Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2007 С. 83 – 89

Е. Д. Логинова

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОММУТИРОВАННОГО *HNN*-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Вводится конструкция коммутированного HNN-расширения группы, аналогичная конструкции свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами. Для построенной таким образом группы получен критерий финитной аппроксимируемости.

By analogy with construction of free product with commuting subgroups the construction of commuted HNN-extension is offered and a criterion of residual finiteness of resulting group is given.

УДК 512.543.

1. В монографии [3] была введена конструкция свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами: если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B, то свободное произведение $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K определяется как фактор-группа (обычного) свободного произведения групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта $[H, K]$ подгрупп H и K. Ряд аппроксимационных свойств этой конструкции рассмотрен в работах [1] и [2]; в частности, в [1] показано, что если группы A и B финитно аппроксимируемы и подгруппы H и K неединичны, то группа $G = (A * B;\ [H, K] = 1)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в группах A и B подгруппы H и K являются финитно отделимыми.

В данной работе вводится некоторый аналог этой конструкции для HNN-расширений. Будет показано, что финитная аппроксимируемость соответствующей группы может быть охарактеризована подобным же образом.

Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G. Группу

$$G^* = \left(G, t;\ \left[t^{-1}At, B\right] = 1\right), \tag{1}$$

порождаемую образующими группы G и элементом t и определяемую всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $[t^{-1}at, b] = 1$, где $a \in A$ и $b \in B$ (и, как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y), назовем *коммутированным HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B*.

Строение группы G^*, как и свободного произведения с коммутирующими подгруппами [3], можно описать в терминах стандартных свободных конструкций (т. е. свободного произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения) следующим образом.

Пусть A_1 и B_1 — группы, изоморфные группам A и B соответственно, и пусть $\varphi : A \to A_1$ и $\psi : B \to B_1$ — фиксированные изоморфизмы. Пусть $K = A_1 \times B_1$ — прямое произведение групп A_1 и B_1 и

$$G_1 = (G * K;\ B = B_1, \psi) \tag{2}$$

— свободное произведение групп G и K с подгруппами B и B_1, объединенными относительно отображения ψ. Очевидные преобразования Тице показывают, что группа G^*, заданная представлением (1), изоморфна обычному HNN-расширению

$$\big(G_1, t;\ t^{-1}At = A_1,\ \varphi\big) \tag{3}$$

базовой группы G_1 с проходной буквой t и подгруппами A и A_1, связанными относительно изоморфизма φ.

Отсюда следует, в частности, что группа G естественным образом вложима в группу G^*, а подгруппа, порождаемая в G^* подгруппами $t^{-1}At$ и B, является их прямым произведением.

Очевидно, что если одна из подгрупп A или B является единичной, то группа G^* оказывается обычным свободным произведением группы G и бесконечной циклической группы, порождаемой элементом t. Таким образом, в этом вырожденном случае финитная аппроксимируемость группы G^* имеет место в точности тогда, когда финитно аппроксимируема группа G. В остальных случаях справедлива

Теорема. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, A и B — неединичные подгруппы группы G. Группа*

$$G^* = \big(G, t;\ \big[t^{-1}At, B\big] = 1\big)$$

является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группе G подгруппы A и B финитно отделимы.

Укажем на некоторые следствия этой теоремы. Так как в полициклической группе каждая подгруппа финитно отделима [4] и хорошо известно, что в свободной группе любая конечно порожденная подгруппа финитно отделима, получаем

Следствие 1. *Произвольное коммутированное HNN-расширение полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Следствие 2. *Коммутированное HNN-расширение свободной группы с конечно порожденными связанными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Частный случай утверждения следствия 2, когда связанные подгруппы являются циклическими, имеет отношение к нерешенной до сих пор проблеме, сформулированной Г. Баумслагом [7, вопрос OR8]: будет ли группа, заданная одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$, финитно аппроксимируемой? Г. Баумслаг [5] доказал, что это так, если пересечение множества порождающих, входящих в запись слова u, и множества порождающих, входящих в запись слова v, пусто. Упомянутый частный случай следствия 2 может быть сформулирован следующим образом:

Следствие 3. *Группа G, заданная в системе порождающих a_1, a_2, ... , a_n, t одним определяющим соотношением вида $[t^{-1}ut, v] = 1$, где u и v — слова от порождающих a_1, a_2, ... , a_n, является финитно аппроксимируемой.*

2. Переходя к доказательству теоремы, заметим, что необходимость условий в ее формулировке почти очевидна. Пусть, в самом деле, существует такой элемент $g \in G$, не принадлежащий подгруппе A, что для любой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G имеет место включение $g \in AH$. Если еще b — произвольный неединичный элемент из подгруппы B, то, поскольку $b \notin A_1$, запись коммутатора

$$u = [t^{-1}gt, b] = t^{-1}g^{-1}tbt^{-1}gtb$$

является приведенной в HNN-расширении (3), и потому u — неединичный элемент группы G^*. Легко видеть, с другой стороны, что при любом гомоморфизме группы G^* на конечную группу образ элемента u равен 1, так что группа G^* не является финитно аппроксимируемой. Если теперь элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе B, но принадлежит подгруппе BH для любой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G, рассмотрим коммутатор $v = [a, g]$, где a — произвольный неединичный элемент из подгруппы A_1. Так как запись $v = a^{-1}g^{-1}ag$ элемента группы G_1 является несократимой в ее разложении (2), v — неединичный элемент группы G_1, а потому и группы G^*. Снова очевидно, что этот элемент лежит в ядре каждого гомоморфизма группы G^* на конечную группу.

Доказательство достаточности начнем с нескольких предварительных замечаний. Напомним, прежде всего, что если A и B — изоморфные подгруппы некоторых групп H и K соответственно и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то подгруппы $R \leqslant H$ и $S \leqslant K$ называются (A, B, φ)-совместимыми, если $(A \cap R)\varphi = B \cap S$. Аналогично, если A и B — изоморфные подгруппы некоторой группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то подгруппа N группы G называется (A, B, φ)-совместимой, если $(A \cap N)\varphi = B \cap N$.

Если R и S — (A, B, φ)-совместимые нормальные подгруппы групп H и K, то индуцированное отображение $\overline{\varphi}$, определенное по правилу $(aR)\overline{\varphi} = (a\varphi)S$ $(a \in A)$, является изоморфизмом подгруппы AR/R фактор-группы H/R на подгруппу BS/S фактор-группы K/S. Аналогично, если N — (A, B, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение $\overline{\varphi}$, определенное по правилу $(aN)\overline{\varphi} = (a\varphi)N$ $(a \in A)$, является изоморфизмом подгруппы AN/N фактор-группы G/N на ее подгруппу BN/N.

Напомним также, что семейство $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп некоторой группы X называется фильтрацией, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если U — подгруппа группы X, то фильтрация $\mathcal{N}$ называется U-фильтрацией, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подгруппе U, найдется подгруппа

$N \in \mathcal{N}$ такая, что $x \notin UN$. Если U и V — две подгруппы группы X, то фильтрацию $\mathcal{N}$ будем называть (U, V)-фильтрацией, если она одновременно является и U-фильтрацией, и V-фильтрацией.

Нам понадобится следующий достаточный признак финитной аппроксимируемости HNN-расширения (см., напр., [8]):

Предложение 1. *Пусть X — некоторая группа, U и V — подгруппы группы X и $\varphi : U \to V$ — изоморфизм. Пусть $X^* = (X, t;\ t^{-1}U\,t = V, \varphi)$ — HNN-расширение группы X. Если семейство всех (U, V, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы X является (U, V)-фильтрацией, то группа X^* финитно аппроксимируема.*

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что семейство всех (A, A_1, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G_1 является (A, A_1)-фильтрацией. Начнем с доказательства вспомогательного утверждения.

Лемма. *Для любой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G существует (A, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа H конечного индекса группы G_1 такая, что $G \cap H = M$.*

Доказательство. Пусть M — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Пусть $U = A \cap M$, $V = B \cap M$, $U_1 = U\varphi$ и $V_1 = V\psi$. Тогда $W = U_1V_1$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы K, $A_1 \cap W = U_1$ и $B_1 \cap W = V_1$. В частности, подгруппы M и W являются (B, B_1, ψ)-совместимыми, и мы можем построить свободное произведение

$$G_1(M) = \big(G/M * K/W;\ BM/M = B_1W/W, \overline{\psi}\big) \tag{4}$$

групп G/M и K/W с подгруппами BM/M и BW/W, объединенными относительно индуцированного изоморфизма $\overline{\psi}$. Являясь свободным произведением с объединенной подгруппой двух конечных групп, группа $G_1(M)$ финитно аппроксимируема [6] и потому обладает нормальной подгруппой конечного индекса, имеющей тривиальное пересечение с каждой из подгрупп G/M и K/W. Если H — прообраз этой подгруппы относительно гомоморфизма группы G_1 на группу $G_1(M)$, продолжающего естественные отображения группы G на группу G/M и группы K на группу K/W, то H является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1, причем, как легко видеть, $G \cap H = M$ и $K \cap H = W$. Поскольку

$$A \cap H = A \cap G \cap H = A \cap M = U \quad \text{и} \quad A_1 \cap H = A_1 \cap K \cap H = A_1 \cap W = U_1,$$

подгруппа H является (A, A_1, φ)-совместимой, и лемма доказана.

Используя утверждение леммы и ее доказательство, мы можем теперь доказать требуемое нам

Предложение 2. *Пусть группа G финитно аппроксимируема и ее подгруппы A и B финитно отделимы. Тогда семейство всех (A, A_1, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G_1 является (A, A_1)-фильтрацией.*

Доказательство. Покажем, что для любого неединичного элемента g группы G_1 можно найти в группе G нормальную подгруппу M

конечного индекса и построить по ней, как в лемме, такую (A, A_1, φ)-совместимую подгруппу H конечного индекса группы G_1, что $g \notin H$, а если, сверх того, $g \notin A$ или $g \notin A_1$, то подгруппы M и H можно выбрать так, чтобы $g \notin AH$ или $g \notin A_1H$ соответственно. Понятно, что тем самым предложение 2 будет доказано.

Пусть $g = x_1x_2\cdots x_n$ — несократимая запись элемента g в разложении (2) группы G_1, и предположим сначала, что $n = 1$, т. е. элемент g лежит в одном из свободных множителей G или K группы G_1.

Если $g \in G$, то, поскольку $g \neq 1$ и группа G финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа M конечного индекса, не содержащая элемента g. Тогда gM является неединичным элементом фактор-группы G/M, и поскольку в группе $G_1(M)$ имеет место равенство

$$G/M \cap A_1W/W = G/M \cap K/W \cap A_1W/W = B_1W/W \cap A_1W/W = 1$$

(здесь и ниже мы используем обозначения из доказательства леммы), элемент gM финитно аппроксимируемой группы $G_1(M)$ не принадлежит ее конечной подгруппе A_1W/W. Поэтому в группе $G_1(M)$ существует нормальная подгруппа конечного индекса, имеющая тривиальное пересечение с каждой из подгрупп G/M и K/W, по модулю которой элемент gM отличен от всех элементов подгруппы A_1W/W. Если, как в доказательстве леммы, H — ее прообраз в группе G_1, то H является (A, A_1, φ)-совместимой нормальной подгруппой конечного индекса группы G_1, и легко видеть, что $g \notin A_1H$ (и тем более $g \notin H$).

Если элемент g не принадлежит подгруппе A, воспользовавшись финитной отделимостью подгруппы A, выберем подгруппу M так, чтобы $g \notin AM$. Если H — произвольная (A, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G_1, построенная в лемме по подгруппе M, то, поскольку $G \cap H = M$, нетрудно видеть, что $g \notin AH$.

Пусть теперь элемент g принадлежит подгруппе K и не входит в подгруппу G. Тогда $g = a_1b_1$, где $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$ и $a_1 \neq 1$. Выберем подгруппу M так, чтобы в нее не входил элемент $a = a_1\varphi^{-1}$. Тогда элемент a_1 не входит в подгруппу U_1, и потому элемент gW группы K/W не принадлежит подгруппе B_1W/W. Следовательно, этот элемент не принадлежит подгруппе AM/M группы $G_1(M)$, и для построения (A, A_1, φ)-совместимой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G_1 такой, что $g \notin AH$, достаточно теперь в группе $G_1(M)$ взять нормальную подгруппу конечного индекса, которая тривиально пересекается с каждой из подгрупп G/M и K/W и по модулю которой элемент gW отличен от всех элементов подгруппы AM/M. Если элемент g не принадлежит подгруппе A_1, то $b_1 \neq 1$, и подгруппу M можно аналогичным образом выбрать так, чтобы $b_1 \notin V_1$, а потому $gW \notin A_1W/W$. Существование (A, A_1, φ)-совместимой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G_1 такой, что $g \notin A_1H$, теперь очевидно.

Рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, можно показать, что для любого конечного множества элементов k_1, k_2, ... , k_r группы K, не принадлежащих подгруппе B_1, существует нормальная подгруппа M конечного индекса группы G такая, что в группе K/W элементы k_1W, k_2W, ... , k_rW не принадлежат подгруппе B_1W/W. Аналогично, если g_1, g_2, ... , g_s — произвольное конечное множество элементов группы G, не принадлежащих подгруппе B, то в силу финитной отделимости этой подгруппы существует нормальная подгруппа M конечного индекса группы G такая, что в группе G/M элементы g_1M, g_2M, $\ldots$, g_sM не принадлежат подгруппе BM/M. Из этого замечания следует, что если длина n несократимой записи $g = x_1x_2 \cdots x_n$ элемента g больше 1, то для подходящей нормальной подгруппы M конечного индекса группы G длина несократимой записи в группе $G_1(M)$ образа $\overline{g}$ элемента g также равна n, и потому элемент $\overline{g}$ не принадлежит свободным множителям G/M и K/W этой группы. Рассуждая теперь так же, как выше, можно показать существование такой (A, A_1, φ)-совместимой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G_1, что $g \notin GH$ и $g \notin KH$, а потому $g \notin AH$ и $g \notin A_1H$. Предложение 2 доказано, и этим, как отмечено выше, завершается доказательство теоремы.

Библиографический список

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 395—407.
2. *Логинова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 47—53.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.
5. *Baumslag G.* Free subgroups of certain one-relator groups defined by positive words // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1983. Vol. 93. № 2. P. 247—251.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
7. *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory: Second edition. Providence, 2002. 38 p. (Contemp. Math.; Vol. 296) (http://www.grouptheory.org).
8. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179—194.