УДК 512.543

МОЛДАВАНСКИЙ Д. И.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА В НЕХОПФОВЫХ ГРУППАХ С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ*

Введение

Если G — некоторая группа, $\sigma(G)$ будет обозначать пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G, $E(G)$ — совокупность всех сюръективных эндоморфизмов этой группы. Для произвольного $\varphi \in E(G)$ полагаем также

$$K(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \varphi^i.$$

Поскольку фактор-группа $G/\sigma(G)$ является финитно аппроксимируемой, а финитно аппроксимируемые группы с конечным числом порождающих хопфовы (см. [3]), то для любой конечно порожденной группы G и любого эндоморфизма $\varphi \in E(G)$ выполнено включение $K(\varphi) \subseteq \sigma(G)$.

В работе [12] была сформулирована (со ссылкой на В. Магнуса) задача описания тех конечно порожденных нехопфовых групп G, которые обладают хотя бы одним эндоморфизмом $\varphi \in E(G)$, для которого имеет место равенство $K(\varphi) = \sigma(G)$. В этой работе для ряда известных конечно определенных нехопфовых групп такие эндоморфизмы явно указаны и поставлен вопрос о существовании эндоморфизма с указанным свойством в произвольной конечно определенной нехопфовой группе. Нетрудно показать, тем не менее, что ответ на этот вопрос отрицателен. А именно, имеет место следующее утверждение:

Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H, $G = (A * B; H)$. Предположим, что

1) *существует эндоморфизм $\tau \in E(G)$ с нетривиальным ядром, оставляющий неподвижным каждый элемент подгруппы H;*

2) *нормальное замыкание H^A подгруппы H в группе A совпадает с A;*

3) *$\sigma(B)$ содержит подгруппу H и является нормальным замыканием в группе B конечного множества ее элементов.*

Тогда группа G нехопфова, и для любого эндоморфизма $\varphi \in E(G)$ подгруппы $K(\varphi)$ и $\sigma(G)$ различны.

В самом деле, условие 1) обеспечивает существование эндоморфизма группы G, совпадающего с τ на подгруппе A и тождественного на B, а это влечет нехопфовость группы G. Из условий 2) и 3) следует, что фактор-группа $G/\sigma(B)^G$

---

*Депонирована в ВИНИТИ редколлегией Сибирск. матем. журнала за № 6671-В 86. Аннотация: Сибирск. матем. ж. 1987. Т.28, № 5. С. 219

изоморфна фактор-группе $B/\sigma(B)$ и потому финитно аппроксимируема. Следовательно, справедливо включение $\sigma(G) \subseteq \sigma(B)^G$. С другой стороны, поскольку $\sigma(B) \subseteq \sigma(G)$, имеет место и противоположное включение, так что подгруппа $\sigma(G) = \sigma(B)^G$ является нормальным замыканием в группе G конечного множества элементов. Так как для любого эндоморфизма $\varphi \in E(G)$ с нетривиальным ядром последовательность $\operatorname{Ker}\varphi^i$ является строго возрастающей, отсюда следует, что равенство $K(\varphi) = \sigma(G)$ выполняться не может.

(Включение $\operatorname{Ker}\varphi^n \subset \operatorname{Ker}\varphi^{n+1}$ докажем индукцией по n. Пусть для всех $1 \leq k < n$ это справедливо, но для любого x из $x\varphi^{n+1} = 1$ следует $x\varphi^n = 1$. По индуктивному предположению существует $a \in \operatorname{Ker}\varphi^n \backslash \operatorname{Ker}\varphi^{n-1}$. Возьмем $b \in G$ такой, что $b\varphi = a$. Тогда $b\varphi^{n+1} = a\varphi^n = 1$ и потому $b\varphi^n = 1$. Но отсюда $a\varphi^{n-1} = b\varphi^n = 1$, — противоречие.)

Простейшим конкретным примером, удовлетворяющим условиям приведенного утверждения, повидимому, является группа

$$G = \langle a, b, c; a^{-1}b^2a = b^3, a = [a, c^{-1}ac] \rangle,$$

заданная тремя образующими и двумя определяющими соотношениями. Здесь $A = \langle a, b; a^{-1}b^2a = b^3 \rangle$, $B = \langle a, c; a = [a, c^{-1}ac] \rangle$, подгруппа H является циклической с порождающим a. Хорошо известно (и легко показать), что равенства $a\tau = a$ и $b\tau = b^2$ определяют сюръективный эндоморфизм группы A с нетривиальным ядром. Нетрудно видеть также, что $\sigma(B)$ совпадает с нормальным замыканием в группе B элемента a.

Тем не менее, доказанное выше предложение не позволяет понять, как выглядит ответ на упомянутый вопрос для групп с одним определяющим соотношением.

Первые примеры нехопфовых групп с одним определяющим соотношением были обнаружены Г. Баумслагом и Д. Солитэром [9] среди групп вида

$$G_{mn} = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где m и n — произвольные целые числа, отличные от нуля. Доказано, что группа G_{mn} является нехопфовой тогда и только тогда, когда $|m| > 1$, $|n| > 1$ и существует простое число, делящее в точности одно из чисел m и n. В работе [12] показано, что если числа m и n взаимно просты, то для эндоморфизма φ группы G_{mn}, оставляющего неподвижным элемент a и переводящего b в b^m, выполнено равенство $K(\varphi) = \sigma(G_{mn})$. Целью данной работы является описание всех групп вида G_{mn}, обладающих эндоморфизмом с этим свойством.

Запишем числа m и n в виде $m = m_1 p$, $n = n_1 q$, где m_1, n_1, p, q — целые числа, $(p, n) = (q, m) = 1$ и числа m_1 и n_1 имеют одни и те же простые делители. Чтобы сделать эту запись однозначной (хотя это и не очень существенно) будем предполагать также, что числа m_1 и n_1 положительны. Основной результат работы теперь может быть сформулирован следующим образом.

Теорема. *Эндоморфизм $\varphi \in E(G_{mn})$ такой, что $K(\varphi) = \sigma(G_{mn})$ существует тогда и только тогда, когда $m_1 = n_1$.*

В формулировке теоремы отсутствует предположение о нехопфовости группы G_{mn}. Дело в том, что теорема справедлива и тогда, когда группа G_{mn} является хопфовой; более того, для хопфовой группы справедливость утверждения теоремы почти очевидна. Действительно, с одной стороны, в этом случае для любого эндоморфизма $\varphi \in E(G_{mn})$ мы имеем $\operatorname{Ker}\varphi = 1$, и потому равенство $K(\varphi) = \sigma(G_{mn})$ равносильно финитной аппроксимируемости группы G_{mn}. С другой стороны, из приведенного выше критерия нехопфовости группы G_{mn} следует, что если она хопфова, то равенство $m_1 = n_1$ выполнено в точности тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$, т. е. тогда и только тогда, когда группа G_{mn} финитно аппроксимируема (см. [14]).

Предыдущее замечание говорит о том, что доказательство теоремы достаточно провести при дополнительном предположении о нехопфовости группы G_{mn}. Тем не менее, в действительности мы будем пользоваться лишь более слабым предположением $|m| \neq |n|$, которое в дальнейшем предполагается выполненным без дополнительных оговорок. Всюду ниже предполагаются также фиксированными значения символов m_1, n_1, p и q, введенные перед формулировкой теоремы. Наконец, символ α будет всегда обозначать эндоморфизм группы G_{mn}, оставляющий элемент a на месте и переводящий элемент b в элемент b^{pq}. Отметим (см. предложение 2 ниже), что $\alpha \in E(G_{mn})$.

Основная теорема является очевидным следствием следующих двух утверждений:

Теорема 1. *Фактор-группа $G_{mn}/K(\alpha)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m_1 = n_1$.*

Теорема 2. *Ядро произвольного эндоморфизма $\varphi \in E(G_{mn})$ содержится в подгруппе $K(\alpha)$.*

Непосредственно доказательству этих теорем посвящены третий и четвертый параграфы работы. Первый параграф содержит ряд вспомогательных результатов; здесь, в частности, вычислены определяющие соотношения фактор-группы $G_{mn}/K(\alpha)$ и единственной ее нормальной подгруппы, фактор-группа по которой является бесконечной циклической. Во втором параграфе для этой подгруппы найдено другое, более удобное представление образующими и определяющими соотношениями, что позволило описать ее строение в терминах конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой и явилось ключом к доказательству теорем 1 и 2.

§ 1. Предварительные результаты

Этот параграф, содержащий ряд вспомогательных утверждений, начнем с перечисления некоторых свойств эндоморфизмов групп вида G_{mn}. Каждая такая группа является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы, порождаемой элементом b, и связанными подгруппами, порождаемыми элементами b^m и b^n соответственно. Если φ — произвольный эндоморфизм группы G_{mn}, то элементы $(b\varphi)^m$ и $(b\varphi)^n$ являются сопряженными при помощи элемента $a\varphi$, и так как $|m| \neq |n|$, из леммы Коллинза (см. [7], с. 254) следует, что элемент $b\varphi$ должен быть сопряженным с некоторым элементом базовой группы. Таким образом, имеет место

Предложение 1. *Все эндоморфизмы группы G_{mn} с точностью до множителя, являющегося внутренним автоморфизмом, исчерпываются такими, которые элемент b переводят в элемент вида b^k ($k \in \mathbb{Z}$).*

Предложение 2. *Если φ — сюръективный эндоморфизм группы G_{mn} такой, что $b\varphi = b^k$, где $|k| > 1$, то каждый простой делитель числа k является делителем в точности одного из чисел m и n. Наоборот, если число k удовлетворяет этому требованию, то эндоморфизм φ группы G_{mn}, определяемый равенствами $a\varphi = a$ и $b\varphi = b^k$, является сюръективным.*

Доказательство. Второе утверждение хорошо известно (см. напр. [9]) и легко получается индукцией по числу сомножителей в каноническом разложении числа k.

Для доказательства первого утверждения заметим сначала, что если элементы $a\varphi$ и $b\varphi = b^k$ порождают группу G_{mn}, то фактор-группа ее по нормальному замыканию элемента b^k должна быть циклической. Рассуждая от противного, предположим теперь, что существует простой делитель t числа k такой, что числа m и n одновременно либо делятся, либо не делятся на t. В первом случае фактор-группа группы G_{mn} по нормальному замыканию элемента b^t является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка t, а во втором — расширением циклической группы порядка t при помощи бесконечной циклической группы. Так как нормальное замыкание элемента b^k содержится в нормальном замыкании элемента b^t, и то, и другое невозможно.

Предложение 3. *Для любого целого числа $k \geqslant 1$ ядро эндоморфизма α^k совпадает с нормальным замыканием в группе G_{mn} элементов*

$$[a^{-k}b^{m_1^k}a^k, b],\ [b, a^kb^{n_1^k}a^{-k}],\ [a^{-k}b^{m_1^k}a^k, a^kb^{n_1^k}a^{-k}]. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим через L фактор-группу группы G_{mn} по нормальному замыканию элементов (1), и пусть φ — естественный гомоморфизм группы G_{mn} на группу L. Так как в группе G_{mn} выполнены равенства

$$a^{-k}b^{(pq)^k m_1^k}a^k = b^{n^k q^k} \quad \text{и} \quad a^k b^{(pq)^k n_1^k} a^{-k} = b^{m^k p^k}, \tag{2}$$

то отображение $a \mapsto a,\ b \mapsto b^{(pq)^k}$ определяет гомоморфизм ψ группы L в группу G_{mn}. (Здесь и далее слова в фиксированном алфавите могут обозначать как элементы некоторой группы, так и элементы ее фактор-группы; из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.) Очевидно, что $\varphi\psi = \alpha^k$, и потому для доказательства предложения 3 нам достаточно убедиться в том, что ψ является изоморфизмом.

Поскольку наибольший общий делитель чисел $(nq)^k$, $(pq)^k$ и $(mp)^k$ равен 1, для подходящих целых чисел x, y и z выполнено равенство

$$(nq)^k x + (pq)^k y + (mp)^k z = 1.$$

Обозначим через c элемент

$$\left(a^{-k}b^{m_1^k}a^k\right)^x b^y \left(a^k b^{n_1^k} a^{-k}\right)^z$$

группы L. Так как в этой группе элементы $a^{-k}b^{m_1^k}a^k$, b и $a^kb^{n_1^k}a^{-k}$ попарно перестановочны, имеем

$$c^{(pq)^k} = \left(a^{-k}b^{(pqm_1)^k}a^k\right)^x b^{(pq)^k y}\left(a^kb^{(pqn_1)^k}a^{-k}\right)^z = b.$$

Кроме того, поскольку

$$a^{-1}c^m a = a^{-k}\left(a^{-1}b^m a\right)^{m_1^k x} a^k(a^{-1}b^m a)ya^k\left(a^{-1}b^m a\right)^{n_1^k z} a^{-k} = c^n,$$

отображение $a \mapsto a,\ b \mapsto c$ определяет гомоморфизм θ группы G_{mn} в группу L. Так как из выполненных в группе G_{mn} равенств (2) следует, что $c\psi = b$, очевидно, что отображения ψ и θ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Частный случай следующего утверждения при $(m, n) = 1$ содержится в [8].

Предложение 4. *Для любого целого числа $k \geqslant 1$ ядро эндоморфизма α^k является вполне характеристической подгруппой группы G_{mn}.*

Доказательство. Ввиду предложения 1 можно ограничиться рассмотрением такого эндоморфизма φ группы G_{mn}, при котором элемент b переходит в элемент b^r для некоторого целого числа r. Если, кроме того, $u = a\varphi$, в силу предложения 3 достаточно установить, что элементы

$$[u^{-k}b^{rm_1^k}u^k, b^r],\ [b^r, u^kb^{rn_1^k}u^{-k}],\ [u^{-k}b^{rm_1^k}u^k, u^kb^{rn_1^k}u^{-k}]. \tag{3}$$

лежат в подгруппе $\operatorname{Ker}\alpha^k$.

Так как $u^{-1}b^{mr}u = b^{nr}$ и отображение α не изменяет вхождений буквы a в записях элементов группы G_{mn}, нетрудно видеть, что $(u\alpha^k)^{-1}b^{mr}(u\alpha^k) = b^{nr}$. Следовательно,

$$(u^{-k}b^{rm_1^k}u^k)\alpha^k = \left((u\alpha^k)^{-k}b^{m^k r}(u\alpha^k)^k\right)^{q^k} = b^{(nq)^k r}$$

и, аналогично,

$$(u^kb^{rn_1^k}u^{-k})\alpha^k = b(mp)^k r.$$

Поэтому образы всех элементов (3) относительно отображения α^k равны 1.

Обозначим через H_{mn} нормальное замыкание в группе G_{mn} элемента b. Используя стандартную процедуру Рейдемейстера – Шрейера (см. напр. [2]), найдем, что группа H_{mn} в образующих $b_i = a^iba^{-i}$ $(i \in \mathbb{Z})$ определяется соотношениями $b_i^m = b_{i+1}^n$ $(i \in \mathbb{Z})$, т. е. является древесным произведением (определение и свойства этой конструкции можно найти в работе [13]) счетного семейства бесконечных циклических групп с очевидными объединениями.

Из предложения 3 следует, что группа $\overline{G}_{mn} = G_{mn}/K(\alpha)$ в образующих a, b определяется соотношением $a^{-1}b^ma = b^n$ и всевозможными соотношениями, приравнивающими единице все слова из (1) при $k = 1, 2, \ldots$. Обозначая через $\overline{H}_{mn}$ нормальное замыкание в группе $\overline{G}_{mn}$ элемента b и снова используя процедуру Рейдемейстера – Шрейера, приходим к следующему утверждению:

Предложение 5. *Группа $\overline{H}_{mn}$ в образующих $b_i = a^i b a^{-i}$ ($i \in \mathbb{Z}$) определяется соотношениями*

$$b_i^m = b_{i+1}^n, \tag{4}$$

где $i \in \mathbb{Z}$, а также соотношениями

$$[b_i^{m_1^k}, b_{i+k}] = [b_i, b_{i+k}^{n_1^k}] = [b_{i-k}^{m_1^k}, b_{i+k}^{n_1^k}] = 1, \tag{5}$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots$.

В следующем параграфе будет найдено другое, более удобное представление этой группы образующими и определяющими соотношениями; остаток же этого параграфа содержит доказательства ряда необходимых нам свойств групп вида

$$D_{rs}^t = \langle d_1, d_2, \ldots, d_t;\ d_i^r = d_{i+1}^s\ (i = 1, 2, \ldots, t-1) \rangle,$$

где $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$ и $t > 1$ — целые числа.

Группа D_{rs}^t является, очевидно, древесным произведением t экземпляров бесконечной циклической группы (с очевидными объединениями). Отсюда (и из свойств древесных произведений) следует, в частности, что любые два соседних образующих d_i и d_{i+1} порождают в ней подгруппу $\langle d_i, d_{i+1};\ d_i^r = d_{i+1}^s \rangle$, являющуюся свободным произведением с объединенной подгруппой двух бесконечных циклических групп. Индуктивные рассуждения будут использовать еще одно свойство этих групп, а именно то, что при $t > 2$ группа D_{rs}^t является свободным произведением с объединенной подгруппой группы D_{rs}^{t-1} и бесконечной циклической группы с образующим d_t:

$$D_{rs}^t = \left(D_{rs}^{t-1} * \langle d_t \rangle;\ d_{t-1}^r = d_t^s \right). \tag{6}$$

Так, из теоремы Х. Нейман (см. напр. [15], с. 512) очевидной индукцией по t получаем

Предложение 6. *Пусть k — произвольное целое число, взаимно простое с каждым из чисел r и s, и пусть для $i = 1, 2, \ldots, t$ $e_i = d_i^k$. Подгруппа, порождаемая в группе D_{rs}^t элементами e_1, e_2, $\ldots$, e_t, определяется соотношениями $e_i^r = e_{i+1}^s$ ($i = 1, 2, \ldots, t-1$), и потому изоморфна всей группе D_{rs}^t.*

Используя разложение (6) и известные свойства свободного произведения с объединенной подгруппой (в частности, — следствие 4.4.3 и теорему 4.6 из [2]), нетрудно доказать и следующее

Предложение 7. *Для любых целых чисел k и l элементы d_i^k и d_j^l ($1 \leqslant i < j \leqslant t$) сопряжены в группе D_{rs}^t тогда и только тогда, когда они равны. При этом $d_i^k = d_j^l$ в точности тогда, когда для некоторого целого числа z выполнены равенства $k = ur_1^{j-i}z$ и $l = us_1^{j-i}z$, где $u = (r, s)$ — наибольший общий делитель чисел r и s и $r = ur_1$, $s = us_1$.*

Для дальнейшего необходимо напомнить ряд понятий, связанных со строением свободного произведения с объединенной подгруппой.

Пусть группа $A = (X * Y; U)$ является свободным произведением групп X и Y с объединенной подгруппой U. Произвольный элемент $a \in A$ может быть выражен в виде произведения

$$a = z_1 z_2 \cdots z_t \qquad (t \geqslant 1),$$

где каждый сомножитель z_i лежит в одной из подгрупп X и Y, причем если $t > 1$, то никакие сомножители z_i и z_{i+1} $(i = 1, \ldots, t-1)$ не принадлежат одной и той же из этих подгрупп (и потому каждый сомножитель z_i не входит в объединяемую подгруппу U). Это выражение элемента a называется его несократимой записью. Несмотря на то, что при $U \neq 1$ несократимая запись элемента a (вообще говоря) определена неоднозначно, в любых двух его несократимых записях число сомножителей (называемое длиной элемента a и обозначаемое $l(a)$) одно и то же, и на одинаковых местах стоят сомножители, принадлежащие одной и той же подгруппе X или Y. Элемент a будем называть циклически несократимым, если при $l(a) > 1$ крайние сомножители его несократимой записи не лежат в одной и той же подгруппе X или Y. (Таким образом, элементы из свободных множителей мы считаем циклически несократимыми.)

Очевидная индукция по длине элемента показывает, что каждый элемент группы A сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Нам потребуется более точное утверждение, доказательство которого также происходит простой индукцией по длине.

Лемма 1. *Для произвольного элемента $a \in A = (X * Y; U)$ имеет место одно и только одно из следующих утверждений:*

а) *элемент a циклически несократим;*

б) *элемент a может быть записан в виде $a = zvz^{-1}$ где v — циклически несократимый элемент длины, большей 1, и $z \notin U$, причем если $z = z_1 \cdots z_r$ и $v = v_1 \cdots v_s$ — несократимые записи элементов z и v ($r \geqslant 1$, $s > 1$), то элементы z_r и v_1 не лежат в одной и той же подгруппе X или Y и $v_s z_r^{-1} \notin U$.*

в) *одна из несократимых записей элемента a имеет вид*

$$z_1 z_2 \cdots z_r z z_r^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$$

где $r \geqslant 1$;

Пусть $k > 1$ — целое число. Подгруппу H некоторой группы G называют k-изолированной, если для любого $x \in G$ из $x^k \in H$ следует $x \in H$. Группа G называется группой с однозначным извлечением корней k-ой степени, если для любых $x, y \in G$ из $x^k = y^k$ следует $x = y$.

Лемма 2. *Пусть $A = (X * Y; U)$, где U — бесконечная циклическая группа с порождающим u. Если подгруппа U k-изолирована в группах X и Y, то они, в свою очередь, k-изолированы в группе A. Если, к тому же, X и Y — группы с однозначным извлечением корней k-ой степени и если для любого $a \in A$ и любых целых чисел r и s из $a^{-1}u^r a = u^s$ следует $r = s$, то и A является группой с однозначным извлечением корней k-ой степени.*

Доказательство. Установим, например, k-изолированность подгруппы X. Пусть $a \in A \setminus X$ и $a^k \in X$. Если $l(a) > 1$, то случаи а) и б) из леммы 1 для элемента a невозможны, так как длина элемента a^k равна $k \cdot l(a)$ в случае а) и (в обозначениях леммы) $ks+2r-1$ в случае б). Но в случае в) из $a^k \in X$ должно следовать, что $z^k \in U$, что противоречит k-изолированности подгруппы U в группах X и Y. Таким образом, $l(a)=1$, т.е. $a \in Y$. Тогда $a^k \in X \cap Y = U$, и, следовательно, $a \in U$, — противоречие.

Пусть теперь $a^k = b^k$ для некоторых $a, b \in A$. Если элемент a лежит в подгруппе X или Y, то ввиду k-изолированности этих подгрупп там же находится элемент b, и равенство $a=b$ вытекает из условия леммы.

Поскольку каждый элемент группы A сопряжен либо с циклически несократимым, либо с элементом из сомножителя, без потери общности можно считать, что a циклически несократим. Легко понять, что тогда и b должен быть циклически несократимым и $l(a)=l(b)$. Приведение обеих частей равенства $a^k = b^k$ к нормальной форме (см. [2]) и единственность ее показывают, что $a = bu^r$ для некоторого целого числа r. Отсюда $u^r a^{k-1} = b^{k-1}$, и снова сравнивая нормальные формы, получаем $b = u^r a u^s$ для подходящего s. Таким образом, $b = u^r b u^{r+s}$, т. е. $b^{-1} u^r b = u^{-(r+s)}$. Поэтому $r = -(r+s)$, элементы b и u^r перестановочны и, следовательно,

$$b^k = a^k = (bu^r)^k = b^k u^{rk}.$$

Значит $r=0$ и $a=b$.

Предложение 8. *Если целое число $k>1$ взаимно просто с каждым из чисел r и s, то группа D^t_{rs} является группой с однозначным извлечением корней k-ой степени.*

Доказательство проводится индукцией по t с использованием соотношения (5), леммы 2 и предложения 7. При этом одновременно с основным утверждением следует доказывать k-изолированность циклических подгрупп, порождаемых элементами d_1, d_2, … , d_t. Детали опускаются.

Лемма 3. *Пусть $A = (X * Y; U)$, где U является нормальной подгруппой группы Y. Пусть a — элемент группы A, лежащий в нормализаторе подгруппы U, и B — подгруппа, порождаемая подгруппами $X^a = aXa^{-1}$ и Y. Тогда $B = (X^a * Y; U)$.*

Доказательство. Инвариантность подгруппы U в группе Y позволяет без потери общности считать, что несократимая запись элемента a начинается в группе X. Так как $U \subseteq X^a \cap Y$, достаточно показать, что произвольное выражение вида

$$ax_1a^{-1} \cdot y_1 \cdot ax_2a^{-1} \cdot y_2 \cdot \dots \cdot ax_sa^{-1} \cdot y_s,$$

где $s \geqslant 1$, $x_i \in X \setminus U$, $y_i \in Y \setminus U$ (i=1, 2, … , s), отлично от единицы. Нетрудно видеть, что крайние сомножители несократимой записи элемента ax_ia^{-1} принадлежат множеству $X \setminus U$ во всех случаях кроме одного, когда $ax_ia^{-1} \in U$. Но этот случай невозможен, так как a принадлежит нормализатору подгруппы U. Следовательно, заменив в нашем выражении каждый элемент ax_ia^{-1} его несократимой записью, получим несократимую запись этого выражения, содержащую не менее $2s$ сомножителей.

Предложение 9. *Произвольный эндоморфизм φ группы D^t_{rs} такой, что для каждого $i = 1, 2, \dots t$, некоторых элементов v_1, v_2, ... , v_t из D^t_{rs} и целого числа $k \neq 0$, взаимно простого с каждым из чисел r и s, выполнено равенство*

$$d_i\varphi = v_i d_i^k v_i^{-1},$$

инъективен.

Доказательство. Полагая для $i = 1, 2, \dots t$ $e_i = v_i d_i v_i^{-1}$, мы видим в силу предложения 8, что элементы e_1, e_2, ... , e_t удовлетворяют соотношениям

$$e_i^r = e_{i+1}^s \quad (i = 1, 2, \dots t-1),$$

и с учетом предложения 6 нам достаточно показать, что подгруппа E, порождаемая элементами e_1, e_2, ... , e_t, этими соотношениями определяется.

Рассмотрим сначала случай, когда $r \neq s$, считая для определенности, что число r не является делителем s. Проведем индукцию по t.

Так как группа D^2_{rs} является свободным произведением с объединенной подгруппой двух бесконечных циклических групп и элемент $u = v_2^{-1}v_1$ лежит в централизаторе объединяемой подгруппы, по лемме 3 подгруппа $v_2^{-1}Ev_2$ в системе порождающих $ud_1u^{-1} = v_2^{-1}e_1v_2$ и $d_2 = v_2^{-1}e_2v_2$ определяется соотношением $(ud_1u^{-1})^r = d_2^s$.

При $t > 2$ воспользуемся разложением (5) группы D^t_{rs}. Пусть $f_i = v_{t-1}^{-1}e_iv_{t-1} = u_id_iu_i^{-1}$, где $u_i = v_{t-1}^{-1}v_t$ $(i = 1, 2, \dots t\ )$. Ясно, что

$$f_i^r = f_{i+1}^s \quad (i = 1, 2, \dots t-1). \tag{6}$$

Заметим также, что так как $u_{t-1} = 1$, элемент u_t лежит в централизаторе объединяемой подгруппы разложения (5). Обозначая подгруппу группы D^t_{rs}, порождаемую подгруппой D^{t-1}_{rs} и элементом f_t через C, с учетом леммы 3 имеем

$$C = (D^{t-1}_{rs} * \langle f_t\rangle; d^r_{t-1} = f^s_t). \tag{7}$$

Из предложения 7 и условия $r \nmid s$ следует, что для любого $i = 1, 2, \dots t-2$ каждый из элементов d_i^r и d_{i+1}^s не может быть сопряженным в группе D^{t-1}_{rs} с элементом вида d^{rx}_{t-1} $(x \in \mathbb{Z})$, т. е. с элементом из объединяемой подгруппы разложения (5) группы D^t_{rs}. Поскольку для каждого $i = 1, 2, \dots t-2$ в группе D^t_{rs} выполнены равенства

$$(u_i^{-1}ui+1)^{-1}d_iru_i^{-1}ui+1 = di+1^s,$$

из теоремы Солитэра ([2, теорема 4.6]) следует, что все элементы $u_i^{-1}ui+1$ $(i = 1, 2, \dots t-2)$ должны принадлежать подгруппе D^{t-1}_{rs}. Так как $u_{t-1} = 1$, для каждого $i = 1, 2, \dots t-1$ имеем $u_i \in D^{t-1}_{rs}$ и потому $f_i \in D^{t-1}_{rs}$. По индуктивному предположению подгруппа F, порождаемая элементами f_1, f_2, ... , f_{t-1}, определяется соотношениями

$$f_i^r = f_{i+1}^s \quad (i = 1, 2, \dots t-2).$$

Так как $d_{t-1} = f_{t-1} \in F$, подгруппа F содержит объединяемую подгруппу разложения (7) группы C, и по теореме Х.Нейман подгруппа, порождаемая в C подгруппой F и элементом f_t, является свободным произведением групп F и $\langle f_t \rangle$ с тем же объединением. Таким образом, группа $v_{t-1}^{-1} E v_{t-1}$ в системе порождающих $f_1, f_2, \ldots, f_t$ определяется соотношениями (6), и индукция завершена.

Пусть теперь $r = s$. В этом случае группа D_{rs}^t является свободным произведением t бесконечных циклических групп с одной объединенной подгруппой. Поскольку понятие несократимой записи элемента, введенное выше для случая двух сомножителей, и связанные с ним свойства переносятся без изменений на этот более общий случай, здесь достаточно показать, что произвольное выражение вида

$$e_{i_1}^{k_1} e_{i_2}^{k_2} \cdots e_{i_l}^{k_l},$$

где $l \geqslant 1$, $k_j \neq 0$ и при $l > 1$ $i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, l-1)$ и $r \nmid k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, является неединичным элементом. Так как центр группы D_{rs}^t порождается элементом d_1^r, а фактор-группа по центру является обычным свободным произведением t циклических групп порядка r, переход к образам при естественном гомоморфизме группы D_{rs}^t на фактор-группу по центру сводит требуемое утверждение к следующему хорошо известному (см., напр., [16, стр. 71]) свойству обычных свободных произведений:

Если группа A является свободным произведением некоторого семейства групп $\left(A_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda}$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ фиксирован элемент $v_\lambda \in A$, то подгруппа, порождаемая в A семейством подгрупп $\left(v_\lambda A_\lambda v_\lambda^{-1}\right)_{\lambda \in \Lambda}$, является свободным произведением этих групп.

Предложение 9 доказано.

§ 2. Другое представление группы $\overline{H}_{mn}$ порождающими и определяющими соотношениями

Обозначим через K_{mn} группу, заданную порождающими x_{ij}, где целые числа i и j удовлетворяют условиям $j > 0$ и $|i| \leqslant j$, и определяющими соотношениями

$$x_{ij}^{m_1} = x_{i+1,j}^{n_1} \quad (j > 0, -j \leqslant i < j) \tag{8}$$

$$x_{ij} = x_{i,j+1}^{pq} \quad (j > 0, |i| \leqslant j). \tag{9}$$

Покажем, что группа $\overline{H}_{mn}$, порождающие и определяющие соотношения которой указаны в предложении 5, изоморфна группе K_{mn}.

Предложение 10. *Отображение φ множества b_i $(i \in \mathbb{Z})$ порождающих группы $\overline{H}_{mn}$ в группу K_{mn}, определяемое равенствами*

$$b_i \varphi = x_{ij}^{p^{j+i} q^{j-i}}, \tag{10}$$

где j — произвольное целое число, удовлетворяющее условию $j \geqslant |i|$, продолжаемо до гомоморфизма (также обозначаемого через φ) группы $\overline{H}_{mn}$ в группу K_{mn}.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что для любых целых чисел i, j и s таких, что $|i| \leqslant j$ и $s \geqslant 0$, в силу соотношений (9) в группе K_{mn} выполнено равенство

$$x_{ij} = x_{i,j+s}^{(pq)^s}.$$

Поэтому для произвольных целых i, k и l таких, что $|i| \leqslant k < l$, имеем

$$x_{il}^{p^{l+i}q^{l-i}} = (x_{il}^{(pq)^{l-k}})^{p^{k+i}q^{k-i}} = x_{ik}^{p^{k+i}q^{k-i}},$$

так что равенствами (10) отображение φ определено корректно.

Поскольку при $j \geqslant |i+1|$ в силу соотношений (8)

$$\left(x_{ij}^{p^{j+i}q^{j-i}}\right)^m = \left(x_{ij}^{m_1}\right)^{p^{j+i+1}q^{j-i}} = \left(x_{i+1,j}^{n_1}\right)^{p^{j+i+1}q^{j-i}} = \left(x_{i+1,j}^{p^{j+(i+1)}q^{j-(i+1)}}\right)^n,$$

определяющие соотношения (4) группы $\overline{H}_{mn}$ при отображении φ переходят в равенства, справедливые в группе K_{mn}. Аналогичное утверждение о соотношениях (5) очевидно ввиду выводимых из (8) равенств $x_{ij}^{m_1^k} = x_{i+k,j}^{n_1^k}$, и предложение 10 доказано.

Далее, для каждой пары целых чисел i и j, где $j > 0$ и $|i| \leqslant j$, фиксируем тройку целых чисел α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij} таких, что

$$n_1^{j+i}m_1^{j-i}q^{2j}\alpha_{ij} + p^{j+i}q^{j-i}\beta_{ij} + n_1^{j+i}m_1^{j-i}p^{2j}\gamma_{ij} = 1, \tag{11}$$

и определим элементы группы $\overline{H}_{mn}$ вида

$$c_{ij} = b_{-j}^{m_1^{2j}\alpha_{ij}} b_i^{\beta_{ij}} b_j^{n_1^{2j}\gamma_{ij}}. \tag{12}$$

Предложение 11. *Определенные в* (12) *элементы* c_{ij} *группы* $\overline{H}_{mn}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$c_{ij}^{m_1} = c_{i+1,j}^{n_1} \quad (j > 0, -j \leqslant i < j) \tag{13}$$

$$c_{ij} = c_{i,j+1}^{pq} \quad (j > 0, |i| \leqslant j), \tag{14}$$

так что существует гомоморфизм ψ *группы* K_{mn} *в группу* $\overline{H}_{mn}$ *такой, что для любых* i *и* j, *где* $j > 0$ *и* $|i| \leqslant j$, $x_{ij}\psi = c_{ij}$. *Кроме того, гомоморфизмы* φ *и* ψ *взаимно обратны, так что группы* $\overline{H}_{mn}$ *и* K_{mn} *изоморфны.*

Доказательство. Из соотношений (5) следует, что при $|i| \geqslant j$ элементы $b_{-j}^{m_1^{2j}}$, b_i и $b_j^{n_1^{2j}}$ попарно перестановочны, откуда с учетом (11) получаем

$$c_{ij}^{p^{j+i}q^{j-i}} = b_i \tag{15}$$

для любых i и j, $j > 0$ и $|i| \leqslant j$. В частности, $b_{-j} = c_{-j,j}^{q^{2j}}$ и $b_j = c_{j,j}^{p^{2j}}$, и потому равенства (12) принимают вид

$$c_{ij}^{n_1^{j+i}m_1^{j-i}(q^{2j}\alpha_{ij}+p^{2j}\gamma_{ij})} = c_{-j,j}^{m_1^{2j}q^{2j}\alpha_{ij}} c_{jj}^{n_1^{2j}p^{2j}\gamma_{ij}} \tag{16}$$

При $i=-j$ и $i=j$ отсюда получаем соответственно

$$c_{-j,j}^{m_1^{2j}p^{2j}\gamma_{-j,j}} = c_{j,j}^{n_1^{2j}p^{2j}\gamma_{-j,j}}$$

и

$$c_{-j,j}^{m_1^{2j}q^{2j}\alpha_{j,j}} = c_{j,j}^{n_1^{2j}q^{2j}\alpha_{j,j}}.$$

С другой стороны, из (15) и (3) получаем

$$c_{-j,j}^{(m_1pq)^{2j}} = c_{j,j}^{(n_1pq)^{2j}}.$$

Так как в силу (11) $(\gamma_{-j,j}, q^{2j}) = (\alpha_{j,j}, p^{2j}) = (p,q) = 1$, отсюда следует, что при любых $j>0$

$$c_{-j,j}^{m_1^{2j}} = c_{j,j}^{n_1^{2j}}. \tag{17}$$

Теперь соотношение (16) можно переписать в виде

$$c_{ij}^{n_1^{j+i}m_1^{j-i}(q^{2j}\alpha_{ij}+p^{2j}\gamma_{ij})} = c_{-j,j}^{m_1^{2j}(q^{2j}\alpha_{ij}+p^{2j}\gamma_{ij})}.$$

Кроме того, из соотношений (15) и (3) получаем

$$c_{ij}^{n_1^{j+i}p^{j+i}q^{2j}} = c_{-j,j}^{m_1^{j+i}p^{j+i}q^{2j}}.$$

Поскольку из (11) следует, что при $i<j$ числа $p^{j+i}q^{2j}$ и $m_1^{j-i}(q^{2j}\alpha_{ij}+p^{2j}\gamma_{ij})$ взаимно просты, два последних соотношения при $i<j$ равносильны равенству

$$c_{ij}^{n_1^{j+i}} = c_{-j,j}^{m_1^{j+i}}. \tag{18}$$

В действительности, равенство (18) справедливо при любых i и j таких, что $|i|\leqslant j$, поскольку при $i=j$ (18) совпадает с (17).

Пусть теперь $-j\leqslant i<j$. Из (18) имеем

$$c_{ij}^{m_1n_1^{j+i}} = c_{i+1,j}^{n_1^{j+i+1}}.$$

С другой стороны, из (15) и (3) следует, что

$$c_{ij}^{m_1p^{j+i+1}q^{j-i}} = c_{i+1,j}^{n_1p^{j+i}q^{j-i}},$$

и так как числа n_1^{j+i} и $p^{j+i}q^{j-i}$ взаимно просты, из двух последних равенств получаем соотношение (13).

Для доказательства справедливости соотношений (14) заметим сначала, что в группе $\overline{H}_{mn}$ при любых i и j, $|i|\leqslant j$, имеют место соотношения

$$b_{-(j+1)}^{m_1^{2(j+1)}pq} = c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i}m_1^{(j+1)-i}q^{2(j+1)}}$$

и

$$b_{j+1}^{n_1^{2(j+1)}pq} = c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} p^{2(j+1)}}.$$

Действительно, из соотношений (13) следует, что для любого целого $k \geqslant 0$ такого, что $i + k \leqslant j$, в группе $\overline{H}_{mn}$ выполнено равенство $c_{ij}^{m_1^k} = c_{i+k,j}^{n_1^k}$. Отсюда с учетом (3), (11) и отмеченных выше равенств $b_{-j} = c_{-j,j}^{q^{2j}}$ и $b_j = c_{j,j}^{p^{2j}}$ получаем

$$b_{-(j+1)}^{m_1^{2(j+1)}pq} = \left(b_{-(j+1)}^{m}\right)^{m_1^{2j+1}q} = b_{-j}^{nm_1^{2j+1}q} = \left(c_{-j,j}^{q^{2j}}\right)^{n_1 m_1^{2j+1} q^2} =$$
$$\left(c_{-j,j}^{m_1^{j+i}}\right)^{n_1 m_1^{j-i+1} q^{2(j+1)}} = \left(c_{ij}^{n_1^{j+i}}\right)^{n_1 m_1^{j-i+1} q^{2(j+1)}} = c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} q^{2(j+1)}}$$

и

$$b_{j+1}^{n_1^{2(j+1)}pq} = \left(b_{j+1}^{n}\right)^{n_1^{2j+1}p} = b_j^{mn_1^{2j+1}p} = \left(c_{jj}^{p^{2j}}\right)^{m_1 n_1^{2j+1} p^2} =$$
$$\left(c_{jj}^{n_1^{j-i}}\right)^{m_1 n_1^{j+i+1} p^{2(j+1)}} = \left(c_{ij}^{m_1^{j-i}}\right)^{m_1 n_1^{j+i+1} p^{2(j+1)}} = c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} p^{2(j+1)}}.$$

Теперь используя (12), (15) и эти соотношения, с учетом (11) получаем

$$c_{i,j+1}^{pq} = \left(b_{-(j+1)}^{m_1^{2(j+1)}\alpha_{i,j+1}} b_i^{\beta_{i,j+1}} b_{j+1}^{n_1^{2(j+1)}\gamma_{i,j+1}}\right)^{pq} =$$
$$\left(b_{-(j+1)}^{m_1^{2(j+1)}pq}\right)^{\alpha_{i,j+1}} \cdot b_i^{\beta_{i,j+1}pq} \cdot \left(b_{j+1}^{n_1^{2(j+1)}pq}\right)^{\gamma_{i,j+1}} =$$
$$\left(c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} q^{2(j+1)}}\right)^{\alpha_{i,j+1}} \cdot \left(c_{ij}^{p^{j+i} q^{j-i}}\right)^{\beta_{i,j+1}pq} \cdot \left(c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} p^{2(j+1)}}\right)^{\gamma_{i,j+1}} =$$
$$c_{ij}^{n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} q^{2(j+1)} \alpha_{i,j+1} + p^{(j+1)+i} q^{(j+1)-i} \beta_{i,j+1} + n_1^{(j+1)+i} m_1^{(j+1)-i} p^{2(j+1)} \gamma_{i,j+1}} = c_{ij},$$

так что соотношения (14) выполнены.

В силу определений отображений φ и ψ и выполнимости соотношения (15) справедливость равенства $b_i(\varphi\psi) = b_i$ при любом целом i очевидна. Поскольку, далее, для любых i и j, $|i| \leqslant j$,

$$x_{ij}\psi = b_{-j}^{m_1^{2j}\alpha_{ij}} b_i^{\beta_{ij}} b_j^{n_1^{2j}\gamma_{ij}},$$

$$b_{-j}^{m_1^{2j}}\varphi = \left(x_{-j,j}^{q^{2j}}\right)^{m_1^{2j}} = \left(x_{-j,j}^{m_1^{j+i}}\right)^{m_1^{j-i} q^{2j}} = x_{ij}^{n_1^{j+i} m_1^{j-i} q^{2j}}$$

и

$$b_j^{n_1^{2j}}\varphi = \left(x_{jj}^{p^{2j}}\right)^{n_1^{2j}} = \left(x_{jj}^{n_1^{j-i}}\right)^{n_1^{j+i} p^{2j}} = x_{ij}^{n_1^{j+i} m_1^{j-i} p^{2j}},$$

имеем

$$x_{ij}(\psi\varphi) = x_{ij}^{n_1^{j+i} m_1^{j-i} q^{2j}\alpha_{ij}} \cdot x_{ij}^{p^{j+i} q^{j-i}\beta_{ij}} \cdot x_{ij}^{n_1^{j+i} m_1^{j-i} p^{2j}\gamma_{ij}} = x_{ij}.$$

Таким образом, отображения φ и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами, и предложение 11 доказано.

Предложение 12. *Группа $\overline{H}_{mn}$ в системе порождающих c_{ij} (определенных в* (12)*) определяется соотношениями* (13) *и* (14)*. Для каждого $j>0$ подгруппа L_j группы $\overline{H}_{mn}$, порождаемая элементами c_{ij}, где $|i| \leqslant j$, изоморфна группе $D^{2j+1}_{m_1 n_1}$, а группа $\overline{H}_{mn}$ совпадает с объединением возрастающей последовательности подгрупп L_j.*

В самом деле, первое утверждение этого предложения вытекает из предложения 11, а остальные ввиду взаимной простоты числа pq с каждым из чисел m_1 и n_1 следуют из предложения 6.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Начнем с простого вспомогательного утверждения:

Лемма 4. *Пусть элементы a и b группы G имеют равные конечные порядки и $a^m = b^n$ для некоторых целых чисел m и n. Тогда в группе G выполнены равенства $\left[a^d, b\right] = 1 = \left[a, b^d\right]$, где $d=(m,n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n.*

Действительно, если s обозначает порядок каждого из элементов a и b, то из совпадения элементов a^m и b^n следует равенство $(m,s)=(n,s)$. Следовательно, наибольший общий делитель (m,s) чисел m и s является общим делителем чисел m и n, а потому — делителем числа d. Поэтому сравнение $mx \equiv d \pmod{s}$ имеет решение x_0. Тогда $a^d = a^{mx_0} = b^{nx_0}$, так что $\left[a^d, b\right] = 1$. Аналогично, $\left[a, b^d\right]$.

Предложение 13. *Если $m_1 \neq n_1$, то группа $\overline{G}_{mn}$ не является финитно аппроксимируемой.*

Доказательство. Из предложения 12 следует, что подгруппа M группы $\overline{G}_{mn}$, порождаемая элементами c_{01} и c_{11}, является свободным произведением двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой:

$$M = \langle c_{01}, c_{11};\ c_{01}^{m_1} = c_{11}^{n_1} \rangle.$$

Так как $m_1 \neq n_1$, наибольший общий делитель d чисел m_1 и n_1 должен быть отличным хотя бы от одного из этих чисел; будем для определенности считать, что $d < m_1$. Поскольку, к тому же, из условия $m_1 \neq n_1$ следует, очевидно, что оба числа m_1 и n_1 отличны от 1, запись $\left[c_{01}^d, c_{11}\right] = c_{01}^{-d} c_{11}^{-1} c_{01}^d c_{11}$ коммутатора элементов c_{01}^d и c_{11} является несократимой в указанном разложении группы M, так что этот коммутатор является неединичным элементом группы $\overline{G}_{mn}$.

С другой стороны, пусть N — нормальная подгруппа группы $\overline{G}_{mn}$, по модулю которой порядок элемента b конечен. Из равенств (12) и (15) и попарной перестановочности в группе $\overline{G}_{mn}$ элементов $b_{-j}^{m_1^{2j}}$, b_i и $b_j^{n_1^{2j}}$ следует, что тот же порядок по модулю N имеют все элементы c_{ij}. Тогда по лемме 4 коммутатор $\left[c_{01}^d, c_{11}\right]$ должен принадлежать подгруппе N. Таким образом, указан неединичный элемент группы $\overline{G}_{mn}$, входящий в каждую ее подгруппу конечного индекса. Предложение доказано.

Будем считать теперь, что $m_1 = n_1$. Выберем целое число $s > 1$, взаимно простое с каждым из чисел p и q и кратное числу m_1. Фиксируем также (для каждого такого s) число t, удовлетворяющее сравнению $pt \equiv q \pmod{s}$, и введем в рассмотрение группу

$$T_s = \langle x, y;\ y^s = 1,\ x^{-1}y^{m_1}x = y^{m_1 t}\rangle.$$

Поскольку в циклической группе порядка s с порождающим y элементы y^{m_1} и $y^{m_1 t}$ порождают одну и ту же подгруппу, группа T_s является HNN-расширением с проходной буквой x конечной циклической группы порядка s, порождаемой элементом y. В частности, группа T_s финитно аппроксимируема.

Поскольку в группе T_s выполнены равенства

$$x^{-1}y^m x = y^{m_1 tp} = y^{m_1 q} = y^n$$

и для любого целого $k > 0$

$$x^{-k}y^{m_1^k}x^k = y^{(m_1 t)^k}, \quad x^k y^{m_1^k} x^{-k} = y^{(m_1 t')^k},$$

где t' находится из сравнения $tt' \equiv 1 \pmod{s}$, существует гомоморфизм θ_s группы $\overline{G}_{mn}$ в группу T_s такой, что $a\theta_s = x$ и $b\theta_s = y$.

Финитная аппроксимируемость группы $\overline{G}_{mn}$ вытекает теперь из следующего утверждения:

Предложение 14. *Для любого неединичного элемента g группы $\overline{G}_{mn}$ найдется число s такое, что $g\theta_s \neq 1$.*

Доказательство. Пусть R_s обозначает нормальное замыкание в группе T_s элемента y. Метод Рейдемейстера – Шрейера показывает, что группа R_s в системе порождающих $y_i = x^i y x^{-1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ определяется соотношениями

$$y_i^s = 1,\ y_i^{m_1} = y_{i+1}^{m_1 t} \qquad (i \in \mathbb{Z}),$$

т. е. является свободным произведением с одной объединенной подгруппой счетного семейства конечных циклических групп порядка s. Заметим, что в этом случае (когда $m_1 = n_1$) каждая подгруппа L_j группы $\overline{H}_{mn}$ является свободным произведением с одной объединенной подгруппой $2j+1$ бесконечных циклических групп с порождающими c_{ij} $(|i| \leqslant j)$, причем в каждом из сомножителей объединяемая подгруппа порождается элементом $c_{ij}^{m_1}$.

Пусть теперь g — неединичный элемент группы $\overline{G}_{mn}$. Если элемент g не входит в подгруппу $\overline{H}_{mn}$, то поскольку эта подгруппа совпадает, как легко видеть, с полным прообразом относительно θ_s подгруппы R_s, элемент $g\theta_s$ отличен от единицы при любом выборе s.

Если $g \in \overline{H}_{mn}$, то для некоторого j элемент g лежит в подгруппе L_j. Предположим сначала, что длина несократимой записи (в указанном разложении в свободное произведение с объединенной подгруппой группы L_j) элемента g больше 1. Произвольный слог этой записи имеет вид c_{ij}^r, где число r не делится на m_1. Из соотношений (15) следует, что при любом s (для которого определены группа T_s и отображение θ_s)

$$c_{ij}\theta_s = y_i^{p_1^{j+i}q_1^{j-i}},$$

где числа p_1 и q_1 определяются из сравнений $pp_1 \equiv 1 \equiv qq_1 \pmod{s}$. Принадлежность элемента $c_{ij}^r\theta_s$ объединяемой подгруппе разложения группы R_s означала бы поэтому, что для некоторого целого числа u выполнено сравнение

$$rp_1^{j+i}q_1^{j-i} \equiv m_1 u \pmod{s}.$$

Но это невозможно, поскольку ввиду того, что m_1 делит s и взаимно просто с числами p_1 и q_1, отсюда следовало бы, что r должно делиться на m_1.

Таким образом, если длина несократимой записи в группе L_j элемента g больше 1, то при любом выборе s образ этого элемента относительно отображения θ_s имеет ту же длину в группе R_s и потому отличен от единицы. Если же элемент g имеет вид c_{ij}^r, то $r \neq 0$, и в этом случае достаточно выбрать s так, чтобы $s > |r|$: если при этом $g\theta_s = 1$, то $rp_1^{j+i}q_1^{j-i} \equiv 0 \pmod{s}$, т. е. r должно делиться на s, что невозможно.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть φ — сюръективный эндоморфизм группы G_{mn}. Ввиду предложения 4 φ индуцирует эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы $\overline{G}_{mn} = G_{mn}/K(\alpha)$, и мы покажем, что $\overline{\varphi}$ инъективен. Поскольку $\overline{H}_{mn}$ является единственной нормальной подгруппой группы $\overline{G}_{mn}$, фактор-группа по которой бесконечная циклическая, то $\overline{H}_{mn}\overline{\varphi} = \overline{H}_{mn}$ и отображение $\overline{\varphi}$ индуцирует автоморфизм фактор-группы $\overline{G}_{mn}/\overline{G}_{mn}$. Поэтому нам достаточно установить инъективность действия $\overline{\varphi}$ на подгруппе $\overline{H}_{mn}$.

Предложение 1 позволяет без потери общности считать, что $b\varphi = b^r$, причем число r ввиду предложения 2 взаимно просто с каждым из чисел m_1 и n_1. Обозначим, кроме того, $w = a\varphi$. Нетрудно видеть, что $w = w_0 a$, где $w_0 \in H_{mn}$ (см., напр., лемму 1 на с. 488 работы [11]; условие взаимной простоты чисел m и n в ее формулировке излишне). Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$b_k\varphi = (a^k b a^{-k})\varphi = u_k b_k^r u_k^{-1},$$

где $u_k = w^k a^{-k} \in H_{mn}$. В группе $\overline{G}_{mn}$ из равенства (15) получаем

$$(c_{ij}\overline{\varphi})^{p^{j+i}q^{j-i}} = b_i\overline{\varphi} = (u_i c_{ij} u_i^{-1})^{p^{j+i}q^{j-i}},$$

откуда в силу предложений 12 и 8 имеем

$$c_{ij}\overline{\varphi} = u_i c_{ij} u_i^{-1}.$$

Пусть теперь элемент $h \in \overline{H}_{mn}$ содержится в ядре эндоморфизма $\overline{\varphi}$. Выберем натуральное число j_0 так, чтобы $h \in L_{j_0}$, и пусть число $j_1 \geqslant j_0$ таково, что подгруппа L_{j_1} содержит все элементы u_i, где $|i| \leqslant j_0$. Определим, далее, семейство элементов v_i подгруппы L_{j_1}, $|i| \leqslant j_1$, полагая $v_i = u_i$, если $|i| \leqslant j_0$, $v_i = v_{j_0}$, если $j_0 < i \leqslant j_1$, и $v_i = v_{-j_0}$, если $-j_1 \leqslant i < -j_0$. Поскольку тогда для всех i, $-j_1 \leqslant i < j_1$, выполнены равенства

$$v_i c_{i,j_1}^{m_1 r} v_i^{-1} = v_{i+1} c_{i+1,j_1}^{n_1 r} v_{i+1}^{-1},$$

отбражение, переводящее элемент c_{ij} $v_i c_{ij} v_i^{-1}$, $|i| \leqslant j_1$, определяет эндоморфизм ψ группы L_{j_1}. Из предложений 12 и 9 следует, что ядро его тривиально, и так как действие ψ на подгруппе L_{j_0} совпадает с действием отображения $\overline{\varphi}$, заключаем, что $h = 1$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Вольвачев Р. Т.* О линейной представимости некоторых групп с одним определяющим соотношением // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 9. С. 777–779.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
3. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8, № 3, С. 405–422.
4. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах // VII Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. Красноярск, 1980. С. 72.
5. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы. Ч. 2. Ленинград, 1981. С. 91–92.
6. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением II // XVII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Ч. 1. Минск, 1983. С. 130
7. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
8. *Anshel M.* Non-hopfian groups with fully invariant kernels. Part 1 // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 170. P. 231–237. Non-hopfian groups with fully invariant kernels. Part 2 // J. Algebra. 1973. V. 24. P. 473–485.
9. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, № 3. P. 199–201.
10. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. London Math. Soc. (2). 1977. V. 16. P. 232–234.
11. *Collins D.* The automorphism towers of some one-relator groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1978. V. 36. P. 480–493.
12. Hirshon R. The intersection of the subgroups of finite index in some finitely presented groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53, № 1. P. 32–36.
13. *Karrass A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150. P. 227–255.
14. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.
15. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Roy. Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503–554.
16. *Newman M., Sicher J.* Free products of Hopf groups // Math. Z. 1973. V. 135, № 1. P. 69–72.