СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том IX, № 6 Ноябрь — Декабрь 1968 г.

УДК 519.4

Д. И. МОЛДАВАНСКИЙ

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП

Будем говорить, что группа G обладает свойством I (или является I-группой), если пересечение любых двух конечно порожденных подгрупп группы G снова есть конечно порожденная подгруппа. Примером I-группы, как нетрудно видеть, может служить произвольная нильпотентная группа. Вместе с тем легко указать разрешимую группу, не обладающую свойством I (см. замечание после леммы 1).

Хаусон [7] показал, что каждая свободная группа является I-группой. В предлагаемой заметке рассматривается возможность распространения этого результата на класс групп, задаваемых одним определяющим соотношением. Оказалось, что почти каждая группа из этого класса, обладающая нетривиальным центром, не является I-группой. С другой стороны, можно указать семейство групп с одним определяющим соотношением, весьма «далеких» от свободных и обладающих свойством I. Кроме того, мы докажем здесь следующее предложение: если множество образующих группы G (относительно которого она задается одним определяющим соотношением) разбить на две непересекающиеся части, то пересечение подгрупп, порожденных этими частями, либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа. Если, к тому же, в G имеются элементы конечного порядка, то указанное пересечение всегда тривиально.

Результаты работы докладывались на VIII Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре.

1. Следующие обозначения предполагаются фиксированными в этом пункте:

F — свободная группа с образующими x, y;

C — бесконечная циклическая группа с образующим z;

$P = F \times C$ — прямое произведение групп F и C;

S_k — группа, заданная образующими a, b и одним определяющим соотношением $a^{-1}ba = b^k$, где k — произвольное целое число, отличное от нуля;

H — нормальный делитель группы S_k, порожденный элементом b.

Используя метод Рейдемейстера — Шрейера (см., например, [4], раздел 2,3), найдем, что группу H можно задать образующими

$$b_i = a^i b a^{-i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

и определяющими соотношениями

$$b_i = b_{i+1}^{\,k} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда непосредственно видно, что H является абелевой группой ранга 1, и так как S_k / H бесконечная циклическая, каждая группа S_k разрешима. Таким образом, группа S_k не является свободной; более того, если группа G с одним определяющим соотношением не содержит группу F (точнее, подгруппу, изоморфную группе F; в дальнейшем мы будем допускать подобные сокращения без специальных оговорок), то G изоморфна подходящей группе S_k (см. ([3]) или ([5])).

Лемма 1. *Группа P не обладает свойством I.*

Доказательство. Обозначим через R подгруппу группы P, порожденную элементами $x_1 = xz$ и y. Утверждается, что $F \cap R = N$, где N — нормальный делитель группы F, порожденный элементом y. Действительно, элементы $x^i y x^{-i}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ составляют множество свободных образующих группы N и из

$$x^i y x^{-i} = x^i z^i y z^{-i} x^{-i} = x_1{}^i y x_1{}^{-i}$$

следует $N \subseteq F \cap R$. С другой стороны, $w(x_1, y) = w(x, y) z^d$, где d — сумма показателей по x_1 (а значит, и по x) в слове w. Если $w \in F$, то $d = 0$ и поэтому $w \in N$, т. е. $F \cap R \subseteq N$. Так как N — свободная группа счетного ранга, лемма доказана.

Заметим, что те же рассуждения приводят к аналогичному результату для группы $P_k = S_k \times C$ (в случае $|k| > 1$), которая, очевидно, разрешима.

Лемма 1 показывает, что класс I-групп не замкнут относительно прямого произведения. Свободное же произведение произвольных I-групп снова является I-группой ([1]).

Теорема 1. *Если центр неабелевой группы G, заданной одним определяющим соотношением, отличен от единичной подгруппы и если группа G не изоморфна группе S_{-1}, то она не является I-группой.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что P является подгруппой группы G. Это, в свою очередь, будет следовать из того, что G содержит группу F. В самом деле, по теореме 2 из работы ([6]) центр Z группы G изоморфен с C. Если $F \subseteq G$, то из $F \cap Z = 1$ следует $F \cup Z \simeq P$. Но если группа G не содержит F, то, как отмечалось выше, G изоморфна подходящей группе S_k. Далее, если центр группы S_k нетривиален, то $k = \pm 1$. Это следует, например, из теоремы 3 работы ([6]), так как полином Александера (([6]), см. также ([4])) $\Delta_H(t)$ группы S_k равен $1 - kt$. Следовательно, каждая группа G, удовлетворяющая условиям теоремы, содержит F, и теорема доказана.

Нетривиальность центра не является, как нетрудно видеть, необходимым условием нарушения свойства I. С другой стороны, каждая группа S_k обладает этим свойством. Этот факт очевидным образом выводится из следующей теоремы.

Теорема 2. *Каждая нециклическая конечно порожденная подгруппа группы S_k имеет в S_k конечный индекс.*

Доказательство. Любой элемент группы S_k может быть представлен в виде $a^m b_t{}^n$ для подходящих целых m, n и неотрицательного t, причем число m однозначно этим элементом определяется. Пусть R — произвольная нециклическая конечно порожденная подгруппа группы S_k. Из локальной цикличности H следует, что R порождается двумя элементами $a^p b_q{}^r$ и $b_q{}^s$, где $p > 0$, а s — наименьшее положительное число такое, что $b_q{}^s \in R$. Элементы вида $a^i b_q{}^j$ $(i = 0, \ldots, p-1,\ j = 0, \ldots, s-1)$ представляют разные правые смежные классы группы S_k по подгруппе R, и нетрудно видеть, что эти классы покрывают S_k. В самом деле, представителем произвольного элемента $a^m b_t{}^n$ является $a^{i_0} b_q{}^{j_0}$, где числа i_0, j_0 находятся из сравнений

$$i \equiv m \pmod p, \quad j \cdot k^t \equiv n \cdot k^q - r \cdot k^{t+i_0} \frac{k^{m-i_0}-1}{k^p-1} \pmod s.$$

Разрешимость второго сравнения следует из взаимной простоты чисел k и s, которая, в свою очередь, является следствием выбора s.

2. Ввиду того, что теорема Хаусона выполняется не в каждой группе с одним определяющим соотношением, возникает задача нахождения в этой группе таких пар конечно порожденных подгрупп, пересечение которых конечно порождено. К этому направлению можно отнести следующее предложение, являющееся ослабленным аналогом весьма элементарного свойства свободной группы.

Теорема 3. *Пусть группа G задана одним определяющим соотношением в системе образующих X. Пусть, далее, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, множество X_i непусто и порождает подгруппу A_i группы G $(i = 1, 2)$. Тогда $A_1 \cap A_2$ или единичная, или бесконечная циклическая группа. Более того, подгруппа $A_1 \cap A_2$ единична, если G содержит элементы конечного порядка.*

Множество X не предполагается конечным, хотя в определяющее соотношение входит лишь конечное число образующих группы G. Требование конечности приводит к эквивалентному (как показывает нижеследующая лемма 2) предложению; тем не менее доказывать теорему 3 удобнее именно в такой форме.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме и использует те же методы, что и доказательство теоремы Магнуса о свободе, и здесь приводится лишь его набросок.

Лемма 2. *Пусть группа G является свободным произведением групп G' и G'':*

$$G = G' * G''. \tag{1}$$

Пусть, далее, в каждой группе $G^{(j)}$ указаны подгруппы $A_i{}^{(j)}$ $(i, j = 1, 2)$ и

$$A_i = A_i{}' * A_i{}'' \qquad (i = 1, 2). \tag{2}$$

Тогда

$$A_1 \cap A_2 = (A_1{}' \cap A_2{}') * (A_1{}'' \cap A_2{}''). \tag{3}$$

В самом деле, правая часть равенства (3), очевидно, содержится в левой. Для доказательства противоположного включения достаточно заметить, что несократимая запись элемента $g \in A_i$ $(i = 1, 2)$ относительно разложения (2) является его несократимой записью и относительно разложения (1); поэтому каждая компонента несократимой записи элемента из левой части равенства (3) принадлежит подгруппе $A_1^{(j)} \cap A_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$).

Теорему 3 будем доказывать индукцией по длине определяющего слова (левой части определяющего соотношения, правая часть которого — единица) группы G.

Если длина определяющего слова равна нулю, т. е. если G — свободная группа с множеством свободных образующих X, утверждение теоремы очевидно.

Покажем, что следующий шаг индукции достаточно сделать в предположении, что все образующие из X входят в определяющее слово группы G. Совокупность всех образующих, входящих в определяющее слово, обозначим через X' и положим $X'' = X \setminus X'$. Пусть, далее, множество $X^{(j)}$ порождает подгруппу $G^{(j)}$ группы G, и множество $X_i \cap X^{(j)} = X_i^{(j)}$ — подгруппу $A_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2$). Тогда $A_i^{(j)} \subseteq G^{(j)}$ и $G = G' * G''$, $A_i = A_i' * A_i''$. Теперь из $X_1'' \cap X_2'' = \varnothing$, свободы группы G'' и леммы 2 следует, что $A_1 \cap A_2 = A_1' \cap A_2'$.

Итак, пусть группа G задана одним определяющим соотношением $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ в системе образующих $x_1, \ldots, x_n$, каждый из которых входит в определяющее слово $w(x_1, \ldots, x_n)$, и пусть для всех групп, длина определяющего слова у которых меньше длины w, утверждение теоремы выполняется. Мы можем считать слово w циклически несократимым и в дальнейшем ограничиться рассмотрением случая $n > 2$. Действительно, если $n = 2$, первое утверждение теоремы тривиально. Второе утверждение следует из того, что центр группы с одним соотношением, обладающей элементами конечного порядка, тривиален (см., например, [2], теорема 4). Без потери общности будем считать также, что подгруппа A_1 группы G порождается элементами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а подгруппа A_2 — элементами $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ($1 < k < n$).

Рассмотрим сначала случай, когда сумма показателей по x_1 в слове w равна нулю. Если H — нормальное замыкание в группе G элементов $x_2, \ldots, x_n$, то фактор-группа G/H бесконечная циклическая с образующим x_1H, а поэтому элементы

$$s_{ij} = x_1^j x_i x_1^{-j} \quad (i = 2, \ldots, n; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

порождают подгруппу H. Пусть слово $v(s_{ij})$ есть результат переписывания слова $w(x_1, \ldots, x_n)$ в этих образующих. Из наших предположений и алгоритма переписывания (см. [4]) следует, что длина слова v меньше длины w.

Пусть p и q — соответственно наименьшее и наибольшее значение второго индекса у s_n-символов из (4), входящих в слово $v(s_{ij})$; без потери общности можно считать, что $p \leqslant 0 \leqslant q$. Метод Рейдемейстера — Шрейера, теорема Магнуса о свободе и свойства обобщенных свободных произведений позволяют показать (см. [4]), что все s_i-символы с $i < n$ и те s_n-символы из (4), второй индекс j у которых удовлетворяет неравенствам $p \leqslant j \leqslant q$, порождают подгруппу H_0 группы H, определяющуюся в этой системе образующих одним соотношением

$$v(s_{ij}) = 1$$

и содержащую элементы конечного порядка, если их содержит группа G.

Обозначим через B_1 подгруппу группы H_0, порожденную всеми s_i-символами с $i \leqslant k$, и пусть остальные образующие (из указанного выше множества) группы H_0 порождают подгруппу B_2. Нетрудно видеть, что $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$, и наше утверждение относительно подгруппы $A_1 \cap A_2$ следует из индуктивного предположения.

Случай, когда сумма показателей по каждому образующему подгруппы A_1 в слове $w(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ отлична от нуля, сводится к рассмотренному следующим образом. Пусть сумма показателей в слове w по x_1 равна r, а по x_2 — s. Рассмотрим группу G_1, заданную образующими a, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ и определяющим соотношением

$$w(a^s, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 1;$$

G_1 является свободным произведением с объединенной подгруппой группы G и бесконечной циклической группы, а потому элементы $a^s, x_2, \ldots, x_n$ порождают подгруппу G группы G_1. A_1 содержится в подгруппе $A_1{*}$ групп G_1, порожденной элементами $a, x_2, \ldots, x_k$. Поэтому достаточно показать, что подгруппа $A_1{*} \cap A_2$ имеет требуемый вид. Для этого присоединим к образующим группы G_1 новый образующий b вместе с определяющим соотношением $b = x_2 a^r$. После очевидных преобразований приходим к системе образующих $a, b, x_3, \ldots, x_n$ группы G_1, в которой она определяется соотношением $w_1(a, b, x_3, \ldots, x_n) = 1$, где $w_1 = w(a^s, ba^{-r}, x_3, \ldots, x_n)$, а потому сумма показателей по a в слове w_1 равна нулю. Кроме того, подгруппа $A_1{*}$ порождается частью и этой системы образующих группы G_1 (напомним, что $k \geqslant 2$).

Таким образом, мы оказываемся в уже рассмотренной ситуации. Правда, слово w_1 может оказаться длиннее слова w, но длина слова v_1 — результата переписывания слова w_1 в s-символах — меньше, как нетрудно видеть, длины w, и мы снова можем воспользоваться индуктивным предположением. Этим закончен индуктивный шаг, и вместе с тем, доказательство теоремы.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность М. Д. Гриндлингеру за внимание к этой работе.

Поступило
18.III.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baumslag B., Intersection of finitely generated subgroups in free products, J. London Math. Soc., 41 (1966), 673—679.

[2] Karrass A., Magnus W., Solitar D., Elements of finite order in groups with a single defining relation, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 57—66.

[3] Magnus W., Das Identitatsproblem fur Gruppen mit einer definirenden Relation, Math. Ann., 106 (1932), 295—307.

[4] Magnus W., Karrass A., Solitar D., Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations, New York, London, Sydney, 1966.

[5] Молдаванский Д. И., Об одной теореме Магнуса, Уч. зап. Ивановского пед. ин-та (в печати).

[6] Murasugi K., The center of a group with a single defining relation, Math. Ann., 155 (1964), 246—251.

[7] Howson A., On the intersection of finitely generated free groups, J. London Math. Soc., 29 (1954), 428—434.