ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 3 Выпуск 1 (2002)

УДК 512.543

О СОПРЯЖЕННОСТИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

Ю. Н. Алексеев, Д. И. Молдаванский (г. Иваново)

Аннотация

Доказано, что в свободной группе F две конечно порожденные подгруппы сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены их образы в каждом конечном гомоморфном образе группы F.

1. Следуя общему понятию аппроксимируемости группы относительно некоторого отношения между элементами и множествами элементов этой группы (см. [1], с. 58), будем говорить, что группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности (конечно порожденных) подгрупп, если для любых двух (конечно порожденных) подгрупп H и K группы G, не сопряженных в ней, существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу X такой, что образы $\mathsf{H}\varphi$ и $\mathsf{K}\varphi$ подгрупп H и K не сопряжены в группе X.

Это свойство групп рассматривалось в работе В. Н. Ремесленникова [2], где было доказано, что конечно порожденные нильпотентные группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности подгрупп. Впоследствии этот результат был распространен на класс полициклических групп в работе [3]. Целью данной заметки является доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Произвольная свободная группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

В силу общего замечания А. И. Мальцева [4] следствием этой теоремы является алгоритмическая распознаваемость сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы. Ранее этот результат был получен другими методами в работе [5].

2. Для доказательства теоремы нам понадобится несколько предварительных результатов. Первым из них является теорема Холла – Бернса (см., напр., [6], предложение 3.10), которую мы приводим в несколько урезанной, но достаточной для наших целей формулировке:

Предложение 1. *Для любой конечно порожденной подгруппы* H *свободной группы* F *найдется подгруппа* U *группы* F, *имеющая в* F *конечный индекс и содержащая подгруппу* H *в качестве свободного множителя.*

Предложение 2. (Лемма 1 из [7]) *Пусть группа* G *является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп* A *и* B. *Для любого элемента* $g \in G$, *не сопряженного ни с одним из элементов подгруппы* A, *существует гомоморфизм* φ *группы* G *на конечную группу* X *такой, что образ* $g\varphi$ *элемента* g *не сопряжен в группе* X *ни с одним из элементов образа* $A\varphi$ *подгруппы* A.

Предложение 3. *Пусть группа* G *является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп* A *и* B *и пусть, кроме того, в группе* A *все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Тогда для любой конечно порожденной подгруппы* H *группы* G, *не сопряженной с подгруппой* A, *существует гомоморфизм* φ *группы* G *на конечную группу* X *такой, что подгруппы* $H\varphi$ *и* $A\varphi$ *не сопряжены в группе* X.

Действительно, из теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения легко следует, что если подгруппа H не сопряжена ни с какой подгруппой, лежащей в A, то она содержит элемент, не сопряженный ни с одним из элементов подгруппы A, и потому существование требуемого гомоморфизма обеспечивается предложением 2. В противном случае мы можем считать H подгруппой группы A, причем $H \neq A$. Так как H финитно отделима в A, для элемента $a \in A \setminus H$ существует гомоморфизм φ группы A на конечную группу X такой, что $a\varphi \notin H\varphi$. Таким образом, $H\varphi$ является собственной подгруппой конечной группы $A\varphi = X$ и, следовательно, не может быть сопряженной с $A\varphi$. Остается домножить слева отображение φ на ретрактирующий гомоморфизм группы G на группу A.

Переходя теперь непосредственно к доказательству теоремы, предположим, что F — свободная группа и H и K — конечно порожденные подгруппы группы F, не сопряженные в этой группе. В соответствии с предложением 1 выберем подгруппу U группы F, имеющую в F конечный индекс и содержащую подгруппу H в качестве свободного множителя. Фиксируем некоторую систему x_1, x_2, $\ldots$, x_n представителей левых смежных классов группы F по подгруппе U и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ полагаем $K_i = x_i^{-1}Kx_i$. Если для некоторого i подгруппа K_i содержится в подгруппе U, то поскольку она не сопряжена в группе U с подгруппой H и, так как в свободных группах конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, из предложения 3 следует существование нормальной подгруппы M_i конечного индекса группы U такой, что в фактор-группе U/M_i подгруппы HM_i/M_i и K_iM_i/M_i не являются сопряженными. Если же подгруппа K_i не входит в подгруппу U, в качестве M_i выберем произвольную нормальную подгруппу конечного индекса группы U. Подгруппа $M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ имеет, очевидно, конечный индекс в группе F и потому содержит некоторую нормальную подгруппу N, индекс которой в группе F также конечен. Мы утверждаем, что в фактор-группе F/N подгруппы HN/N и KN/N не сопряжены.

В самом деле, пусть, напротив, для некоторого элемента $f \in F$ имеет место равенство $f^{-1}KNf = HN$. Так как $f = x_iu$ для подходящего номера

$i = 1, 2, \dots, n$ и некоторого элемента $u \in U$, это равенство переписывается в виде $u^{-1}K_iNu = HN$, и поскольку $N \subseteq U$, отсюда следует, что подгруппа K_i входит в подгруппу U. Таким образом, в фактор-группе F/N подгруппа K_iN/N принадлежит подгруппе U/N и сопряжена в ней с подгруппой HN/N. Следовательно, сопряженными оказываются и образы HM_i/M_i и K_iM_i/M_i этих подгрупп при естественном гомоморфизме группы U/N на группу U/M_i, что противоречит выбору подгруппы M_i. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[2] Ремесленников В. Н. Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, вып. 2. С. 61–76.

[3] Grunewald F., Segal D. Conjugacy in polycyclic groups // Commun. Algebra. 1978. V. 6. P. 775–798.

[4] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин–та. Иваново, 1958. т. 18. С. 49–60.

[5] Молдаванский Д. И. Сопряженность подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, вып. 6. С. 691–694.

[6] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[7] Молдаванский Д. И. О финитной отделимости подгрупп // Иванов. гос. ун-т. 20 лет. Юбил. сб. науч. статей. Часть 2. Иваново, 1993. С. 18–23.

Ивановский государственный университет
Поступило 5.10.2002 г.