СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VIII, № 6 | Ноябрь — Декабрь | 1967 г.

УДК 519.4

Д. И. МОЛДАВАНСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Введение

Группы с одним определяющим соотношением явились предметом многочисленных исследований, и о них известен ряд интересных результатов (см., например, ([1])), из которых наиболее важными являются принадлежащие Магнусу решение проблемы тождества и теорема о свободе. Менее изучен вопрос о подгруппах этих групп. Насколько известно автору, кроме упомянутой теоремы Магнуса о свободе здесь имеется только результат Баумслага ([2]) о свободе 2-порожденных подгрупп одного свободного произведения свободных групп с объединенной подгруппой и исследование Мурасуги ([3]) центра группы с одним определяющим соотношением. Сюда же можно отнести и работу ([4]), из которой, в частности, следует, что абелева подгруппа группы с одним определяющим соотношением, содержащая элементы конечного порядка, является конечной циклической.

В настоящей работе мы покажем, что всякая абелева подгруппа группы с одним определяющим соотношением является либо конечной циклической, либо свободной абелевой группой ранга 2, либо группой без кручения ранга 1. При доказательстве этого факта используется описание абелевых подгрупп свободных произведений с объединенной подгруппой; этот результат, по-видимому, представляет самостоятельный интерес. В § 1 устанавливается, что если коммутант группы с одним определяющим соотношением конечно порожден, то он является свободной группой. Группы с конечно порожденным коммутантом эффективно выделяются в классе всех групп с одним определяющим соотношением и являются финитно аппроксимируемыми.

§ 1. Группы С конечно порожденным коммутантом

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — неабелева группа с одним определяющим соотношением и пусть коммутант ее G' является конечно порожденной группой. Тогда* 1) *G' — свободная группа;* 2) *число образующих группы G равно двум;* 3) *всякий нормальный делитель H группы G, фактор-группа G/H по которому бесконечная циклическая, является свободной группой конечного ранга.*

Идея, лежащая в основе наших рассуждений, по-видимому, принадлежит Магнусу и неоднократно использовалась разными авторами (см., например, ([3, 4])).

Пусть группа G задается образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ и определяющим соотношением $R(a_i) = 1$. Здесь $R(a_i)$ — отличное от единицы слово в свободной группе с образующими $a_1, \ldots, a_n$; мы будем называть его определяющим словом. Мы предположим, что $R(a_i)$ циклически несократимо (т. е. несократимы все его циклические перестановки) и что сумма показателей по a_1 в слове $R(a_i)$ равна нулю.

Если H — нормальный делитель группы G, порожденный элементами $a_2, \ldots, a_n$, то фактор-группа G / H является, очевидно, бесконечной циклической, и в качестве представителей смежных классов группы G по подгруппе H можно выбрать различные степени элемента a_1. Система представителей

$$a_1{}^j \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

является шрейеровской, и ее можно использовать для получения образующих и определяющих соотношений группы H при помощи обычной процедуры Рейдемейстера — Шрейера (см., например, ([5])).

Подгруппа H порождается элементами s_{ij} $(i = 2, \ldots, n;\ j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$, причем вложение H в G осуществляется посредством равенств

$$s_{ij} = a_1{}^j a_i a_1{}^{-j} \quad (i = 2, \ldots, n;\ j = 0, \pm 1, \ldots).$$

Тогда произвольное слово $V(a_i)$, представляющее элемент из H, можно переписать в образующих s_{ij} следующим образом: каждое вхождение символа $a_i{}^\varepsilon$ заменяется вхождением символа s^{ε}_{ij}, где $a_1{}^j$ является представителем смежного класса, содержащего начальный отрезок слова $V(a_i)$, предшествующий заменяемому символу $a_i{}^\varepsilon$ $(i = 2, \ldots, n;\ \varepsilon = \pm 1)$.

Если теперь для каждого целого k результат переписывания слова $a_1{}^k R(a_i) a_1{}^{-k}$ обозначить через $R_k(s_{ij})$, то определяющими соотношениями группы H являются равенства

$$R_k(s_{ij}) = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Легко видеть, что все определяющие слова $R_k(s_{ij})$ циклически несократимы, и если символ a_1 входит в определяющее слово $R(a_i)$, то длина каждого $R_k(s_{ij})$ меньше длины $R(a_i)$ (здесь имеется в виду обычное определение длины в соответствующей свободной группе).

s_i-Символы (т. е. s-символы, первый индекс у которых равен i) входят в определяющие слова $R_k(s_{ij})$ тогда и только тогда, когда соответствующий символ a_i входит в определяющее слово $R(a_i)$. Обозначим через m_i и M_i соответственно наименьшее и наибольшее значения второго индекса у s_i-символов, входящих в определяющее слово $R_0(s_{ij})$. Если же s_i-символ не входит в $R_0(s_{ij})$, то полагаем $m_i = M_i = 0$. Очевидно, что тогда в определяющее слово $R_k(s_{ij})$ входят лишь те s_i-символы, второй индекс j у которых удовлетворяет неравенствам

$$m_i + k \leqslant j \leqslant M_i + k \quad (i = 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Для каждого целого числа k определяем абстрактную группу $H^{(k)}$: образующими ее берутся все s_i-символы, второй индекс у которых удовлетворяет соответствующим неравенствам из (1), определяющее соотношение ее $R_k(s_{ij}) = 1$. Мы получаем, таким образом, счетное множество изоморфных групп с одним определяющим соотношением. Из дальнейшего будет следовать, что все они являются подгруппами группы H.

Те образующие группы $H^{(k)}$, которые являются образующими и группы $H^{(k+1)}$, составляют собственную часть множества образующих, входящих в $R_k(s_{ij})$, так как среди них нет образующих $s_{i(m_i+k)}$ $(i = 2, \ldots, n)$. Из теоремы Магнуса о свободе (см., например, ([6]), стр. 272) следует, что эти образующие свободно порождают в группе $H^{(k)}$ свободную подгруппу, скажем, F_k. Аналогично, они являются свободными образующими порожденной ими подгруппы в $H^{(k+1)}$; ее мы также обозначаем через F_k. Отметим, что ранг группы F_k равен

$$\sum_{i=2}^{n} (M_i - m_i)$$

(единичную группу мы считаем свободной группой ранга 0).

Объединяя образующие и определяющие соотношения групп $H^{(k)}$ и $H^{(k+1)}$, мы получаем, следовательно, группу, которая является свободным произведением групп $H^{(k)}$ и $H^{(k+1)}$ с объединенной свободной подгруппой F_k. (Если группа G является свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H, мы будем коротко писать $G = A \underset{H}{*} B$.)

Свойства свободных произведений с объединенной подгруппой (см., например, ([6])) позволяют индуктивно определить следующую последовательность групп H_k $(k \geqslant 0)$.

Мы полагаем

$$H_0 = H^{(0)}, \tag{2}$$

и если H_k уже определена, то

$$H_{k+1} = \begin{cases} H_k \underset{F_t}{*} H^{(t+1)}, & \text{если } k = 2t; \\ H^{(-t-1)} \underset{F_{-t-1}}{*} H_k, & \text{если } k = 2t+1. \end{cases} \tag{3}$$

Группы H_k образуют возрастающую цепочку с очевидными вложениями, и легко видеть, что объединение групп этой цепочки совпадает с H:

$: H = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$.

Мы будем различать следующие случаи:

А) $H^{(0)} \neq F_{-1}$, $H^{(0)} \neq F_0$. Нетрудно видеть, что в этом случае для каждого $k > 0$ разложение (3) группы H_k является истинным свободным разложением с объединением (т. е. каждый сомножитель отличен от объединяемой подгруппы).

Б) $H^{(0)} = F_{-1}$, $H^{(0)} \neq F_0$ (или симметрично $H^{(0)} \neq F_{-1}$, $H^{(0)} = F_0$). H является объединением (строго) возрастающей цепочки свободных групп $F_{-t}(F_t)$, $t = 1, 2, \ldots$.

В) $H^{(0)} = F_{-1} = F_0$. В этом случае $H = H^{(0)}$ — свободная группа конечного ранга.

Лемма 1. *Пусть группа K задается образующими $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(m \geqslant 2)$ и определяющим соотношением $S(b_i) = 1$, где $S(b_i)$ циклически несократимо. Образующий b_j тогда и только тогда входит в подгруппу, порожденную всеми остальными образующими b_i $(i \neq j)$, когда определяющее слово $S(b_i)$ имеет вид*

$$S(b_i) = S_1(b_i) b_j^{\varepsilon} S_2(b_i),$$

где $\varepsilon = \pm 1$, а слова $S_1(b_i)$, $S_2(b_i)$ не содержат вхождений b_j.

Доказательство. Образующие b_i $(i \neq j)$, ввиду теоремы Магнуса, являются свободными образующими порожденной ими подгруппы. Если b_j входит в эту подгруппу, то в K имеет место равенство $b_j = u$, где u — подходящий элемент K, записанный в образующих b_i $(i \neq j)$. Если теперь в слове $S(b_i)$ заменить каждое вхождение b_j элементом u, получим слово в образующих b_i $(i \neq j)$, равное единице в группе K и, следовательно, свободно равное единице. Таким образом, соотношение $S(b_i) = 1$ является следствием соотношения $b_j u^{-1} = 1$.

Значит, в свободной группе с образующими $b_1, b_2, \ldots, b_m$ слова $S(b_i)$ и $b_j u^{-1}$ порождают один и тот же нормальный делитель. По теореме Магнуса (см. [6]) они сопряжены, с точностью до перехода к обратному. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть группа G такая, как выше, и число образующих G $n \geqslant 3$. Тогда для $H^{(0)}$ всегда имеет место случай A).*

Действительно, пусть, например $H^{(0)} = F_0$. Это означает, что $s_{im_i} \in F_0$ $(i = 2, \ldots, n)$, т. е., в частности, s_{2m_2} входит в подгруппу, порожденную всеми остальными образующими.

Ввиду леммы 1, $H^{(0)}$ является тогда свободной группой ранга

$$(M_2 - m_2) + \sum_{i=3}^{n} (M_i - m_i + 1),$$

тогда как ранг F_0 равен $\sum_{i=2}^{n} (M_i - m_i)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Прежде всего отметим, что предположение о том, что сумма показателей по одному из образующих в определяющем слове равна нулю, не уменьшает степени общности.

Действительно, пусть дана группа K с образующими $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(m \geqslant 2)$ и определяющим соотношением $S(b_1, b_2, \ldots, b_m) = 1$. Пусть, далее, сумма показателей по b_1 в определяющем слове $S(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ равна p, а по b_2 — q, и пусть $p \geqslant q > 0$ (если, например, $p < 0$, то при помощи преобразований Тице ([6]) заменим образующий b_1 на b_1^{-1}). Тогда, если $p = qs + r$, $0 \leqslant r < q$, введем новый образующий y и определяющее соотношение $y = b_1^s b_2$. Используя преобразования Тице, находим, что K порождается элементами $b_1, y, \ldots, b_m$ и определяется соотношением

$S(b_1, b_1^{-s}y, \ldots, b_m) = 1$, в левой части которого сумма показателей по b_1 равна r, а по y — q. При помощи очевидной индукции видим, что произвольную группу с одним определяющим соотношением можно представить такими образующими и определяющим соотношением, что сумма показателей в определяющем слове по каждому образующему, кроме, быть может, одного, равна нулю.

Итак, пусть группа G такая, как выше, и коммутант ее G' является конечно порожденной группой. Имеем $G' \subseteq H$, так как фактор-группа G / H абелева, и, более того, $G' \subseteq H_k$ для некоторого k, так как G' — конечно порожденная подгруппа. Пусть имеет место случай А). Тогда $H_{k+1} = H_k \underset{F_t}{*} H^{(t+1)}$, если $k = 2t$ (случай нечетного k совершенно аналогичен), и H_{k+1} является здесь истинным свободным произведением с объединенной подгруппой. Следовательно, найдутся элементы u, v такие, что $u \in H_k$, $v \in H^{(t+1)}$ и u, v не входят в объединяемую подгруппу F_t. Из свойств свободных произведений с объединенной подгруппой следует, что коммутатор $u^{-1}v^{-1}uv$ не входит в $H_{(k)}$, что противоречит выбору k.

Таким образом, случай А) невозможен, а так как в оставшихся случаях Б) и В) H является локально свободной группой, утверждение 1) теоремы 1 доказано. Утверждение 2) следует из леммы 2. Далее покажем, что не может иметь места и случай Б); отсюда будет следовать 3).

Если H является объединением возрастающей цепочки F_k $(k > 0)$ свободных групп ранга $d > 1$ и $G' \subseteq F_k$ для подходящего k, то в свободной группе F_{k+1} имеется конечно порожденная подгруппа F_k, содержащая нетривиальный нормальный делитель (даже коммутант) группы F_{k+1}. Отсюда (см. (7)) F_k имеет конечный индекс, скажем j, в F_{k+1}, и из известного соотношения ((6), стр. 231) имеем $d = 1 + j(d-1)$, откуда $j = 1$ и $F_k = F_{k+1}$.

Пусть H является объединением возрастающей цепочки циклических групп. Из леммы 1 легко следует, что определяющее слово группы $H^{(0)}$, с точностью до циклических перестановок и взятия обратного, имеет вид $s_{2m_1}s^c_{2(m_1+1)}$ или $s^c_{2m_1}s_{2(m_1+1)}$, где $|c| > 1$. Тогда определяющее слово группы G имеет вид $a_2a_1a_2^ca_1^{-1}$ или $a_2^ca_1a_2a_1^{-1}$.

Итак, группа G задается образующими a_1, a_2 и определяющим соотношением $a_2a_1a_2^ca_1^{-1} = 1$ (второе соотношение определяет изоморфную группу). Фактор-группа G / G' является прямым произведением бесконечной циклической группы и циклической порядка $|c+1|$. Из того, что G / H бесконечная циклическая и $(G / G') / (H / G') \cong G / H$, следует, что H / G' циклическая порядка $|c+1|$, и поэтому G' не является конечно порожденной группой. Следовательно, случай Б) также невозможен.

Наконец, покажем, что всякий нормальный делитель N группы G, фактор-группа по которому бесконечная циклическая, можно получить указанным способом. Более точно, существует система образующих $a_1', \ldots, a_n'$ группы G, связанных определяющим соотношением $R'(a_1', \ldots, a_n') = 1$, такая, что N является нормальным замыканием в группе G элементов $a_2', \ldots, a_n'$.

Пусть, в самом деле, бесконечная циклическая группа G/N порождается элементом t. Не все образующие a_i группы G лежат в N. Если при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу G/N образующий a_i отображается на t^p, а a_j — на t^q $(i \neq j)$ и $p \geqslant q > 0$, $p = qs + r$, $0 \leqslant r \leqslant q$, то элемент $y = a_i a_j^{-s}$ отображается на t^r. Мы присоединяем y к системе образующих группы G и удаляем из нее a_i. После конечного числа таких преобразований получим представление группы G образующими $a_1', \ldots, a_n'$ и определяющим соотношением $R'(a_1', \ldots, a_n') = 1$, причем $a_1' \notin N$, $a_i' \in N$ $(i = 2, \ldots, n)$. Если сумма показателей по a_1' в слове $R'(a_1', \ldots, a_n')$ равна d, то ${a_1'}_p$ входит в нормальный делитель H группы G, порожденный элементами $a_2', \ldots, a_n'$, и так как $H \subseteq N$, $d = 0$. Теперь из того, что фактор-группа G/H бесконечная циклическая и $G/N \cong (G/H)/(N/H)$, следует $N = H$. Это доказывает последнее утверждение, а вместе с ним и теорему 1.

Следствие 1. *Если коммутант группы G с одним определяющим соотношением является конечно порожденной группой, то группа G финитно аппроксимируема* *.

Действительно, G является полупрямым произведением бесконечной циклической группы на нормальный делитель H — свободную группу конечного ранга. Так как свободные группы финитно аппроксимируемы, наше утверждение следует из теоремы 1 работы (8).

Следствие 2. *Пусть G — группа, заданная образующими a и b и определяющим соотношением $R(a, b) = 1$, причем сумма показателей по a в определяющем слове $R(a, b)$ равна 0. Коммутант G' группы G конечно порожден тогда и только тогда, когда сумма показателей по b в определяющем слове $R(a, b)$ отлична от нуля и нормальный делитель H, порожденный элементом b, является свободной группой конечного ранга.*

Доказательство. Пусть сумма показателей по b в определяющем слове $R(a, b)$ равна d. Тогда фактор-группа G/G' является прямым произведением двух бесконечных циклических групп, если $d = 0$, и прямым произведением бесконечной циклической и циклической порядка $|d|$, если $d \neq 0$. Далее, так как G/H бесконечная циклическая и $(G/G')/(H/G') \cong G/H$, H/G' является бесконечной циклической, если $d = 0$, и циклической порядка $|d|$, если $d \neq 0$.

Пусть теперь G' — конечно порожденная подгруппа. Тогда H — свободная группа конечного ранга, ввиду теоремы 1, и G' — конечно порожденная подгруппа в H, содержащая коммутант группы H. Поэтому G' должна иметь конечный индекс в H и, следовательно, $d \neq 0$. Обратно, если $d \neq 0$, то G' имеет конечный индекс $|d|$ в свободной группе H конечного ранга; следовательно, G' — конечно порожденная подгруппа.

Ясно, что полученные результаты (теорема 1, следствие 2 и лемма 1) позволяют эффективно проверить, является ли коммутант группы с одним определяющим соотношением конечно порожденной группой, и, если ответ положительный, найти ранг его.

* Отметим существование группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами (см. (18)).

§ 2. Абелевы подгруппы групп с одним определяющим соотношением

В этом параграфе мы найдем некоторые необходимые условия вложимости абелевой группы в группу с одним определяющим соотношением. Для этого нам потребуется следующая характеристика абелевых подгрупп свободных произведений с объединенной подгруппой.

Теорема 2. *Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H. Всякая абелева подгруппа группы G сопряжена или с подгруппой из A или B, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы (возможно, тривиальной) из H, или является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из H.*

Доказательство. Выберем в группах A и B системы представителей правых смежных классов по подгруппе H, причем представителем H в обоих случаях выбираем единицу группы G. Хорошо известно (см., например, ([6])), что для каждого элемента $u \in G$ имеется единственное представление в так называемой нормальной форме

$$u = hs_1 \ldots s_n \quad (n \geqslant 0), \tag{4}$$

где $h \in H$, s_i — представитель из A или B, отличный от 1 $(i = 1, \ldots, n)$, и представители s_i, s_{i+1} не лежат в одной и той же группе A или B $(i = 1, \ldots, n-1)$. Число $n \geqslant 0$ называется длиной u и обозначается через $l(u)$. $l(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in H$. Назовем элемент u *циклически неприводимым*, если $l(u) = n \geqslant 2$ и s_1 и s_n не лежат в одной группе A или B.

Лемма 3. *Пусть (4) — нормальная форма элемента $u \in G$ и $l(u) \geqslant 2$. Тогда либо u сопряжен с некоторым циклическим неприводимым элементом, либо однозначно представим в виде*

$$u = v^{-1}gv, \tag{5}$$

где $l(g) = 1$, нормальная форма v есть $r_1 \ldots r_k$ $(k \geqslant 1)$, r_i — представитель $(i = 1, \ldots, k)$ и r_1 и g не лежат, а r_k и s_n лежат в одной и той же группе A или B.

Доказательство. Утверждение очевидно, если $l(u) = 2$. Пусть $l(u) = n \geqslant 3$. Если s_1 и s_n не лежат в одной группе A или B, то u циклически неприводим. Пусть s_1 и s_n лежат в одной подгруппе. Тогда длина элемента

$$u' = s_n u s_n^{-1} = s_n h s_1 \ldots s_{n-1}$$

не превосходит $n - 1$ и нормальная форма его оканчивается представителем s_{n-1}. По индуктивному предположению u' либо сопряжен циклически неприводимому, либо представим в виде (5): $u' = v^{-1}gv$, где последний представитель из v лежит в одной группе с s_{n-1}. Отсюда $u = v'^{-1}gv'$, где $v' = vs_n$, является представлением u в виде (5). Однозначность представления легко вытекает из единственности нормальной формы.

Лемма 4. *Если абелева подгруппа C группы G содержит циклически неприводимый элемент, то C является прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из H.*

Доказательство. Пусть снова (4) — нормальная форма элемента $u \in C$, где $n > 1$ и s_1, s_n не лежат в одной группе A или B. Если v — произвольный элемент из C, то, используя перестановочность u и v, легко видеть, что или $l(v) = 0$, или $l(v) > 1$ и v циклически неприводим.

Предположим, далее, что u имеет наименьшую ненулевую длину в C и нормальная форма произвольного элемента $v \in C$, $v \notin H$ есть

$$v = h_1 r_1 \ldots r_m \qquad (m \geqslant n, \quad h_1 \in H).$$

Мы сейчас индукцией по m докажем существование такого целого числа k, что v и u^k лежат в одном и том же смежном классе группы C по подгруппе $C \cap H$. Имеем

$$hs_1 \ldots s_n h_1 r_1 \ldots r_m = h_1 r_1 \ldots r_m h s_1 \ldots s_n.$$

Можно считать, что s_n и r_1 не лежат в одной группе A или B (в противном случае вместо v нужно взять v^{-1}). Отсюда следует, что после приведения к нормальной форме обеих частей указанного равенства представители, стоящие после h_1 в левой части и после h — в правой, останутся неизменными. Поэтому имеем $r_{m-n+i} = s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, что при $m = n$ дает $uv^{-1} \in H$ — основание индукции. Если же $m > n$, то $vu^{-1} = h_1 r_1 \ldots \ldots r_{m-n} h^{-1}$ и $l(vu^{-1}) = m - n$. По индуктивному предположению, $vu^{-1} = h_2 u^k$, откуда $v = h_2 u^{k+1}$, $h_2 \in H$.

Итак, фактор-группа $C / C \cap H$ является бесконечной циклической, откуда следует, что C есть прямое произведение подгруппы $C \cap H$ и бесконечной циклической группы.

Пусть теперь C — произвольная абелева подгруппа группы G. Если C содержит элемент, сопряженный циклически неприводимому, то, перейдя, если нужно, к сопряженной подгруппе, оказываемся в условиях леммы 4.

Предположим, что каждый элемент из C, длины большей, чем 1, представим в виде (5) (если таких нет, то доказывать нечего). Тогда

Лемма 5. *Если $g, u \in C$, $l(g) \leqslant 1$, $u = v^{-1} g_1 v$ — представление в виде (5), то $l(vgv^{-1}) = 0$.*

Действительно, из $gv^{-1}g_1v = v^{-1}g_1vg$ следует, что $vgv^{-1} \cdot g_1 \cdot vg^{-1}v^{-1} = g_1$. Если $l(vgv^{-1}) \geqslant 1$, то, как легко видеть, нормальная форма элемента vgv^{-1} начинается и кончается в той же группе, где начинается v, а значит, не в той, где лежит g_1. Тогда длина левой части последнего равенства не меньше трех, в то время, как длина правой — единица.

Далее, пусть $u_1, u_2 \in C$ имеют длину больше единицы и $u_1 = v_1^{-1} g_1 v_1$, $u_2 = v_2^{-1} g_2 v_2$ — представления их в виде (5). Тогда

Лемма 6. *Если $v_1 = s_1 \ldots s_n$, $v_2 = r_1 \ldots r_m$ и $m \geqslant n$, то $s_i = r_{m-n+i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Иначе говоря, $v_1 = v_2$, если $m = n$, и $v_2 = v_2' v_1$, если $m > n$. В последнем случае $l(v_2' g_1 v_2'^{-1}) = 0$.*

Действительно, если существует такое k, что $s_k \neq r_{m-n+k}$ и $s_i = r_{m-n+i}$ $(k = 1, \ldots, n-1, \ i = k+1, \ldots, n)$, или если $s_n \neq r_m$, то в равенстве

$$v_1^{-1} g_1 v_1 \cdot v_2^{-1} g_2 v_2 = v_2^{-1} g_2 v_2 \cdot v_1^{-1} g_1 v_1$$

после приведения левой и правой части к нормальной форме останутся неизменными v_2 в конце левой и v_1 в конце правой части, что противоречит нашему допущению. Последнее утверждение из леммы 6 доказывается точно так же, как лемма 5.

Пусть теперь $v_1, v_2, \ldots$ — совокупность всех слов, играющих роль v в представлении элементов из C в виде (5), причем $l(v_1) < l(v_2) < \ldots$. Обозначим через C_j множество всех элементов из C, длина которых не превосходит числа $2l(v_j)+1$. Из лемм 5, 6 легко видеть, что C_j является подгруппой группы C и $C_j \subset C_{j+1}$. Кроме того, из лемм 5, 6 следует, что $v_j C_j v_j^{-1}$ является подгруппой или группы A, или группы B, а $v_{j+1} C_j v_{j+1}^{-1}$ является подгруппой группы H. Если теперь среди элементов v_j есть элемент наибольшей длины, скажем, v_k, то $C = C_k$ сопряжена с подгруппой из A или из B. В противном случае группа C является объединением возрастающей цепочки групп C_j, каждая из которых сопряжена с подгруппой из H. Теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 справедлива для свободного произведения с объединенной подгруппой любого (не обязательно конечного) семейства групп: мы нигде не пользовались тем, что число сомножителей равно двум.

Возникает вопрос, все ли абелевы подгруппы, указанные в теореме 2, могут встречаться в действительности. В общем случае ответ утвердительный, как показывают приведенные ниже примеры; в следующем же частном случае имеем очевидное усиление теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть $G = A \underset{H}{*} B$ и H является нормальным делителем в A и B. Тогда всякая абелева подгруппа группы G сопряжена или с подгруппой из A или B, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из H.*

Примеры. 1) Группа G задается образующими a и b и определяющим соотношением $a^2 = b^2$, т. е. является свободным произведением двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой. Легко видеть, что элементы a^2 и ab порождают в G свободную абелеву группу ранга 2. Отметим, что группа G удовлетворяет условию следствия 1, теоремы 2, которое, таким образом, усилить нельзя.

2) Пусть F_1 — свободная группа с образующими a, b; F_2 — свободная группа с образующими c, d. Обозначим через H_1 подгруппу группы F_1, порожденную элементами a, $b^{-1}ab$, а через H_2 — подгруппу группы F_2, порожденную элементами c, $d^{-1}c^2d$; H_1 и H_2 — свободные группы ранга 2. Далее, устроим свободное произведение G групп F_1 и F_2, объединяя группы H_1 и H_2 в соответствии с изоморфизмом, который отображает a на c и $b^{-1}ab$ на $d^{-1}c^2d$. Группа G, очевидно, порождается элементами a, b, d и определяется соотношением $b^{-1}ab = d^{-1}a^2d$. Введя новый образующий x и определяющее соотношение $x = bd^{-1}$, после очевидных преобразований получим, что группа G является свободным произведением бесконечной циклической группы, порожденной элементом b, и группы P с образующими x, a и определяющим соотношением $x^{-1}ax = a^2$.

Обозначим через Q нормальный делитель группы P, порожденный элементом a. Используя метод Рейдемейстера — Шрейера, найдем, что группа Q задается образующими $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ и определяющими соотношениями $a_i = a^2_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, группа G содержит нециклическую абелеву группу без кручения ранга 1 (см. [6]).

Пусть произвольная группа G содержит изоморфные подгруппы A и B, и φ — изоморфизм A на B. Пусть, далее, группа G_1 порождается образующими группы G и еще одним образующим t и определяется соотношениями G и добавочными соотношениями $tat^{-1} = a\varphi$ для всех $a \in A$. В работе [9] (см. также [6]) доказывается, что группа G_1 содержит группу G в качестве подгруппы. Мы сейчас найдем, используя теорему 2 и следуя доказательству из [9], все абелевы подгруппы группы G_1.

Следствие 2. *Всякая абелева подгруппа группы G_1 сопряжена или с подгруппой из G, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из A или B, или является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из A или B.*

Доказательство. Рассмотрим свободное произведение K_1 группы G и бесконечной циклической группы, порожденной элементом x:

$$K_1 = G * \langle x \rangle. \tag{6}$$

Обозначим через H_1 подгруппу группы K_1, порожденную подгруппами G и $x^{-1}Ax$; H_1 является в действительности свободным произведением групп G и $x^{-1}Ax$:

$$H_1 = G * x^{-1}Ax. \tag{7}$$

Аналогично, пусть $K_2 = G * \langle y \rangle$ и $H_2 = G * y^{-1}By$. Устроим, далее, свободное произведение L групп K_1 и K_2, объединяя подгруппы H_1 и H_2 в соответствии с изоморфизмом, который группу G отображает тождественно на себя, а элемент $x^{-1}ax$ переводит в $y^{-1}a\varphi y$. Тогда в группе L имеется подгруппа G и выполняются равенства

$$x^{-1}ax = y^{-1}a\varphi y, \quad a \in A.$$

Полагая $t = yx^{-1}$, видим, что группа L является свободным произведением группы G_1 и бесконечной циклической группы. Мы покажем, что всякая абелева подгруппа группы L имеет требуемый следствием вид. Для этого нам понадобятся некоторые свойства представителей правых смежных классов группы K_1 по подгруппе H_1 (все рассуждения с очевидными изменениями обозначений переносятся на группу K_2).

Выберем в группе G систему представителей $\{g_\alpha\}$ правых смежных классов по подгруппе A, причем $1 \in \{g_\alpha\}$. Обозначим через S_1 совокупность всех таких элементов $s \in K_1$, которые в разложении (6) имеют несократимую запись вида

$$s = x^{e_1}g_1x^{e_2}\ldots x^{e_n}g_n \quad (n \geqslant 1), \tag{8}$$

где $e_i \neq 0$, $g_i \in G$ $(i = 1, \ldots, n)$, $g_i \neq 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и, кроме того, если $e_1 = -1$, то $g_1 = g_\alpha$ для подходящего α.

Нетрудно проверить, что совокупность элементов $S_1' = S_1 \cup \{1\}$ является полной системой представителей правых смежных классов группы K_1 по подгруппе H_1. S_2' — аналогичная система представителей в группе K_2.

Назовем представитель $s \in S_1$ специальным, если в несократимой записи его (8) $g_n = 1$, и кроме того, если $n > 1$ и $\varepsilon_n = 1$, то $g_{n-1} \notin A$. Ясно, что для любого $s \in S_1$ существует представление $s = s_1 h$, где s_1 — специальный представитель и $h \in H_1$.

Лемма 7. *Если s — специальный представитель и для h, $h_1 \in H_1$ имеем $sh = h_1 s$, то $h \in A$ или $h \in x^{-1}Ax$.*

Доказательство. Пусть

$$h = f_1 x^{-1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1} \qquad (a_i \in A, \quad f_i \in G)$$

— несократимая запись $h \in H_1$, пусть сначала длина s в разложении (6) больше 1 и

$$s = x^{\varepsilon_1} g_1 x^{\varepsilon_2} \ldots g_{n-1} x^{\varepsilon_n}$$

— несократимая запись s. Если тогда $f_1 \neq 1$ или $f_1 = 1$ и $\varepsilon_n \neq 1$, то несократимые записи для sh будут соответственно

$$sh = x^{\varepsilon_1} g_1 x^{\varepsilon_2} \ldots g_{n-1} x^{\varepsilon_n} f_1 x^{-1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x g_{m+1}$$

или

$$sh = x^{\varepsilon_1} g_1 x^{\varepsilon_2} \ldots g_{n-1} x^{\varepsilon_n - 1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1}$$

и в обоих случаях sh является неспециальным представителем.

Если $f_1 = 1$ и $\varepsilon_n = 1$, то несократимой записью sh является

$$sh = x^{\varepsilon_1} g_1 x^{\varepsilon_2} \ldots x^{\varepsilon_{n-1}} g_{n-1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1},$$

и при $n > 2$ sh является представителем: специальным, если длина h в разложении (7) равна 1, и неспециальным в противном случае. Если же $n = 2$, то

$$sh = x^{\varepsilon_1} g_1 a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1}$$

опять является при $\varepsilon_1 \neq 1$ представителем: специальным, если длина h равна 1, и неспециальным в противном случае.

Если же $\varepsilon_1 = -1$ и $g_1 = \bar{g}_\alpha$, то

$$sh = x^{-1} a' x \cdot x^{-1} \bar{g}_\beta x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1} = h_1 s_1,$$

где $\bar{g}_\alpha a_1 = a' \bar{g}_\beta$, $h_1 = x^{-1} a' x \in H_1$, $s_1 = x^{-1} \bar{g}_\beta x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1}$ — представитель: специальный, если длина h равна 1, и неспециальный в противном случае.

Пусть теперь $s = x^{\varepsilon}$ ($\varepsilon \neq 0$), и h определяется как выше. Если $f_1 \neq 1$ и $\varepsilon \neq -1$, то sh является, очевидно, неспециальным представителем. Если же $\varepsilon = -1$ и $f_1 = a \bar{g}_\alpha$ ($a \in A$), то

$$sh = x^{-1} a x \cdot x^{-1} \bar{g}_\alpha x^{-1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1} = h_1 s_1,$$

где $h_1 = x^{-1} a x \in H_1$, $s_1 = x^{-1} \bar{g}_\alpha x^{-1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1}$ — представитель, являющийся специальным только в том случае, когда длина h в разложении (7) равна 1 и $f_1 \in A$.

Пусть, наконец, $f_1 = 1$. Тогда

$$sh = x^{\varepsilon - 1} a_1 x f_2 \ldots x^{-1} a_m x f_{m+1}.$$

и если $e \neq 1$, то sh является неспециальным представителем, так как $e \neq 0$. Если же $e = 1$, то

$$sh = a_1 x f_2 \dots x^{-1} a_m x f_{m+1} = a_1 s_1,$$

где $a_1 \in H_1$, а s_1 — представитель, являющийся специальным лишь в случае, когда длина h в разложении (7) равна 1.

Итак, нами доказано даже, что если s — специальный представитель и $sh = h_1 s_1$, где $h, h_1 \in H_1$, и s_1 — снова специальный представитель, то или $h \in A$, или $h \in x^{-1}Ax$.

Пусть теперь C — произвольная абелева подгруппа группы L. По теореме 2 C сопряжена с подгруппой из K_1 или K_2, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из H $(= H_1 = H_2)$, или является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из H. В первом случае группа C, очевидно, или является бесконечной циклической (умноженной на единичную подгруппу из H), или сопряжена с подгруппой из G.

Напомним, что второй случай имеет место, если подгруппа C (или сопряженная с ней) содержит циклически неприводимый элемент, скажем $u = hs_1 \dots s_n$, где $s_i \in S_j$ $(i = 1, \dots, n,\ j = 1, 2)$ и для определенности $s_n \in S_1$. Можно считать s_n специальным представителем, так как в противном случае, если $s_n = s_n' h'$, где s_n' специальный, мы можем перейти к группе $h' C h'^{-1}$, которая уже удовлетворяет нашему требованию. Если тогда $h_1 \in C \cap H$, то имеем равенство

$$h_1 \cdot h s_1 \dots s_n = h s_1 \dots s_n \cdot h_1,$$

из которого получаем $s_n h_1 = h_2 s_n$, откуда, ввиду леммы 7, следует $h_1 \in A$ или $h_1 \in x^{-1}Ax$.

Значит, каждый элемент из $C \cap H$ находится или в A или в $x^{-1}Ax$. Но так как группа $C \cap H$ абелева и подгруппы A и $x^{-1}Ax$ принадлежат разным сомножителям свободного разложения (7) группы H, мы должны иметь либо $C \cap H \subseteq A$, либо $C \cap H \subseteq x^{-1}Ax$.

Пусть, наконец, имеет место третий случай, т. е. $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ (C_j, v_j имеют то же значение, что и в доказательстве теоремы 2). Тогда мы должны иметь

$$v_{j+1} C_j v_{j+1}^{-1} \subseteq H, \quad v_{j+2} C_j v_{j+2}^{-1} \subseteq H.$$

Если $v_{j+2} = v' v_{j+1}$ и $s \in S_1$ — представитель, которым заканчивается v', то, в частности

$$s (v_{j+1} C_j v_{j+1}^{-1}) s^{-1} \subseteq H.$$

Если, далее $s = s_1 h$, где $h \in H$, s_1 — специальный представитель, то, как и выше, легко установить, что $h v_{j+1} C_j v_{j+1}^{-1} h^{-1} \subseteq A$ или $h v_{j+1} C_j v_{j+1}^{-1} h^{-1} \subseteq x^{-1}Ax$. Это заканчивает доказательство следствия 2, теоремы 2.

В работе [9] показано (теорема IV), что всякая счетная группа вложима в группу с двумя образующими. Просматривая доказательство этой теоремы и применяя теорему 2 и следствие 2 из нее получаем

Следствие 3. *Пусть G — произвольная счетная группа и H — группа с двумя образующими из теоремы* IV *работы* ([9]), *содержащая группу G. Тогда всякая абелева подгруппа группы H или сопряжена с подгруппой группы G, или является свободной абелевой группой ранга* 2, *или является группой без кручения ранга* 1.

Следствие 2 позволяет указать следующее необходимое условие вложимости абелевой группы в группу с одним определяющим соотношением.

Теорема 3. *Всякая абелева подгруппа группы с одним определяющим соотношением является либо конечной циклической, либо свободной абелевой ранга* 2, *либо группой без кручения ранга* 1.

Доказательство проведем индукцией по длине определяющего слова группы G, заданной образующими $a_1, \ldots, a_n$ и определяющим соотношением $R(a_i) = 1$.

Теорема очевидна, если $n = 1$ или длина слова $R(a_i)$ равна 1. Поэтому мы предположим, что число образующих группы G $n \geqslant 2$ и что для всех групп (с одним определяющим соотношением), длина определяющего слова у которых меньше длины $R(a_i)$, теорема верна.

Мы можем считать слово $R(a_i)$ циклически несократимым, так как в противном случае группу G можно задать определяющим словом меньшей длины. Можно также считать, что сумма показателей по a_1 в слове $R(a_i)$ равна нулю (см. § 1) * и что все образующие группы G входят в определяющее слово. В самом деле, если часть образующих входит в определяющее слово, а часть не входит, то группа G разлагается в свободное произведение группы с одним определяющим соотношением, порожденной первыми образующими, и свободной группы, порожденной вторыми. Ясно, что достаточно доказать теорему лишь для первого сомножителя этого разложения.

Пусть снова H — нормальный делитель группы G, порожденный элементами $a_2, \ldots, a_n$; он имеет строение, указанное в § 1, и мы сохраняем все обозначения из § 1, связанные с этим нормальным делителем.

Так как образующий a_1 входит в определяющее слово $R(a_i)$, все слова $R_k(s_{ij})$ короче, чем $R(a_i)$, и всякая абелева подгруппа группы $H^{(0)}$ является по индуктивному предположению или конечной циклической, или свободной абелевой группой ранга 2, или группой без кручения ранга 1.

Далее мы покажем, пользуясь преобразованиями Тице, что группа G почти всегда является группой $H_1^{(0)}$ из следствия 2 теоремы 2.

Присоединим к образующим группы G новые образующие

$$s_{ij} \quad (j = m_i \ldots, M_i; \quad i = 2, \ldots, n) \tag{9}$$

вместе с определяющими соотношениями

$$s_{ij} = a_1^j a_i a_1^{-j} \quad (j = m_i, \ldots, M_i; \; i = 2, \ldots, n). \tag{10}$$

* Доказательство теоремы 3 не является полным, так как ссылка на § 1 в предположении равенства нулю суммы показателей по одному из образующих в определяющем слове не позволяет воспользоваться индуктивным предположением. Оставшийся случай сводится к рассмотренному так же, как и в ([4]).

Образующие (9) порождают в группе G подгруппу $H^{(0)}$ и поэтому соотношение

$$R_0(s_{ij}) = 1 \tag{11}$$

является следствием соотношения $R(a_i) = 1$ и соотношений (10); следовательно, мы можем присоединить (11) к определяющим соотношениям группы G. Из способа получения слова $R_0(s_{ij})$ следует, что если в нем заменить каждое вхождение s-символа правой частью соответствующего равенства из (10), то после, быть может, необходимых сокращений получим слово $R(a_i)$. Таким образом, соотношение $R(a_i) = 1$ является следствием соотношений (10) и (11), и группа G в образующих $a_1, \ldots, a_n$ и (9) определяется соотношениями (10) и (11).

Если для всех $i = 2, \ldots, n$ имеем $m_i = M_i$, то можно удалить образующие a_i $(i = 2, \ldots, n)$ вместе с определяющими соотношениями (10). Группа G в этом случае является свободным произведением бесконечной циклической группы с образующим a_1 и группы $H^{(0)}$, и утверждение теоремы для G выполняется.

Предположим, что для некоторого k $(2 \leqslant k < n)$ после, может быть, необходимой перенумерации $m_i = M_i$, если $2 \leqslant i \leqslant k$, и $m_i < M_i$, если $k < i \leqslant n$ (если такого k нет, т. е. $m_i < M_i$ для всех i, незначительное изменение в дальнейших рассуждениях очевидно).

Соотношения (10) эквивалентны следующим двум группам соотношений:

$$s_{im_i} = a_1^{m_i} a_i a_1^{-m_i} \qquad (i = 2, \ldots, n); \tag{12}$$

$$a_1 s_{ij} a_1^{-1} = s_{i(j+1)} \qquad (j = m_i, \ldots, M_i - 1;\ i = k+1, \ldots, n). \tag{13}$$

Образующие a_i $(i = 2, \ldots, n)$ можно удалить вместе с соотношениями (12); группа G порождается теперь образующими a_1 и (9) и определяется соотношениями (11) и (13), т. е., как легко видеть, получается присоединением к группе $H^{(0)}$ элемента a_1, трансформирующего подгруппу F_{-1} на подгруппу F_0. Таким образом, мы находимся в условиях следствия 2 теоремы 2, и всякая абелева подгруппа группы G сопряжена или с подгруппой из $H^{(0)}$, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из F_{-1} или F_0, или является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из F_{-1} или F_0.

В первом случае мы воспользуемся индуктивным предположением. Группы F_{-1} и F_0 свободны, поэтому во втором случае имеем или бесконечную циклическую группу, или свободную абелеву ранга 2, а в третьем случае — объединение возрастающей цепочки бесконечных циклических групп, т. е. группу без кручения ранга 1. Теорема 3 доказана.

Примеры, приведенные после теоремы 2, показывают также, что существуют группы с одним определяющим соотношением, содержащие или свободную абелеву группу ранга 2, или нециклическую группу ранга 1.

Существуют также группы, содержащие одновременно и ту и другую абелеву подгруппу.

Действительно, рассмотрим группу G из примера (1); G порождается элементами a, b и определяется соотношением $a^2 = b^2$. Из теоремы Хигмена и Нейманов ([9]) следует, что G является подгруппой группы G_1, заданной образующими a, b, t и определяющими соотношениями $a^2 = b^2$, $t^{-1}at = b^2$.

Легко видеть, что группа G_1 порождается элементами b, t и определяется соотношением $tb^4t^{-1} = b^2$; подгруппа группы G_1, порожденная элементами b^2, t, изоморфна группе P из примера 2).

Вопрос о том, может ли группа с одним определяющим соотношением, обладающая элементами конечного порядка, содержать нециклическую абелеву подгруппу, остается открытым. Далее, весьма вероятно, что типы групп ранга 1, вложимых в группы с одним определяющим соотношением, можно ограничить такими, характеристика которых (см ([6])) содержит нули на всех местах, кроме, быть может, конечного числа (каждая такая группа вложима в группу с одним определяющим соотношением). Отсюда, в частности, следовало бы решение гипотезы Баумслага ([1]) о том, что аддитивная группа рациональных чисел не вложима в группу с одним определяющим соотношением.

Работа выполнена под руководством М. Д. Гриндлингера, и автор пользуется случаем выразить ему благодарность за постоянное внимание и ряд ценных советов.

Поступило
26.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baumslag G., Groups with one defining relator, J. Australian Math. Soc., 4, № 4 (1964), 385—392.
[2] Baumslag G., On generalized free products, Math. Zeits., 78, № 5 (1962), 423—438.
[3] Murasugi K., The center of a group with a single defining relation, Math. Annalen, 155, № 3 (1964), 246—251.
[4] Karrass A., Magnus W., Solitar D., Elements of finite order in groups with a single defining relation, Comm. Pure Appl. Math., 13, № 1 (1960), 57—66.
[5] Karrass A., Solitar D., Subgroup theorems in the theory of groups given by defining relations, Comm. Pure Appl. Math., 11, № 4 (1958), 547—571.
[6] Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат, М., 1953.
[7] Karrass A., Solitar D., Note on a theorem of Schreier, Proc. Amer. Math. Soc., 8, № 4, (1957), 696—697.
[8] Мальцев А. И., О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 18, № 1 (1958), 49—60.
[9] Higman G., Neumann B. H., Neumann H., Embedding theorems for groups, 6, London Math Soc., 24, № 4 (1949), 247—254.
[10] Baumslag G., Solitar D., Some two-generator one-relator ono-Hofhien groups, Bull. Amer. Math. Soc., 68, № 3 (1962), 199—201.