Алгебра и логика, 8, № 6 (1969), 691-694.

УДК 519.45

СОПРЯЖЕННОСТЬ ПОДГРУПП СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

Д.И.МОЛДАВАНСКИЙ

В заметке указывается простой алгоритм, решающий проблему сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы. Построение алгоритма основано на свойствах нильсеновского множества элементов свободной группы. Решение этой проблемы в случае подгрупп ранга 2 было получено иными методами в работе [1].

Пусть F – свободная группа с множеством свободных образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$. Как обычно, элементами группы F считаем несократимые слова от образующих a_i, т.е. выражения вида

$$a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \tag{1}$$

где $1 \leq i_j \leq n$, $\varepsilon_j = \pm 1$ $(j=1,\ldots,k)$ и для всех $j=1,\ldots,k-1$ или $i_j \neq i_{j+1}$, или $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} \neq 0$. Число k называется длиной слова (или элемента) (1). Слово (1) называется циклически несократимым, если $i_1 \neq i_k$ или $\varepsilon_1 + \varepsilon_k \neq 0$. При $1 \leq s \leq k$ слово $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{i_s}^{\varepsilon_s}$ называется начальным отрезком длины s слова (1).

Определение понятия нильсеновского множества элементов группы F можно найти в книгах [2] или [3]. Нам понадобятся лишь свойства этого понятия, собранные в следующем предложении:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [3]). а) *Существует эффективный процесс построения по произвольному конечному множеству W элементов группы F нильсеновского множества W', свободно порождающего в F ту же подгруппу, что и W.*

б) *Пусть $w_1, \ldots, w_m$ – нильсеновское множество элементов группы F. Тогда несократимая запись в образующих a_i*

несократимого W-слова (т.е. слова от символов w_i) $w_{i_1}^{\varepsilon_1} w_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots w_{i_k}^{\varepsilon_k}$ имеет длину, не меньшую k, и начинается начальным отрезком слова $w_{i_1}^{\varepsilon_1}$ длины, не меньшей $t+1$ (t), если длина w_{i_1} есть $2t+1$ $(2t)$. Более того, незатронутый сокращением начальный отрезок слова $w_{i_1}^{\varepsilon_1}$ однозначно это слово определяет в том смысле, что если он является начальным отрезком некоторого слова w_i^{ε} $(1 \leq i \leq m$, $\varepsilon = \pm 1)$, то $w_i^{\varepsilon} = w_{i_1}^{\varepsilon_1}$.

Перечисленные свойства позволяют находить ранг подгруппы группы F, порожденной данным конечным множеством элементов, и решать проблему вхождения в эту подгруппу (см. [3], стр. 131). Эти же свойства обеспечивают существование алгоритма, решающего следующую проблему:

(*) Для произвольных конечно порожденных подгрупп H, K группы F узнать, существует ли элемент $x \in F$, такой, что

$$x^{-1} H x \subseteq K. \tag{2}$$

В самом деле, пусть подгруппы H и K порождаются элементами $w_1, \dots, w_\ell$ и $v_1, \dots, v_s$ соответственно. Ввиду предложения 1 данное множество образующих подгруппы K можно считать нильсеновским. Не уменьшает степени общности и предположение о циклической несократимости слова w_1. Следующее предложение, справедливое в этих условиях, делает существование алгоритма, решающего проблему (*), очевидным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если множество элементов $x \in F$, удовлетворяющих соотношению (2), непусто, то оно содержит элемент длины, не превосходящей числа $m - \ell(w_1)$, где $m = \max\{\ell(v_i) \mid i = 1, \dots, \ell\}$ ($\ell(w)$ обозначает длину элемента w).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^{-1} H x \subseteq K$. Это означает, в частности, что

$$x^{-1} w_1 x = v_{i_1}^{\varepsilon_1} v_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots v_{i_k}^{\varepsilon_k} \tag{3}$$

(V - слово в правой части (3) предполагается несократимым). Если $v_{i_1}^{\varepsilon_1} = v_{i_k}^{-\varepsilon_k}$, то мы можем рассматривать элемент $x v_{i_1}^{\varepsilon_1}$ также удовлетворяющий, очевидно, соотношению (2). Так как при этом длина V -слова, в которое трансформируется ω_1, уменьшается, можно считать V -слово в правой части равенства (3) циклически несократимым. Аналогично можно считать, что ни ω_1, ни ω_1^{-1} не является начальным отрезком элемента x. В силу этого и циклической несократимости слова ω_1, в произведении $x^{-1}\omega_1 x$ сокращение возможно либо между x^{-1} и ω_1, либо между ω_1 и x. Пусть, например, имеет место первый случай и пусть y - общий начальный отрезок максимальной длины слов ω_1 и x: $\omega_1 = y\omega_1'$, $x = yx_1$. Тогда несократимая запись левой части равенства (3) имеет вид $x_1^{-1}\omega_1' y x_1$, и потому $\ell(x_1) \leq m$. В самом деле, если $\ell(x_1) > m$, то оставшийся неизменным при сокращении правой части (3) начальный отрезок слова $v_{i_1}^{\varepsilon_1}$, скажем z_1, длины, указанной в пункте б) предложения 1, является начальным отрезком слова x_1^{-1}. Аналогично, начальным отрезком слова x_1^{-1} является и z_2 - начальный отрезок слова $v_{i_k}^{-\varepsilon_k}$, не изменившийся при сокращении V -слова, обратного к правой части (3). Так как одно из слов z_i является начальным отрезком другого, из пункта б) предложения 1 теперь следует, что $v_{i_1}^{\varepsilon_1} = v_{i_k}^{-\varepsilon_k}$ - противоречие.

Следующее предложение показывает, что решение проблемы (*) и есть, по существу, решение проблемы сопряженности подгрупп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Подгруппы H и K конечного ранга свободной группы F сопряжены в F тогда и только тогда, когда существуют элементы $x, y \in F$, такие, что $x^{-1}Hx \subseteq K$ и $y^{-1}Ky \subseteq H$.

В самом деле, если хотя бы одно из включений строгое, то при $g = xy$ имеем строго возрастающую цепочку подгрупп

$$H \subset gHg^{-1} \subset g^2Hg^{-2} \subset \dots ,$$

что противоречит известной теореме Такахаси (см., например, [3], стр. 114) об обрыве возрастающей цепочки подгрупп ограниченного ранга в свободной группе.

Литература

1. М.Д.ГРИНДЛИНГЕР, К изучению подгрупп, Международный конг-

ресс математиков, Тезисы кратких научных сообщений, секция 2, М., 1966.

2. М.ХОЛЛ, Теория групп, ИЛ, 1962.

3. W.MAGNUS, A.KARRASS, D.SOLITAR, Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations, New York, London, Sydney, 1966.

Поступило 20. IX.1969