УДК 512.54

Д. И. Молдаванский

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП НИСХОДЯЩЕГО *HNN*-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Доказано, что все циклические подгруппы нисходящего HNN-расширения группы G являются финитно отделимыми в точности тогда, когда в группе G каждая циклическая подгруппа отделима семейством всех совместимых нормальных подгрупп конечного индекса.

Пусть G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ — HNN-расширение группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B. HNN-расширение группы G называют нисходящим, если одна из связанных подгрупп, скажем A, совпадает с группой G.

Хорошо известно (см. напр. [2]), что необходимым, но вообще говоря, не достаточным условием финитной аппроксимируемости группы G^* является тривиальность пересечения всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G. (Подгруппу H группы G называют (A, B, φ)-совместимой, если $(H \cap A)\varphi = H \cap B$.) В работе [1] было доказано, что в случае нисходящего HNN-расширения это необходимое условие оказывается и достаточным для финитной аппроксимируемости. Здесь мы покажем, что в этом случае фактически в тех же терминах можно сформулировать и критерий финитной отделимости всех циклических подгрупп. А именно, имеет место

Теорема Пусть G — некоторая группа, B — подгруппа группы G, изоморфная этой группе, и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G. Каждая циклическая подгруппа группы G^* финитно отделима тогда и только тогда, когда каждая циклическая подгруппа группы G отделима семейством всех (G, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G.

Для доказательства теоремы напомним о некоторых построениях, связанных с использованием понятия (A, B, φ)-совместимой подгруппы. В частном случае нисходящего HNN-расширения соответствующие утверждения выглядят следующим образом.

Если H — произвольная (G,B,φ)-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то отображение φ_{H}, определяемое по правилу $(xH)\varphi_{H} = (x\varphi)H$ $(x \in G)$, является автоморфизмом фактор-группы $G/H = BH/H$. Поэтому соответствующее HNN-расширение $G^*_H = (G/H, t;\ t^{-1}G/Ht = BH/H, \varphi_{H})$ является расщепляющимся расширением конечной нормальной группы G/H при помощи бесконечной циклической группы, порождаемой элементом t. Существует гомоморфизм ρ_{H} группы G^* на группу G^*_H, продолжающий естественное отображение группы G на фактор-группу G/H и переводящий t в t. Кроме того, пересечение с базовой группой G произвольной нормальной подгруппы HNN-расширения $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ является (G,B,φ)-совместимой подгруппой группы G, и потому произвольный гомоморфизм группы G^* в любую группу проходит через некоторый гомоморфизм вида ρ_{H}.

Последнее замечание делает часть "только тогда" утверждения теоремы почти очевидной. Если, в самом деле, C — произвольная циклическая подгруппа группы G и a — не принадлежащий ей элемент из группы G, то найдется гомоморфизм ψ группы G^* в конечную группу, такой что $a\psi \notin C\psi$. Очевидно, что $a \notin CN$, где N есть пересечение подгруппы G и ядра гомоморфизма ψ и потому является (G,B,φ)-совместимой нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Переходя к доказательству достаточности, отметим сначала, что произвольный элемент g группы G^* однозначно записывается в виде $t^p a t^{-q}$, где $a \in G$, целые числа p и q неотрицательны и если $pq \neq 0$, то $a \notin B$ (см. [1]). Такую запись элемента группы G^* будем называть канонической.

Из замечаний, приведенных после формулировки теоремы, следует, что для доказательства отделимости циклических подгрупп группы G^* достаточно для любой ее циклической подгруппы C и любого элемента $g \in G^* \setminus C$ указать такую (G,B,φ)-совместимую нормальную подгруппу H конечного индекса группы G, что $g\rho_{H} \notin C\rho_{H}$.

Итак, пусть C — произвольная циклическая подгруппа группы G^*. Из вида канонической записи ее порождающего элемента следует, что заменяя подгруппу C сопряженной ей, если это необходимо, можем без потери общности считать, что подгруппа C порождается элементом вида $c = t^k a$, где $a \in G$. Пусть элемент $g \in G^*$ не принадлежит подгруппе C. Рассмотрим отдельно два случая в зависимости от значения k.

Если $k = 0$, то $C \leq G$, и потому если $g \in G$, то найдется (G,B,φ)-совместимая нормальная подгруппа H конечного индекса группы G такая, что $g \notin CH$. Так как гомоморфизм ρ_H продолжает естественное отображение группы G на фактор-группу G/H, то $g\rho_H \notin C\rho_H$. Если элемент $g \notin G$ и $g = t^p b t^{-q}$ — его каноническая запись, то при $p - q \neq 0$ утверждение $g\rho_H \notin C\rho_H$ имеет место для любой (G, B, φ)-совместимой нормальной подгруппы H группы G. Если же $p - q = 0$, то поскольку элемент b не принадлежит подгруппе $t^{-p}Ct^p \leq G$, существование искомой подгруппы H доказывается, как выше.

Предположим теперь, что $k \neq 0$. Пусть снова каноническая запись элемента g имеет вид $g = t^p b t^{-q}$. Предположим, что для некоторой (G, B, φ)-совместимой нормальной подгруппы H конечного индекса группы G и для некоторого целого числа n имеет место равенство $g\rho_H = (c\rho_H)^n$. Факторизуя группу G^*_H по подгруппе G/H, мы видим, что тогда $p - q = kn$ для некоторого целого числа n. Следовательно, если $p - q$ не делится на k, то при любом гомоморфизме вида ρ_H будем иметь $g\rho_H \notin C\rho_H$. Если же $p - q = kn$, то поскольку элемент gc^{-n} группы G^* отличен от единицы и эта группа ввиду [1] финитно аппроксимируема, найдется гомоморфизм ее на конечную группу, образ элемента gc^{-n} при котором не равен 1. Тогда этот гомоморфизм проходит через некоторое отображение вида ρ_H, для которого $g\rho_H \neq (c\rho_H)^n$, и в силу предыдущего имеем $g\rho_H \notin C\rho_H$. Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. *Молдаванский Д.И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих *HNN*-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. С. 842 – 845.
2. *Shirvani M.* On residually finite *HNN*-extensions // Arch. Math. 1985. V.44. P. 110 – 115.