Д. И. Молдаванский

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ГРУПП И СВОБОДНЫЕ КОНСТРУКЦИИ*

На протяжении ряда лет на кафедре алгебры и математической логики проводятся исследования, направленные на изучение свойства финитной аппроксимируемости и близких к нему применительно к конструкциям свободного произведения групп с объединенной подгруппой и HNN-расширения. Изучались также и соответствующие вопросы о группах с одним определяющим соотношением и о других группах, строение которых также описывается в терминах упомянутых свободных конструкций. Данная статья представляет собой обзор некоторых результатов, полученных в этом направлении за последние пять лет сотрудниками кафедры (включая специализировавшихся на кафедре студентов). Некоторые из представленных здесь результатов уже опубликованы (и в этом случае приводятся соответствующие ссылки), другие либо приняты к печати, либо готовятся к публикации.

1. Аппроксимируемость свободных произведений и *HNN*-расширений. Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого элемента g группы G, отличного от единицы, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что $g\varphi \neq 1$.

Если $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то свойство $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы является ставшим уже классическим свойством финитной аппроксимируемости. Если же $\mathcal{K}$ есть класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп, приходим к более тонкому свойству аппроксимируемости конечными p-группами.

Если H и K — некоторые группы, $A \leq H$, $B \leq K$ и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то выражение

$$P = (H * K;\ A = B, \varphi)$$

будет обозначать свободное произведение групп H и K с подгруппами A и B, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ.

Если G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi :\ A \to B$ — изоморфизм, то HNN-расширение G^* (базовой)

---

*Ивановский государственный университет. 25 лет. Юбилейный сборник научных статей. Часть 2. Иваново, 1998. С. 183-199.

группы G с проходной буквой t и связанными в силу φ подгруппами A и B будет записываться в виде $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$.

Хорошо известно, что обычное свободное произведение (т. е. свободное произведение с единичной объединенной подгруппой) двух финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой. Вместе с тем легко привести пример группы, являющейся свободным произведением с объединенной подгруппой двух свободных групп и не аппроксимируемой конечными группами. Началом систематического изучения $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой следует, по-видимому, считать работу Г. Баумслага [1]. В частности, там доказано, что если группы H и K конечны, то группа P является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой. $\mathcal{F}$-аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы была затем установлена независимо в работах [2] и [3]. Для свойства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости аналоги этих утверждений не имеют места: свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p-групп так же, как и HNN-расширение конечной p-группы, вообще говоря, могут не аппроксимироваться конечными p-группами. Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой, найденный Г. Хигменом [4], может быть сформулирован следующим образом:

Пусть H и K — конечные p-группы. Группа

$$P = (H * K; A = B, \varphi)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существуют такие главные ряды

$$\begin{aligned} &1 = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_m = H \qquad \textit{и} \\ &1 = K_0 \leq K_1 \leq \cdots \leq K_n = K \end{aligned}$$

групп H и K соответственно, что изоморфизм φ отображает множество подгрупп $A \cap H_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ на множество подгрупп $B \cap K_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Соответствующий критерий для HNN-расширений получен Е. Рэптисом и Д. Варсосом [5]. Другой критерий, полученный Д. И. Молдаванским [6] и представляющийся более удобным для применений к изучению HNN-расширений с бесконечной базовой группой, сформулирован, по существу, в тех же терминах, что и теорема Хигмена (и навеян этой теоремой):

Теорема 1. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$$

группы G, удовлетворяющий следующим требованиям:

(1) *для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ $\quad (A \cap G_i)\varphi = B \cap G_i$;*
(2) *для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ и любого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ выполнено равенство $(a\varphi)G_i = aG_i$.*

Доказательства практически всех известных к настоящему времени результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений состоят в сведении рассматриваемого вопроса к случаю свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных групп или HNN-расширения конечной группы. Методика такого сведения основана на идеях, указанных для свободного произведения в упомянутой выше работе Г. Баумслага и перенесенных затем на HNN-расширения в ряде работ других авторов. Для свойства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости аналогичная методика сведения к критериям, доставляемым теоремой Г. Хигмена и теоремой 1, была предложена Д. И. Молдаванским. Иллюстрацией применения этой методики для свободных произведений с объединенной подгруппой может служить следующий результат А. В. Балакирева и Д. И. Молдаванского:

Теорема 2. *Пусть H и K — конечно порожденные абелевы группы, $A \neq H$, $B \neq K$. Группа*

$$P = (H * K;\ A = B, \varphi)$$

$\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда A и B являются p'-изолированными подгруппами групп H и K соответственно.

($\mathcal{F}$-аппроксимируемость группы из условия теоремы 2 хорошо известна.)

Этот подход позволил решить также соответствующий вопрос и для HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы [7]. Пусть для абелевой группы X и ее эндоморфизма α $I_p(X, \alpha)$ обозначает пересечение p'-изоляторов подгрупп $X(\alpha - \iota)^n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Теорема 3. *Пусть G — конечно порожденная абелева группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$.*

Если одна из подгрупп A или B совпадает с группой G (для определенности, $A = G$), то группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа $I_p(G, \varphi)$ является единичной.

Пусть $A \neq G$ и $B \neq G$. Полагаем $U_0 = A \cap B$, $V_0 = U_0\varphi$, и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы A и B являются p'-изолированными, для некоторого $n \geq 0$ выполнено равенство $U_n = V_n$ и $I_p(U_n, \varphi) = 1$.

Заметим, что в тех же терминах можно охарактеризовать и $\mathcal{F}$-аппроксимируемость такой группы: если $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ — HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы G и если $A \neq G$ и $B \neq G$, то группа G^* является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $U_n = V_n$ для некоторого $n \geq 0$. Этот критерий формулируется проще, чем приведенный в [8].

Аналогичная схема была реализована Е. А. Ивановой при изучении аппроксимируемости свободного произведения с объединенной подгруппой в классе нильпотентных групп. Найденный ею критерий для случая конечных сомножителей формулируется следующим образом:

Теорема 4. *Пусть H и K являются конечными нильпотентными группами, а A и B — собственными подгруппами групп H и K соответственно. Группа $P = (H * K;\ A = B, \varphi)$ аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда существует такое простое число p, что*
1) подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;
2) подгруппа, порождаемая в группе P подгруппами $S_p(H)$ и $S_p(K)$), $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема (где $S_p(X)$ обозначает силовскую p-подгруппу группы X).

Используя этот результат, Е. А. Иванова доказывает следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть A и B — собственные подгруппы групп H и K соответственно. Если H и K — конечно порожденные абелевы группы, либо H и K — конечно порожденные нильпотентные группы, а подгруппы A и B являются бесконечными циклическими, то следующие утверждения равносильны:*
1) группа $P = (H * K;\ A = B, \varphi)$ аппроксимируема нильпотентными группами;

2) существует такое простое число p, что подгруппы A и B p'-изолированы в группах H и K соответственно;
3) существует такое простое число p, что группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

В работах ряда авторов изучались аппроксимационные свойства свободного произведения двух свободных групп с объединенной циклической подгруппой. Известно, в частности, что эта группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема и даже $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Вопрос о ее $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости и об аппроксимируемости нильпотентными группами недавно решен в работе Д. Н. Азарова [9]:

Теорема 6. *Пусть H и K — свободные группы, A — циклическая подгруппа группы H, порожденная элементом $a \neq 1$, B — циклическая подгруппа группы K, порожденная элементом $b \neq 1$. Пусть еще m и n — наибольшие положительные целые числа такие, что уравнения $x^m = a$ и $y^n = b$ разрешимы в группах H и K соответственно. Если одно из чисел m или n равно 1, то для любого простого числа p группа $P = (H * K;\ A = B,\ \varphi)$ (где φ переводит a в b) является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются степенями числа p. Кроме того, группа аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для некоторого простого числа p.*

В другой работе Д. Н. Азарова [10] изучается аппроксимируемость свободного произведения произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой. Говоря более подробно, он рассматривает следующую конструкцию.

Пусть в каждой группе G_λ семейства $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ отмечена подгруппа H_λ так, что для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu} : H_\lambda \to H_\mu$, причем $\varphi_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}$, $\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_{\mu\lambda}^{-1}$ и $\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}$. Тогда группа

$$P = \big(G_\lambda\ (\lambda \in \Lambda); h\varphi_{\lambda\mu} = h\ (h \in H_\lambda,\ \lambda, \mu \in \Lambda)\big)$$

называется свободным произведением групп G_λ с одной объединенной подгруппой H (отождествляемой с каждой из подгрупп H_λ). Распространяя на эту конструкцию описанные выше подходы, Д. Н. Азаров получает ряд результатов об аппроксимируемости группы G в классе конечных и конечных p-групп. Например, следующая теорема является обобщением двух результатов Г. Баумслага о свободном произведении двух конечных групп (упоминавшимся выше) и о свободном произведении двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп с объединенной конечной подгруппой.

Теорема 7. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является конечной, причем порядки групп G_λ ограничены в совокупности. Тогда группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Более того, в этом случае группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, а объединяемая подгруппа конечна, то группа P $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса группы G_λ такая, что $U_\lambda \cap G_\lambda = 1$ и индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности.

В работе [10] получен также ряд результатов об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости таких свободных произведений, полученных на основе соответствующего обобщения теоремы Г. Хигмена.

В вышеперечисленных результатах условия аппроксимируемости свободных конструкций групп формулировались, по существу, в виде ограничений на фиксированные объединяемые или связанные подгруппы и изоморфизм между ними. Следующий интересный результат М. М. Недзельского свидетельствует о плодотворности и несколько иного подхода к постановке задач:

Теорема 8. *Пусть G — свободная абелева группа конечного ранга, A и B — две изоморфные собственные подгруппы группы G. Тогда*
1) группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой при любом выборе изоморфизма $\varphi : A \to B$ тогда и только тогда, когда $I_A(A \cap B) = I_B(A \cap B)$;
2) изоморфизм $\varphi : A \to B$ такой, что группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, существует тогда и только тогда, когда $[A : A \cap B] = [B : A \cap B]$.

(Здесь $I_Y(X)$ — изолятор в группе Y подгруппы X.)

Другой результат М. М. Недзельского [11] утверждает существование алгоритма, распознающего $\mathcal{F}$-аппроксимируемость группы G^* из теоремы 6 (и таким образом также решает вопрос, постановка которого не является стандартной для данной проблематики).

В заключение этого раздела приведем некоторые результаты об отделимости подгрупп. Подгруппа X группы Y называется отделимой в классе $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-отделимой), если для любого элемента $y \in Y \setminus X$ найдется такой гомоморфизм φ группы Y на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что $y\varphi \notin X\varphi$.

Нетрудно понять, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечных групп произвольная конечно порожденная подгруппа является $\mathcal{F}$-отделимой. Используя опять-таки сведение к этому результату, И. В. Балаева доказала, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечно порожденных абелевых групп произвольная циклическая подгруппа $\mathcal{F}$-отделима.

HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ назовем нисходящим, если одна из связанных подгрупп A или B совпадает с базовой группой G (без потери общности будем считать, что $A = G$). В этом случае ответы на ряд вопросов, связанных с аппроксимируемостью, имеют более законченный характер. Так, необходимое и достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения G^* (см.[12]) состоит в том, что пересечение всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса базовой группы G совпадает с единичной подгруппой (подгруппа N группы G называется φ-совместимой, если $N\varphi = N \cap B$). Оказывается, что аналогичный критерий имеет место для свойства финитной отделимости всех циклических подгрупп:

Теорема 9. *Все циклические подгруппы группы*

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B,\ \varphi)$$

являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда все циклические подгруппы группы G отделимы в семействе всех ее фактор-групп по нормальным φ-совместимым подгруппам конечного индекса.

О. Е. Сенкевич показал, что если G является свободной абелевой группой конечного ранга, этот общий критерий приобретает совершенно конкретный вид. В этом случае отображению φ (являющемуся эндоморфизмом группы G) известным способом сопоставляется целочисленный многочлен, а именно характеристический многочлен отображения φ. Унитарный многочлен $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами назовем сверхпримитивным, если наибольший общий делитель его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равен единице.

Теорема 10. *Если G — свободная абелева группа конечного ранга, то все циклические подгруппы группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B,\ \varphi)$ являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда все делители (в $\mathbb{Z}[x]$) характеристического многочлена отображения φ сверхпримитивны.*

2. Группы с одним определяющим соотношением и другие группы. Этот раздел начнем с описания (полученного Д. И. Молдаванским и А. С. Молчановой) $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп в двух классах групп с одним определяющим соотношением. Первый из этих классов состоит из так называемых групп Баумслага – Солитэра, т. е. групп вида $G(l,m) =< a,b;\ b^{-1}a^l b = a^m >$, где без потери общности можно считать, что $|m| \geq l > 0$. Хорошо известно, что группа $G(l,m)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $l = 1$, или $l = |m|$.

Теорема 11. *Группа $G(l,m)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда либо $l = 1$ и $p \mid m-1$, либо $|m| = l = p^r$ для некоторого целого числа $r > 0$, причем если $p > 2$, то $m = l$.*

Второй класс состоит из некоторых HNN-расширений групп $G(l,m)$, а именно, из групп

$$H(l,m;\,k) =< a,t;\ t^{-1}a^{-k}t\,a^l\,t^{-1}a^k t = a^m >,$$

где снова без потери общности $|m| \geq l > 0$ и $k > 0$. Известно, что группа $H(l,m;\,k)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $|m| = l$.

Теорема 12. *Группа $H(l,m;\,k)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $|m| = l = p^r$ и $k = p^s$ для некоторых целых чисел $r \geq 0$ и $s \geq 0$, причем если $m = -l$, то $p = 2$ и $s \leq r$.*

А. В. Борщев [13] получил условия, необходимые и достаточные для существования изоморфизма между группами вида $H(l,m;\,k)$, что позволило ему решить вопрос 3.33 из [14]:

Теорема 13. *Если натуральные числа l,m,n удовлетворяют условиям $(l,m) = 1$, $n \mid l$, $m > 1$ и $l > n > 1$, то группы $H(lm,m;\,m)$ и $H(lm,m;\,mn)$ гомоморфно отображаются друг на друга, но не являются изоморфными.*

Еще один класс групп с одним определяющим соотношением изучал А. В. Якушев. Речь идет о группах вида

$$P(n,\varepsilon) =< x,y; y^{-2}xy^2 = x^{\varepsilon}y^{-1}x^n y >,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $|\varepsilon| = 1$. Заметим, что $\mathcal{F}$-аппроксимируемость каждой группы $P(n,\varepsilon)$ следует из теоремы А. И. Мальцева. А. В. Якушевым доказана

Теорема 14. *Группа $P(n,\varepsilon)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда числа $n + \varepsilon - 1$ и $n - 2$ делятся на p.*

Рассмотрим теперь два других класса групп, строение которых (как и групп с одним определяющим соотношением) можно описать в терминах свободного произведения с объединенной подгруппой.

Пусть H и K — некоторые группы, A — подгруппа группы H и B — подгруппа группы K. Группа $C = (H * K;\ [A, B] = 1)$, порождаемая образующими групп H и K и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[a, b] = 1$ ($a \in A$, $b \in B$), называется свободным произведением групп H и K с коммутирующими подгруппами A и B. Группа $Z = (H * K;\ [H, B] = 1,\ [A, K] = 1)$, порождаемая образующими групп H и K и определяемая всеми соотношениями этих групп, а также — всевозможными соотношениями вида $[h, b] = 1, [a, k] = 1$ ($a \in A, b \in B, h \in H, k \in K$), называется свободным произведением групп H и K с централизованными подгруппами A и B.

Очевидно, что если одна из подгрупп A или B является единичной, то группа C оказывается обычным свободным произведением групп A и B, а если подгруппа A совпадает с группой H или подгруппа B совпадает с группой K, то группа Z является прямым произведением групп H и K. Таким образом, в указанных вырожденных случаях вопросы аппроксимируемости групп C и Z решаются тривиально. В остальных случаях соответствующие критерии найдены Е. Д. Логиновой [15].

Теорема 15. *Пусть H и K — произвольные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые) группы, A и B — неединичные подгруппы групп H и K соответственно. Группа C является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) тогда и только тогда, когда в группах H и K подгруппы A и B $\mathcal{F}$-отделимы. Аналогичные утверждения справедливы для группы Z при условии, разумеется, что A и B — собственные подгруппы групп H и K соответственно.*

Приведем два следствия этой теоремы.

1. Свободные произведения с коммутирующими и с централизованными подгруппами двух полициклических групп являются $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми группами.

2. Свободные произведения с коммутирующими и с централизованными конечно порожденными подгруппами двух свободных групп являются $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми группами. (Первое из этих утверждений обобщает теорему Г. Баумслага об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы с одним определяющим соотношением вида $[u, v] = 1$, если ни один порождающий не входит одновременно в оба слова u и v.)

Рассмотрим теперь вопрос об определяемости $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы семейством ее конечных гомоморфных образов. Пусть $\mathcal{F}(G)$ обозначает семейство всех конечных гомоморфных образов группы G, и если p — простое число, пусть $\mathcal{F}_p(G)$ обозначает семейство всех конечных

p-групп, являющихся гомоморфными образами группы G. В работе [16] показано, что группа $G(1, m)$ (см. выше) в классе финитно аппроксимируемых групп с одним определяющим соотношениенм однозначно определяется семейством своих конечных гомоморфных образов. Тем не менее, если рассматривать лишь те конечные гомоморфные образы, которые являются p-группами (при фиксированном простом p), это утверждение перестает быть справедливым, даже если ограничиться группами вида $G(1, m)$. Здесь имеет место следующее утверждение, доказанное в [17]:

Теорема 16. *Пусть p — простое число. Тогда*

(1) *Если $\mathcal{F}_p(G(1, m)) = \mathcal{F}_p(G_(1, n))$ и одно из чисел $m-1$ и $n-1$ делится на p, то и другое делится на p.*

(2) *Если числа $m-1$ и $n-1$ не делятся на p, то $\mathcal{F}_p(G(1, m)) = \mathcal{F}_p(G(1, n))$.*

(3) *Если числа $m-1$ и $n-1$ делятся на p, то следующие утверждения равносильны:*

(3.1) *$\mathcal{F}_p(G(1, m)) = \mathcal{F}_p(G(1, n))$;*

(3.2) *для любого целого числа $s > 0$ элементы $m + p^s\mathbb{Z}$ и $n + p^s\mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}^*_{p^s}$ (мультипликативной группы кольца $\mathbb{Z}_{p^s} = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ вычетов целых чисел по модулю p^s) порождают в этой группе одну и ту же циклическую подгруппу;*

(3.3) *числа $m-1$ и $n-1$ делятся на одни и те же степени числа p, причем если $p = 2$ и числа $m-1$ и $n-1$ не делятся на 4, то числа m^2-1 и n^2-1 должны делиться на одни и те же степени числа 2.*

Библиографический список

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193 – 209.
2. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232 – 234.
3. *Baumslag B.* and *Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6(2). P. 179 – 194.
4. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301 – 305.
5. *Raptis E.* and *Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. of Pure Appl. Algebra. 1991. Vol. 76. P. 167 – 178.

6. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений конечных p-групп // 3-я Международная конференция по алгебре: Тез. докл. Красноярск, 1993.
7. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддеева Тез. докл. Санкт-Петербург, 1997.
8. *Andreadakis S.*, *Raptis E.* and *Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50. P. 495 – 501.
9. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3 – 8.
10. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. С. 3 – 13.
11. *Недзельский М. М.* Алгоритмическая распознаваемость финитной аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер. Математика. 1997. Вып. 1. С. 96 – 100.
12. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. С. 842 – 845.
13. *Борщев А. В.* О проблеме изоморфизма для одного класса групп с одним определяющим соотношением // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддеева: Тез. докл. С-Петербург, 1997. С. 170 – 171.
14. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск, 1992.
15. *Логинова Е. Д.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Международная алгебраическая конференция памяти Д. К. Фаддеева: Тез. докл. С-Петербург, 1997. С. 235 – 236.
16. *Moldavanski D.* and *Sibyakova N.* On the finite images of some one-relator groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 123. P. 2017 – 2020.
17. *Молдаванский Д. И.*, *Якушев А. В.* О конечных гомоморфных образах некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер. Математика. 1997. Вып. 1. С. 72 – 78.