УДК 512.544

Д. И. МОЛДАВАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Иванов. ун-т)

Об изоморфизме групп Бумслага — Солитэра

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две группы, каждая из которых определяется одним соотношением вида $a^{-1}b^m a = b^n$, были изоморфны.

Одержані необхідні і достатні умови для того, щоб дві групи, кожна з яких визначається одним співвідношенням вигляду $a^{-1}b^m a = b^n$, були ізоморфні.

Группами Баумслага—Солитэра в последнее время называют группы вида $G(m, n) = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n \rangle$, где m и n — ненулевые целые числа. Первые примеры нехопфовых групп с одним определяющим соотношением были обнаружены в 1962 г. Баумслагом и Солитэром [1] именно среди групп этого семейства. Впоследствии различные свойства этих групп привлекали внимание ряда авторов (достаточно полный список публикаций приведен в [2]), однако вопрос об их изоморфизме до сих пор не рассматривался. Целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Группы $G(m, n)$ и $G(p, q)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для подходящего $\varepsilon = \pm 1$ либо $m = p\varepsilon$ и $n = q\varepsilon$, либо $m = q\varepsilon$ и $n = p\varepsilon$.*

Достаточность условий теоремы очевидна. Для доказательства необходимости нам понадобится ряд свойств групп $G(m, n)$.

Непосредственно из определения видно, что каждая такая группа является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы, порождаемой элементом b. Все понятия, связанные с этой конструкцией, а также свойства ее, используемые здесь, можно найти в [3]. В частности, из леммы Коллинза легко получаем известное утверждение.

Предложение 1. *Если степени g^r и g^s элемента g группы $G(m, n)$ сопряжены в этой группе, причем $|r| \neq |s|$, то элемент g сопряжен с элементом b^k для подходящего целого числа k.*

Предложение 2. *Пусть $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, где $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n. Для произвольных различных целых чисел p и q элементы b^p и b^q сопряжены в группе $G(m, n)$ в точности тогда, когда существуют целые числа i и l, где $i > 0$, такие, что либо $p = m_1^i dl$ и $q = n_1^i dl$, либо $p = n_1^i dl$ и $q = m_1^i dl$.*

Предложение 2, по-видимому, тоже известно и может быть легко получено из предложения 7 статьи [2] или непосредственной индукцией по длине приведенной записи трансформирующего элемента.

Предложение 3 (лемма 2.1 из [4]). *Пусть $|m| \neq |n|$. Для любого целого числа $k \neq 0$ централизатор элемента a^k в группе $G(m, n)$ порождается элементом a.*

Предложение 4. *Для произвольного целого числа k нормальное замыкание в группе $G(m, n)$ элемента b^k совпадает с нормальным замыканием элемента b тогда и только тогда, когда каждый простой делитель числа k является делителем в точности одного из чисел m и n.*

Доказательство. Предположим сначала, что существует простой делитель p числа k такой, что $(m, p) = (n, p)$. Тогда фактор-группа

$$G(m, n)/(b^p)^{G(m,n)} = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n, \quad b^p = 1 \rangle$$

является HNN-расширением циклической группы порядка p и потому не может быть бесконечной циклической. Следовательно, $(b^p)^{G(m,n)} \neq \neq (b)^{G(m,n)}$ и, тем более, $(b^k)^{G(m,n)} \neq (b)^{G(m,n)}$.

Обратно, пусть $k = pk'$, $m = pm'$ и $(n, p) = 1$. Выбирая целые числа x и y так, чтобы $nx + py = 1$, получаем

$$b^{k'} = b^{nk'x}b^{k'py} = (a^{-1}b^k a)^{m'x} (b^k)^y.$$

Следовательно, элемент $b^{k'}$ лежит в нормальном замыкании элемента b^k, и доказательство завершается очевидной индукцией.

Предложение 5. *Пусть* $|m| > |n|$, $|p| > |q|$ *и пусть существует эпиморфизм группы* $G(p, q)$ *на группу* $G(m, n)$. *Тогда для подходящих целых чисел* i *и* l, *где* $i > 0$, *выполнены равенства* $p = m_1^i dl$ *и* $q = n_1^i dl$ *(где снова* $d = (m, n)$, $m = m_1 d$, $n = n_1 d$).

Доказательство. Обозначим через u и v образы при этом эпиморфизме соответственно элементов a и b группы $G(p, q)$. Тогда в группе $G(m, n)$ должно выполняться равенство $u^{-1}v^p u = v^q$, и ввиду предложения 1 можно считать, что $v = b^k$ для подходящего целого k. Из предложения 2 теперь следует, что $pk = m_1^i dl$ и $qk = n_1^i dl$ для некоторых $i > 0$ и l. Так как числа m_1^i и n_1^i взаимно просты, $(pk, qk) = dl$, и потому число k является делителем числа dl.

Далее, в каждой из групп $G(m, n)$ и $G(p, q)$ нормальное замыкание элемента b является единственной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой бесконечная циклическая. Поэтому $(b^k)^{G(m,n)} = (b)^{G(m,n)}$, и из предложения 4 получаем $(k, d) = 1$. Значит, число k является делителем числа l.

Предложение 6. А. *Группа* $G(m, n)$ *обладает неединичной циклической нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда* $|m| = |n|$.

Б. *Если* $|m| = |n| > 1$, *то каждая циклическая нормальная подгруппа группы* $G(m, n)$ *содержится в подгруппе, порожденной элементом* b^n.

В. *Группа* $G(m, n)$ *обладает неединичным центром тогда и только тогда, когда* $m = n$ *или* $|m| = |n| = 1$.

Доказательство. Пусть $|m| \neq |n|$; без потери общности можем считать, что $|m| > n > 0$. Если инвариантная циклическая подгруппа группы $G(m, n)$ порождается элементом $g \neq 1$, то этот элемент должен принадлежать централизатору элемента a^2, и ввиду предложения 3 $g = a^k$ для подходящего целого $k \neq 0$. Равенство $b^{-1}a^k b = a^{k\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, показывает, что запись $b^{-1}a^k ba^{-k\varepsilon}$ не может быть приведенной. Так как $|m| > n > 0$, отсюда получаем $n = 1$, $k > 0$ и $\varepsilon = 1$. Теперь из определяющего соотношения $a^{-1}b^m a = b$ следует, что $a^k ba^{-k} = b^{m^k}$, и так как $ba^k = a^k b$, имеем $b^{m^k-1} = 1$ и потому $|m| = 1$. Пришли к противоречию.

Если $|m| = |n|$, циклическая подгруппа H, порожденная элементом b^m, является нормальной подгруппой группы $G(m, n)$. Фактор-группа $G(m, n)/H$ разлагается в свободное произведение двух циклических групп: бесконечной и конечной порядка $|m|$. Поэтому при $|m| > 1$ в этой фактор-группе нет неединичных нормальных циклических подгрупп, что и доказывает утверждение Б.

Если $m = n$, элемент b^m централен. Группа $G(1, 1)$ абелева, а центр группы $G(-1, 1)$ порождается элементом a^2. При $n > 1$ группа $G(-n, n)$ является свободным произведением группы $G(-1, 1)$ и бесконечной циклической группы с объединенной подгруппой, которая порождается в группе $G(-1, 1)$ элементом b и не совпадает ни с одним из сомножителей. Поскольку объединяемая подгруппа не пересекается с центром группы $G(-1, 1)$, центр группы $G(-n, n)$ при $n > 1$ тривиален [5, с. 221].

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть группы $G(m, n)$ и $G(p, q)$ изоморфны и $|m| \geqslant n > 0$ и $|p| \geqslant q > 0$. Покажем, что тогда $m = p$ и $n = q$.

Если $|m| = n$, то из предложения 6, п. А, следует, что и $|p| = q$. Так как в каждой из групп $G(1,1)$ и $G(-1, 1)$ есть две неединичные нормальные циклические подгруппы, пересечение которых тривиально (в группе $G(1, 1)$ они порождаются элементами a и b, а в группе $G(-1, 1)$ — элементами a^2 и b), из предложения 6, п. Б, следует, что $n = 1$ в точности тогда, когда $q = 1$. Кроме того, группа $G(1, 1)$ абелева, а группа $G(-1, 1)$ нет. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $n > 1$ и $q > 1$. Циклические подгруппы, порождаемые в группах $G(m, n)$ и $G(p, q)$ элементами b^n и b^q соответственно, являются в них ввиду предложения 6, п. Б, максимальными циклическими нормальными подгруппами. При этом, в фактор-группах по этим подгруппам максимальный порядок элементов конечного порядка равен числам n и q соответственно. Поэтому $n = q$. Наконец, в силу предложения 6, п. В, центр группы $G(n, n)$ нетривиален, а группа $G(-n, n)$ без центра.

Предположим тепер., что $|m| > n$ и $|p| > q$. Введем обозначения

$$d = (m, n),\ e = (p, q),\ m = m_1 d,\ n = n_1 d,\ p = p_1 e,\ q = q_1 e.$$

Из предложения 5 следует, что для подходящих положительных чисел i, j, k и l выполняются равенства

$$m = p_1^i el, \quad n = q_1^i el, \quad p = m_1^j dk, \quad q = r_1^j dk.$$

Ввиду того, что $(p_1{}^i, q_1{}^i) = (m_1{}^j, n_1{}^j) = 1$, отсюда получаем $el = d$, $m_1 = p_1{}^i$, $dk = e$ и $p_1 = m_1{}^j$. Так как $|m_1| > 1$, то $i = j = 1$. Кроме того, имеем $kl = 1$, откуда $k = l = 1$. Поэтому $m = p$ и $n = q$. Теорема доказана.

Замечание. До сих пор неизвестен ответ на вопрос, сформулированный автором в [6] (вопрос 3.33): будут ли изоморфны две группы,, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Для групп Баумслага—Солитэра он решается положительно. В самом деле, пусть группы $G(m, n)$ и $G(p, q)$ гомоморфно отображаются друг на друга. Если, например, $|m| = |n|$, то группа $G(m, n)$ хопфова [1], и в этом случае группы изоморфны. Мсли же $|m| > |n|$ и $|p| > |q|$, то к тому же выводу приводят рассуждения, основанные на предложении 5 и дословно повторяющие предыдущий абзац.

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some two generator one relator nonHopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1962.— 68.— P. 199—201.
2. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением.— М., 1986.— 27 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 6671-В.
3. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп.— М. : Мир, 1980.— 447 с.
4. *Brunner A. M.* On a class of one-relator groups // Can. J. Math.— 1980.— 32, N 2.— P. 414—420.
5. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. — М. : Наука, 1974.— 455 с.
6. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) / В. Я. Блощицын, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин.— Новосибирск, 1986.— 132 с.

Получено 06.02.91