование в ней такой нормальной подгруппы Y конечного индекса, что элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ остаются неединичными и попарно различными по модулю соответствующей ей подгруппы

D_1 группы K_1 . Тогда в фактор-группе $\widehat{M}$ группы $\overline{M}$ по нормальному замыканию подгруппы D_1 (являющейся свободным произведением групп A/H и U_1/H_1D_1) образы $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ элементов $\overline{f}$ и $\overline{g}$ являются различными, имеют попрежнему длины r и s соответственно и их несократимые записи начинаются и оканчиваются в свободном множителе A/H . В частности, элемент $\widehat{f}$ не принадлежит смежному классу по двойному модулю $(U_1/H_1D_1, U_1/H_1D_1)$, содержащему элемент $\widehat{g}$. Так как подгруппа U_1/H_1D_1 конечна, а группа $\widehat{M}$ финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа Z конечного индекса, по модулю которой элемент $\widehat{f}$ не принадлежит смежному классу по двойному модулю $(U_1/H_1D_1, U_1/H_1D_1)$, содержащему элемент $\widehat{g}$.

Обозначим через R прообраз подгруппы Z при естественном гомоморфизме группы M на группу $\widehat{M}$. Тогда R является нормальной подгруппой конечного индекса группы M и в этой группе элемент f не входит в множество $U_1gU_1 \cdot R$. Полагая $X = A \cap R$, рассмотрим группу M_{X,V_1} , соответствующую этой подгруппе X и определенной выше подгруппе Y . Так как в группе M подгруппы H и H_1 отождествлены, из включения $X \leq R$ следует включение $V_1 \leq R$, и потому естественный гомоморфизм группы M на фактор-группу M/R проходит через гомоморфизм ρ_{X,V_1} . Поэтому в группе M_{X,V_1} элемент $f\theta(X,Y)$ не принадлежит смежному классу по двойному модулю $(U_1/V_1, U_1/V_1)$, содержащему элемент $g\theta(X,Y)$, что и требовалось.

Предложение 10.4. Пусть f и g — элементы группы G равной длины $r > 1$. Если элементы f и g не сопряжены в группе G относительно подгруппы U_1 , то существуют нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно такие, что $l(f\theta(X,Y)) = l(f)$, $l(g\theta(X,Y)) = l(g)$ и образы $f\theta(X,Y)$ и $g\theta(X,Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $G(X,Y)$ относительно подгруппы U_1/V_1 .

Доказательство. Пусть $f = f_1f_2 \cdots f_r$ и $g = g_1g_2 \cdots g_r$ — несократимые записи в группе $G = (M * N; U_1 = U_2, \varphi)$ элементов f и

g . Напомним, что в соответствии с предложением 8.5 элементы f и g сопряжены в группе G при помощи некоторого элемента из подгруппы U_1 тогда и только тогда, когда в подгруппе U_1 найдутся элементы $u_0, u_1, u_2, \dots, u_r = u_0$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$

$$f_i = u_{i-1}^{-1} g_i u_i \quad (1)$$

Аналогично формулируется условие сопряженности с помощью элемента из подгруппы U_1/V_1 элементов $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ группы $G(X, Y)$ для любых нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B таких, что $l(f\theta(X, Y)) = l(g\theta(X, Y)) = r$. Мы покажем, что если для элементов f и g не существует последовательности элементов, удовлетворяющих равенствам (1), то при подходящем выборе подгрупп X и Y такой последовательности не существует и для элементов $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$.

Фиксируем существующие в силу предложения 10.1 нормальные подгруппы X_0 и Y_0 конечного индекса групп A и B такие, что в группе $G(X_0, Y_0)$

$$l(f\theta(X_0, Y_0)) = l(g\theta(X_0, Y_0)) = r.$$

Очевидно, что выполнимость равенств (1) означает, в частности, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ элементы f_i и g_i принадлежат одной и той же подгруппе M или N и определяют в ней один и тот же смежный класс по двойному модулю (U_1, U_1) .

Предположим сначала, что элементы f_1 и g_1 не лежат в одной и той же подгруппе M или N . Поскольку $l(f\theta(X_0, Y_0)) = l(f)$ и $l(g\theta(X_0, Y_0)) = l(g)$, первыми слогами несократимых записей в группе $G(X_0, Y_0)$ элементов $f\theta(X_0, Y_0)$ и $g\theta(X_0, Y_0)$ являются элементы $f_1\theta(X_0, Y_0)$ и $g_1\theta(X_0, Y_0)$, не принадлежащие, следовательно, объединенной подгруппе $U_1\theta(X_0, Y_0)$, и потому не входящие в одну и ту же подгруппу $M\theta(X_0, Y_0)$ или $N\theta(X_0, Y_0)$. Таким образом, ввиду предложения 8.5 в группе $G(X_0, Y_0)$ элементы $f\theta(X_0, Y_0)$ и $g\theta(X_0, Y_0)$ не сопряжены относительно подгруппы U_1/V_1 .

Будем считать теперь, что элементы f_1 и g_1 , а потому и для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ элементы f_i и g_i принадлежат одной и той же подгруппе M или N . Для определенности будем предполагать также, что элементы f_1 и g_1 принадлежат подгруппе M ; случай, когда эти элементы принадлежат подгруппе N рассматривается аналогичным образом.

Если для некоторого $i = 1, 2, \dots, r$ элементы f_i и g_i не принадлежат одному и тому же смежному классу по двойному модулю (U_1, U_1) , то в силу предложения 10.3 существуют нормальные подгруппы X_1 и Y_1 конечного индекса групп A и B соответственно такие, что в группе $G(X_1, Y_1)$ образы $f_i\theta(X_1, Y_1)$ и $g_i\theta(X_1, Y_1)$ элементов f и g принадлежат разным смежным классам по двойному модулю

$$(U_1\theta(X_1, Y_1), U_1\theta(X_1, Y_1))$$

. Тогда при $X = X_0 \cap X_1$ и $Y = Y_0 \cap Y_1$ в группе

$$G(X, Y) = (M_{X, V_1} * N_{Y, V_2}; U_1/V_1 = U_2/V_2, \varphi_{X, Y})$$

элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ имеют длину $r > 1$ и их слоги $f_i\theta(X, Y)$ и $g_i\theta(X, Y)$ принадлежат разным смежным классам по двойному модулю $(U_1/V_1, U_1/V_1)$. Снова из предложения 8.5 следует, что в этой группе элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не могут быть сопряженными относительно подгруппы U_1/V_1 .

Предположим теперь, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ элементы f_i и g_i определяют один и тот же смежный класс по двойному модулю (U_1, U_1) , т. е. для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ имеет место равенство $f_i = (x_i y_i) g_i (s_i t_i)$ для подходящих элементов $x_i, s_i \in H_1$ и $y_i, t_i \in K_1$. Пусть не выполнено условие (2) из предложения 9.4, т. е. или для некоторого нечетного i , $1 < i < r$, элемент $x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i$ отличен от единицы, или для некоторого четного i , $1 < i < r$, элемент $y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i$ отличен от единицы. Из предложения 10.1 следует существование нормальных подгрупп X_1 и Y_1 конечного индекса групп

A и B таких, что образ относительно гомоморфизма $\theta(X_1, Y_1)$ соответственно элемента $x_i x_{i+1} s_{i-1} s_i$ или элемента $y_i y_{i+1} t_{i-1} t_i$ является неединичным элементом группы $G(X_1, Y_1)$. Тогда при $X = X_0 \cap X_1$ и $Y = Y_0 \cap Y_1$ в группе $G(X, Y) = (M_{X, V_1} * N_{Y, V_2}; U_1/V_1 = U_2/V_2, \varphi_{X, Y})$ элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ имеют длину $r > 1$ и их слоги $f_i\theta(X, Y)$ и $g_i\theta(X, Y)$ связаны соотношениями

$$f_i\theta(X, Y) = (x_i\theta(X, Y) y_i\theta(X, Y)) g_i\theta(X, Y) (s_i\theta(X, Y) t_i\theta(X, Y)),$$

где элементы $x_i\theta(X, Y)$, $s_i\theta(X, Y)$ принадлежат подгруппе $H_1 V_1/V_1$ и элементы $y_i\theta(X, Y)$, $t_i\theta(X, Y)$ принадлежат подгруппе $K_1 V_1/V_1$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Применяя предложение 9.4 к свободному произведению с коммутирующими подгруппами $G(X, Y)$, мы видим, что для элементов $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ этой группы не существует последовательности элементов, удовлетворяющих равенствам (1), поскольку здесь не выполнено условие (2) из упомянутого предложения. Следовательно, элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не являются сопряженными относительно подгруппы U_1/V_1 .

Предположим, наконец, что выражения элементов f_i через g_i из предыдущего абзаца удовлетворяют условию (2) предложения 9.4. Тогда в силу этого предложения существует единственная последовательность $w_0, w_1, w_2, \dots, w_r$ элементов подгруппы U_1 таких, что для любого $i = 1, 2, \dots, r$ выполнено равенство

$$f_i = w_{i-1}^{-1} g_i w_i. \quad (2)$$

Сравнивая системы равенств (1) и (2), видим, что поскольку элементы f и g не сопряжены в группе G относительно подгруппы U_1 , мы должны иметь $w_0 \neq w_r$. Выберем нормальные подгруппы X_1 и Y_1 конечного индекса групп A и B так, чтобы $w_0\theta(X_1, Y_1) \neq w_r\theta(X_1, Y_1)$, и положим $X = X_0 \cap X_1$ и $Y = Y_0 \cap Y_1$. Тогда в группе $G(X, Y)$ $w_0\theta(X, Y) \neq w_r\theta(X, Y)$, элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ имеют длину $r > 1$ и их слоги удовлетворяют равенствам

$$f_i\theta(X, Y) = (w_{i-1}\theta(X, Y))^{-1} (g_i\theta(X, Y)) (w_i\theta(X, Y)) \quad (i=1, 2, \dots, r), \quad (3)$$

где $w_0\theta(X, Y)$, $w_1\theta(X, Y)$, $w_2\theta(X, Y)$, $\dots$, $w_r\theta(X, Y)$ — элементы подгруппы U_1/V_1 . Так как в силу предложения 9.4, примененному к группе $G(X, Y)$, существует не более одной последовательности элементов подгруппы U_1/V_1 , удовлетворяющих равенствам (3), и так как $w_0\theta(X, Y) \neq w_r\theta(X, Y)$, элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не являются сопряженными относительно подгруппы U_1/V_1 . Предложение 10.4 доказано.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 10. Пусть f и g — произвольные элементы группы G , не сопряженные в этой группе. Покажем, что существуют такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $G(X, Y)$. Как было отмечено в начале этого параграфа, тем самым финитная аппроксимируемость относительно сопряженности группы G будет доказана.

Без потери общности можно считать элементы f и g циклически несократимыми. Если их длины различны, то искомые подгруппы X и Y можно получить, выбрав их в соответствии с предложением 10.1 так, чтобы $l(f\theta(X, Y)) = l(f)$ и $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$. Действительно, поскольку тогда элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ являются циклически несократимыми, из предложения 9.2 будет следовать, что они не сопряжены в группе $G(X, Y)$.

Если $l(f) = l(g) = 1$ и оба элемента f и g лежат в одной из подгрупп M или N , то из предложения 10.2 следует существование таких подгрупп X и Y , что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не сопряжены в подгруппе $M\theta(X, Y)$ группы $G(X, Y)$. В силу предложения 9.2 эти элементы не сопряжены и в группе $G(X, Y)$. Если же элементы f и g не принадлежат одной и той же подгруппе M или N , то из предложения 10.1 следует существование таких подгрупп X и Y , что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не принадлежат одной и той же подгруппе $M\theta(X, Y)$ или $N\theta(X, Y)$ и потому в силу предложения 9.2 не являются сопряженными в группе $G(X, Y)$.

Пусть, наконец, $l(f) = l(g) = r > 1$ и пусть $g_1, g_2, \dots, g_r$ — все циклические перестановки элемента g . Так как элемент f не сопряжен относительно подгруппы U_1 ни с одним из элементов $g_1, g_2, \dots, g_r$, то в силу предложения 10.4 для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ существуют подгруппы X_i и Y_i такие, что $l(f\theta(X_i, Y_i)) = l(f)$, $l(g_i\theta(X_i, Y_i)) = l(g_i)$ и элементы $f\theta(X_i, Y_i)$ и $g_i\theta(X_i, Y_i)$ не сопряжены в группе $G(X_i, Y_i)$ относительно подгруппы $U_1\theta(X_i, Y_i)$. Тогда подгруппы $X = \bigcap_{i=1}^r X_i$ и $Y = \bigcap_{i=1}^r Y_i$ являются искомыми. Действительно, в группе $G(X, Y)$ имеем $l(f\theta(X, Y)) = l(f)$, $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$, элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ циклически несократимы и элемент $f\theta(X, Y)$ не сопряжен относительно подгруппы U_1/V_1 ни с одним элементом $g_i\theta(X, Y)$. Так как произвольная циклическая перестановка элемента $g\theta(X, Y)$ совпадает, очевидно, с одним из элементов $g_i\theta(X, Y)$, из предложения 9.2 следует, что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не сопряжены в группе $G(X, Y)$. Теорема 10 доказана.

§ 11. Доказательство теоремы 11

Всюду в этом параграфе мы снова предполагаем, что H и K — финитно отделимые центральные подгруппы финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп A и B . Здесь будет доказано, что тогда свободное произведение

$$G = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Как и в доказательстве теоремы 10, введем в рассмотрение следующее семейство гомоморфных образов группы G . Если X — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A и Y — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы B , рассмотрим свободное произведение

$$G(X, Y) = (A/X * B/Y; [A/X, KY/Y] = 1, [HX/X, B/Y] = 1)$$

фактор-групп A/X и B/Y с централизованными подгруппами HX/X и KY/Y . Очевидно, что естественные отображения группы A на фактор-группу A/X и группы B на фактор-группу B/Y продолжаемы до гомоморфизма $\theta(X, Y)$ группы G на группу $G(X, Y)$. Очевидно также, что если X_1 и X_2 — нормальные подгруппы конечного индекса группы A , Y_1 и Y_2 — нормальные подгруппы конечного индекса группы B , причем $X_1 \leq X_2$ и $Y_1 \leq Y_2$, то существует гомоморфизм χ группы $G(X_1, Y_1)$ в группу $G(X_2, Y_2)$ такой, что $\theta(X_2, Y_2) = \theta(X_1, Y_1) \cdot \chi$.

Напомним, что группа G раскладывается в свободное произведение групп M и N с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами U и V , где $M = A \times K_1$, $N = H_1 \times B$, (H_1 и K_1 — изоморфные копии групп H и K соответственно с фиксированными изоморфизмами $\sigma : H \rightarrow H_1$ и $\tau : K \rightarrow K_1$) $U = H \times K_1$, $V = H_1 \times K$ и φ — изоморфизм группы U на группу V , продолжающий отображения σ и τ^{-1} .

Соответствующее разложение группы $G(X, Y)$ в свободное произведение с объединенными подгруппами получается при помощи построения, использованного выше в доказательствах лемм 3.1 и 3.2. А именно, полагая $C = X \cap H$, $D = Y \cap K$, $C_1 = C\sigma$ и $D_1 = D\tau$, получаем (U, V, φ) -совместимые нормальные подгруппы конечного индекса $R = XD_1$ группы M и $S = C_1Y$ группы N . Легко видеть, что свободное произведение

$$G_{R,S} = (M/R * N/S; UR/R = VS/S, \varphi_{R,S})$$

групп M/R и N/S с подгруппами UR/R и VS/S , объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{R,S}$, является группой, изоморфной группе $G(X, Y)$, а гомоморфизм $\rho_{R,S}$ совпадает с гомоморфизмом $\theta(X, Y)$. В частности, $M\theta(X, Y) = M/R$, $N\theta(X, Y) = N/S$ и $U\theta(X, Y) = UR/R$.

Таким образом, для любых нормальных подгрупп X и Y конечного индекса групп A и B группа $G(X, Y)$ является свободным произведением с объединенными подгруппами двух конечных групп и потому в силу предложения 8.6 финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Следовательно, как и в случае свободного произведения с коммутирующими подгруппами, для доказательства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G достаточно для любых двух несопряженных элементов f и g этой группы указать такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса групп A и B соответственно, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $G(X, Y)$. Сделать это здесь будет намного проще, чем в случае свободного произведения с коммутирующими подгруппами, поскольку в этом случае как группа G , так и группа $G(X, Y)$, является свободным произведением двух групп с объединенными центральными подгруппами, и мы можем воспользоваться более простым критерием сопряженности элементов этих групп, доставляемым предложением 8.3.

Начнем с двух предварительных замечаний. Аналогом предложения 10.1 является

Предложение 11.1. 1) Для любого неединичного элемента g группы G в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что образ $g\theta(X, Y)$ элемента g отличен от единицы.

2) Для каждого элемента g любой из групп M или N , не принадлежащего подгруппе $U = V$, в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что образ $g\theta(X, Y)$ элемента g не принадлежит образу $U\theta(X, Y)$ подгруппы U .

3) Для любого конечного набора $g_1, g_2, \dots, g_n$ элементов группы G , длина каждого из которых больше 1, в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ длина элемента $g_i\theta(X, Y)$ в группе

$$G(X, Y) = (M/R * N/S; UR/R = VS/S, \varphi_{R,S})$$

совпадает с длиной элемента g_i в группе G .

Доказательство. Произвольный элемент $g \in M$ записывается в виде $g = ak$, где $a \in A$ и $k \in K_1$. Если он не принадлежит подгруппе U , то элемент a не входит в подгруппу H . Так как по предположению подгруппа H финитно отделима в A , существует нормальная подгруппа X конечного индекса группы A такая, что $a \notin HX$. Очевидно, что тогда при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элемент g не будет входить в подгруппу $UR = HX \cdot D_1$, и потому $g\theta(X, Y) \notin U\theta(X, Y)$.

Предположим теперь, что g — неединичный элемент из подгруппы U . Тогда $a \in H$ и хотя бы один из элементов a или k отличен от 1. Если $a \neq 1$, то поскольку группа A финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа X конечного индекса, не содержащая элемента a . Тогда при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элемент g не будет входить в подгруппу $R = XD_1$, и потому $g\theta(X, Y) \neq 1$. Если $k \neq 1$, то к аналогичному утверждению мы придем, выбрав в (финитно аппроксимируемой) группе B нормальную подгруппу конечного индекса Y , не

содержащую элемента $k\tau^{-1}$, и произвольную нормальную подгруппу X конечного индекса группы A .

Случай, когда элемент g принадлежит подгруппе N и не входит в подгруппу V или отличен от 1, рассматривается аналогично, и утверждения 1) и 2) доказаны. Утверждение 3) выводится из утверждения 2) точно так же, как и в доказательстве предложения 10.1.

Предложение 11.2. *Для любых элементов f и g группы M , не сопряженных в этой группе, в группах A и B существуют нормальные подгруппы конечного индекса X и Y такие, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $M\theta(X, Y)$. Аналогичное утверждение справедливо для группы N .*

Доказательство. Пусть $f = a_1x$ и $g = a_2y$ для подходящих элементов $a_1, a_2 \in A$ и $x, y \in K_1$. Если элементы a_1 и a_2 не сопряжены в группе A , то поскольку эта группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности, в ней найдется такая нормальная подгруппа X конечного индекса, что элементы a_1X и a_2X не сопряжены в фактор-группе A/X . Тогда при любом выборе нормальной подгруппы Y конечного индекса группы B элементы a_1R и a_2R не сопряжены в фактор-группе $M/R = A/X \times K_1/D_1$.

Если элементы a_1 и a_2 сопряжены в группе A , то поскольку элементы f и g не сопряжены в группе M , имеем $x \neq y$. Поэтому можно выбрать подгруппу Y группы B так, чтобы $xD_1 \neq yD_1$. Очевидно, что тогда при произвольной подгруппе X группы A элементы a_1R и a_2R не будут сопряжены в фактор-группе M/R . Предложение 11.2 доказано.

Переходя теперь непосредственно к доказательству теоремы 11, предположим, что f и g — произвольные элементы группы G , не сопряженные в этой группе. Покажем, что в группах A и B существуют такие нормальные подгруппы X и Y конечного индекса, что образы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ элементов f и g не сопряжены в группе $G(X, Y)$.

Без потери общности можно считать элементы f и g циклически

несократимыми. Если их длины различны, то искомые подгруппы X и Y можно получить, выбрав их в соответствии с предложением 11.1 так, чтобы $l(f\theta(X, Y)) = l(f)$ и $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$. Действительно, поскольку тогда элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ группы $G(X, Y)$ являются циклически несократимыми, из предложения 8.1 будет следовать, что не сопряжены в этой группе.

Если $l(f) = l(g) = 1$ и оба элемента f и g лежат в одной из подгрупп M или N , то поскольку они не сопряжены в этой подгруппе, из предложения 11.2 следует существование таких подгрупп X и Y , что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не сопряжены в соответствующей подгруппе $M\theta(X, Y)$ или $N\theta(X, Y)$ группы $G(X, Y)$. Так как объединяемые подгруппы в разложении каждой из групп G и $G(X, Y)$ в свободное произведение являются центральными в сомножителях, здесь применимо предложение 8.3, из которого и следует, что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не сопряжены в группе $G(X, Y)$. Если же элементы f и g не принадлежат одной и той же подгруппе M или N (но каждый из них принадлежит одной из этих подгрупп), то из предложения 11.1 следует существование таких подгрупп X и Y , что каждый из элементов $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ принадлежит одной из подгрупп $M\theta(X, Y)$ или $N\theta(X, Y)$, но они не лежат в одной и той же из этих подгрупп. Поэтому в силу предложения 8.3 эти элементы не являются сопряженными в группе $G(X, Y)$.

Пусть, наконец, $l(f) = l(g) = r > 1$ и пусть $g_1, g_2, \dots, g_r$ — все циклические перестановки элемента g . Так как элемент f не совпадает ни с одним из элементов $g_1, g_2, \dots, g_r$ и группа G финитно аппроксимируема, то в ней найдется нормальная подгруппа Z конечного индекса, по модулю которой элемент f отличен от каждого из элементов $g_1, g_2, \dots, g_r$. Полагаем $X_1 = A \cap Z$ и $Y_1 = B \cap Z$. Поскольку естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/Z проходит через гомоморфизм $\theta(X_1, Y_1)$, элемент $f\theta(X_1, Y_1)$ не совпадает ни с одним из элементов $g_1\theta(X_1, Y_1), g_2\theta(X_1, Y_1), \dots, g_r\theta(X_1, Y_1)$.

Выберем еще в соответствии с предложением 11.1 в группах A

и B нормальные подгруппы конечного индекса X_2 и Y_2 так, чтобы $l(f\theta(X_2, Y_2)) = l(g\theta(X_2, Y_2)) = r$, и положим

$$X = X_1 \cap X_2 \quad \text{и} \quad Y = Y_1 \cap Y_2.$$

Тогда в группе $G(X, Y)$ имеем $l(f\theta(X, Y)) = l(f)$, $l(g\theta(X, Y)) = l(g)$, элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ циклически несократимы и элемент $f\theta(X, Y)$ не совпадает ни с одним элементом $g_1\theta(X_1, Y_1)$, $g_2\theta(X_1, Y_1)$, $\dots$, $g_r\theta(X_1, Y_1)$. Так как произвольная циклическая перестановка элемента $g\theta(X, Y)$ совпадает, очевидно, с некоторым элементом $g_i\theta(X, Y)$ ($i=1, 2, \dots, r$), из предложения 8.3 следует, что элементы $f\theta(X, Y)$ и $g\theta(X, Y)$ не сопряжены в группе $G(X, Y)$. Теорема 11 доказана.

Литература

1. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Научные труды Ивановск. гос. ун-та. Математика. Выпуск 5. 2002. С. 3 – 5.
2. Безверхний В. Н., Новикова О. А. Решение проблемы пересечения централизаторов элементов для свободного произведения с коммутирующими подгруппами // Известия Тульск. гос. ун-та. Сер. “Математика”. Тула. 2001. Т. 7. С. 21 – 33.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
4. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
5. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 405 – 422.
6. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49 – 60.
7. Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В. Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Известия ВУЗов. Математика. 1987. 12. С. 58 – 59.
8. Новикова О. А. Решение проблемы обобщенной сопряженности для свободного произведения с коммутирующими подгруппами // Чебышевский сборник. Научные труды по математике. Тула. 2001. Т. 2. С. 73 – 78.
9. Ремесленников В. Н. Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. 1969. Т. 8. С. 712 – 725.
10. Ремесленников В. Н. Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085 – 1099.
11. Романовский Н. С. О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324 – 1329.

12. Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Пер. сб-к переводов иностр. статей. 1968. Т. 12, № 1. С. 3 – 36.
13. Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей. М.: Мир, 1985.
14. Allenby R., Gregorac R. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. V. 319. P. 9 – 17.
15. Baumslag G. Free subgroups of certain one-relator groups defined by positive words // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1983. V. 93, № 2. P. 247 – 251.
16. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, № 2. P. 193 – 209.
17. Dyer J. Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. 1980. V. 29, № 1. P. 35 – 51.
18. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. V. 7. P. 29 – 62.
19. Higman G. Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. V. 1. P. 301 – 305.
20. Hurwitz R. D. On the conjugacy problem in a free product with commuting subgroups // Math. Ann. 1976. V. 221. P. 1 – 8.
21. Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503 – 554.
22. Segal D. Decidable properties of polycycle groups // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61. P. 497 – 528.
23. Wong P. C. and Tang C. K. Free products of residually p-finite groups with commuting subgroups // Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series). 1996. V. 19. P. 25 – 28.
24. Логинова Е. Д. О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Международная алгебраическая конференция памяти Д.К.Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт-Петербург, 1997. С. 235 – 236.

25. *Логинова Е. Д.* Фinitная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. ж. 1999. Т. 40, № 2. С. 395 – 407.
26. *Логинова Е. Д.* Фinitная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Научные труды Ивановск. гос. ун-та. Математика. Выпуск 2. 1999. С. 101 – 104.
27. *Логинова Е. Д.* Фinitная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Научные труды Ивановск. гос. ун-та. Математика. Выпуск 3. 2000. С. 47 – 53.
28. *Логинова Е. Д.* Фinitная аппроксимируемость относительно сопряженности свободного произведения групп с коммутирующими и централизованными подгруппами // Иванов. гос. ун-т. Иваново, 2002. 40 с. Деп. в ВИНТИ 12.11.2002, № 1945-B2002.