Украинский математический журнал
Том 43 (1991), № 12. С. 1684 – 1686

Д. И. Молдаванский

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ГРУПП БАУМСЛАГА-СОЛИТЕРА

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две группы, каждая из которых определяется одним соотношением вида $a^{-1}b^m a = b^n$, были изоморфны.

Одержані необхідні і достатні умови для того, щоб дві групи, кожна з яких визначається одним співвідношенням вигляду $a^{-1}b^m a = b^n$, були ізоморфні.

УДК 512.544.

Группами Баумслага – Солитэра в последнее время называют группы вида $G(m,n) = \langle a,b; a^{-1}b^m a = b^n\rangle$, где m и n — ненулевые целые числа. Первые примеры нехопфовых групп с одним определяющим соотношением были обнаружены в 1962 г. Баумслагом и Солитером [1] именно среди групп этого семейства. Впоследствии различные свойства этих групп привлекали внимание ряда авторов (достаточно полный список публикаций приведен в [2]), однако вопрос об их изоморфизме до сих пор не рассматривался. Целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Группы $G(m,n)$ и $G(p,q)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для подходящего $\varepsilon = \pm 1$ либо $m = p\varepsilon$ и $n = q\varepsilon$, либо $m = q\varepsilon$ и $n = p\varepsilon$.*

Достаточность условий теоремы очевидна. Для доказательства *необходимости* нам понадобится ряд свойств групп $G(m,n)$.

Непосредственно из определения видно, что каждая такая группа является HNN-расширением с проходной группой a бесконечной циклической группы, порождаемой элементом b. Все понятия, связанные с этой конструкцией, а также свойства ее, используемые здесь, можно найти в [3]. В частности, из леммы Коллинза легко получаем известное утверждение.

Предложение 1. *Если степени g^r и g^s элемента g группы $G(m,n)$ сопряжены в этой группе, причем $|r| \neq |s|$, то элемент g сопряжен с элементом b^k для подходящего целого числа k.*

Предложение 2. *Пусть $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, где $d = (m,n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n. Для произвольных различных целых чисел p и q элементы b^p и b^q сопряжены в группе $G(m,n)$ в точности тогда, когда существуют целые числа i и l, где $i > 0$, такие, что либо $p = m_1^i dl$ и $q = n_1^i dl$, либо $p = n_1^i dl$ и $q = m_1^i dl$.*

Предложение 2, по-видимому, тоже известно и может быть легко получено из предложения 7 статьи [2] или непосредственной индукцией по длине приведенной записи трансформирующего элемента.

Предложение 3 (лемма 2.1 из [4]). *Пусть* $|m| \neq |n|$. *Для любого целого числа* $k \neq 0$ *централизатор элемента* a^k *в группе* $G(m,n)$ *порождается элементом* a.

Предложение 4. *Для произвольного целого числа* k *нормальное замыкание в группе* $G(m,n)$ *элемента* b^k *совпадает с нормальным замыканием элемента* b *тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа* k *является делителем в точности одного из чисел* m *и* n.

Доказательство. Предположим сначала, что существует простой делитель p числа k такой, что $(m,p) = (n,p)$. Тогда фактор-группа

$$G(m,n)/(b^p)^{G(m,n)} = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n, b^p = 1\rangle$$

является HNN-расширением циклической группы порядка p и потому не может быть бесконечной циклической. Следовательно, $(b^p)^{G(m,n)} \neq (b)^{G(m,n)}$ и, тем более, $(b^k)^{G(m,n)} \neq (b)^{G(m,n)}$.

Обратно, пусть $k = pk'$, $m = pm'$ и $(n,p) = 1$. Выбирая целые числа x и y так, чтобы $nx + py = 1$, получаем

$$b^{k'} = b^{nk'x}b^{k'py} = (a^{-1}b^k a)^{m'x}(b^k)^y.$$

Следовательно, элемент $b^{k'}$ лежит в нормальном замыкании элемента b^k, и доказательство завершается очевидной индукцией.

Предложение 5. *Пусть* $|m| > |n|$, $|p| > |q|$ *и пусть существует эпиморфизм группы* $G(p,q)$ *на группу* $G(m,n)$. *Тогда для подходящих целых чисел* i *и* l, *где* $i > 0$, *выполнены равенства* $p = m_1^i dl$ *и* $q = n_1^i dl$ *(где снова* $d = (m,n)$, $m = m_1 d$, $n = n_1 d$*).*

Доказательство. Обозначим через u и v образы при этом эпиморфизме соответственно элементов a и b группы $G(p,q)$. Тогда в группе $G(m,n)$ должно выполняться равенство $u^{-1}v^p u = v^q$, и ввиду предложения 1 можно считать, что $v = b^k$ для подходящего целого k. Из предложения 2 теперь следует, что $pk = m_1^i dl$ и $qk = n_1^i dl$ для некоторых $i > 0$ и l. Так как числа m_1^i и n_1^i взаимно просты, $(pk, qk) = dl$, и потому число k является делителем числа dl.

Далее, в каждой из групп $G(m,n)$ и $G(p,q)$ нормальное замыкание элемента b является единственной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой бесконечная циклическая. Поэтому $(b^k)^{G(m,n)} = (b)^{G(m,n)}$, и из предложения 4 получаем $(k,d) = 1$. Значит, число k является делителем числа l.

Предложение 6. *А. Группа* $G(m,n)$ *обладает неединичной циклической нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда* $|m| = |n|$.

Б. Если $|m| = |n| > 1$, *то каждая циклическая нормальная подгруппа группы* $G(m,n)$ *содержится в подгруппе, порожденной элементом* b^n.

В. Группа $G(m,n)$ обладает нееdиничным центром тогда и только тогда, когда $m = n$ или $|m| = |n| = 1$.

Доказательство. Пусть $|m| \neq |n|$; без потери общности можем считать, что $|m| > n > 0$. Если инвариантная циклическая подгруппа группы $G(m,n)$ порождается элементом $g \neq 1$, то этот элемент должен принадлежать централизатору элемента a^2, и ввиду предложения 3 $g = a^k$ для подходящего целого $k \neq 0$. Равенство $b^{-1}a^k b = a^{k\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, показывает, что запись $b^{-1}a^k b a^{-k\varepsilon}$ не может быть приведенной. Так как $|m| > n > 0$, отсюда получаем $n = 1$, $k > 0$ и $\varepsilon = 1$. Теперь из определяющего соотношения $a^{-1}b^m a = b$ следует, что $a^k b a^{-k} = b^{m^k}$, и так как $ba^k = a^k b$, имеем $b^{m^k - 1} = 1$ и потому $|m| = 1$. Пришли к противоречию.

Если $|m| = |n|$, циклическая подгруппа H, порожденная элементом b^m, является нормальной подгруппой группы $G(m,n)$. Фактор-группа $G(m,n)/H$ разлагается в свободное произведение двух циклических групп: бесконечной и конечной порядка $|m|$. Поэтому при $|m| > 1$ в этой фактор-группе нет неединичных нормальных циклических подгрупп, что и доказывает утверждение Б.

Если $m = n$, элемент b^m централен. Группа $G(1,1)$ абелева, а центр группы $G(-1,1)$ порождается элементом a^2. При $n > 1$ группа $G(-n,n)$ является свободным произведением группы $G(-1,1)$ и бесконечной циклической группы с объединенной подгруппой, которая порождается в группе $G(-1,1)$ элементом b и не совпадает ни с одним из сомножителей. Поскольку объединяемая подгруппа не пересекается с центром группы $G(-1,1)$, центр группы $G(-n,n)$ при $n > 1$ тривиален [5, с. 221].

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть группы $G(m,n)$ и $G(p,q)$ изоморфны и $|m| \geqslant n > 0$ и $|p| \geqslant q > 0$. Покажем, что тогда $m = p$ и $n = q$.

Если $|m| = n$, то из предложения 6, п. А, следует, что $|p| = q$. Так как в каждой из групп $G(1,1)$ и $G(-1,1)$ есть две неединичные нормальные циклические нормальные подгруппы, пересечение которых тривиально (в группе $G(1,1)$ они порождаются элементами a и b, а в группе $G(-1,1)$ — элементами a^2 и b), из предложения 6, п. Б, следует, что $n = 1$ в точности тогда, когда $q = 1$. Кроме того, группа $G(1,1)$ абелева, а группа $G(-1,1)$ нет. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $n > 1$ и $q > 1$. Циклические подгруппы, порождаемые в группах $G(m,n)$ и $G(p,q)$ элементами b^n и b^q соответственно, являются в них ввиду предложения 6, п. Б, максимальными циклическими нормальными подгруппами. При этом, в фактор-группах по этим подгруппам максимальный порядок элементов конечного порядка равен числам n и q соответственно. Поэтому $n = q$. Наконец, в силу предложения 6, п. В, центр группы $G(n,n)$ нетривиален, а группа $G(-n,n)$ без центра.

Предположим теперь, что $|m| > n$ и $|p| > q$. Введем обозначения

$$d = (m,n), \quad e = (p,q), \quad m = m_1 d, \quad n = n_1 d, \quad p = p_1 e, \quad q = q_1 e.$$

Из предложения 5 следует, что для подходящих положительных целых чисел i, j, k и l выполняются равенства

$$m = p_1^i el, \quad n = q_1^i el, \quad p = m_1^j dk, \quad q = r_1^j dk.$$

Ввиду того, что $(p_1^i, q_1^i) = (m_1^j, n_1^j) = 1$, отсюда получаем $el = d$, $m_1 = p_1^i$, $dk = e$ и $p_1 = m_1^j$. Так как $|m_1| > 1$, то $i = j = 1$. Кроме того, имеем $kl = 1$, откуда $k = l = 1$. Поэтому $m = p$ и $n = q$. Теорема доказана.

Замечание. До сих пор неизвестен ответ на вопрос, сформулированный автором в [6] (вопрос 3.33): будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Для групп Баумслага – Солитэра он решается положительно. В самом деле, пусть группы $G(m, n)$ и $G(p, q)$ гомоморфно отображаются друг на друга. Если, например, $|m| = |n|$, то группа $G(m, n)$ хопфова [1], и в этом случае группы изоморфны. Если же $|m| > |n|$ и $|p| > |q|$, то к тому же выводу приводят рассуждения, основанные на предложении 5 и дословно повторяющие предыдущий абзац.

Список цитированной литературы

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two generator one relator nonHopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, P. 199–201.
2. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением // М., 1986. 27 с. Деп. в ВИНИТИ, N 6671-В.
3. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
4. *Brunner A. M.* On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. V. 32, P. 414–420.
5. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
6. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) / В. Я. Блощицин, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин. Новосибирск, 1986.