Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 102 – 116

Д. И. Молдаванский

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Получены достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения. Из одного из этих условий следует, в частности, что если базовая группа G HNN-расширения G^* аппроксимируема конечными p-группами,а связанные подгруппы центральны, конечны и их пересечение совпадает с единичной подгруппой, то и группа G^* аппроксимируема конечными p-группами.

Sufficient conditions for HNN-extension to be residually a finite p-group are obtained. One of these conditions implies that if the base group G of HNN-extension G^* is residually a finite p-group and associated subgroups are central and finite and their intersection is equal to identity then the group G^* is residually a finite p-group.

УДК 512.543.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Пусть G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — фиксированный изоморфизм. Пусть группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ является HNN-расширением (базовой) группы G с проходной буквой t и связанными (относительно φ) подгруппами A и B. В статье [3] с помощью предложенного в ней метода спуска и подъема (A, B, φ)-совместимых подгрупп был получен следующий результат:

Теорема A. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе AB и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы. Построим две последовательности U_k и V_k подгрупп группы G, полагая $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.*

Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$.

Целью настоящей статьи является получение в сходной ситуации и в аналогичных терминах критерия для аппроксимируемости группы G^* конечными p-группами. Для этого будет использоваться установленный в работе [2] следующий критерий аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы:

Теорема B. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Соответствующее HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

группы G, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(1) *$(A \cap G_i)\varphi = B \cap G_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$;*

(2) *для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и для каждого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.*

Более точно, наряду с теоремой B будет использоваться введенное в [2] и основанное на этой теореме понятие (A, B, φ, p)-совместимой подгруппы базовой группы HNN-расширения, а также — формулируемый с помощью этого понятия признак аппроксимируемости HNN-расширения конечными p-группами. Возможность (при определенных ограничениях) подъема (A, B, φ, p)-совместимой подгруппы, устанавливаемая в параграфе 3, приводит к следующему основному результату данной статьи:

Теорема 1. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что группа G аппроксимируема конечными p-группами и что все ее центральные p'-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных p-групп. Пусть последовательности U_k и V_k подгрупп группы G определены, как в формулировке теоремы A.*

Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группе G и*

(2) *для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$ и пересечение всех φ-инвариантных подгрупп H конечного p-индекса группы U_n таких, что автоморфизм φ_H фактор-группы U_n/H, индуцированный отображением φ, является p-элементом, совпадает с единичной подгруппой.*

Напомним здесь, что подгруппа X группы Y называется p'-изолированной (где p — простое число), если для любого простого числа $q \neq p$ и для произвольного элемента $y \in Y$ включение $y^q \in X$ возможно лишь при $y \in X$. Подгруппа X группы Y называется отделимой в классе конечных p-групп, если для любого элемента $y \in Y$, не принадлежащего подгруппе X, найдется такой гомоморфизм ρ группы Y на конечную p-группу, что $y\rho \notin X\rho$. Легко видеть, что подгруппа, отделимая в классе конечных p-групп, является p'-изолированной. Элемент $y \in Y$ называют p-элементом, если его порядок конечен и является p-числом, т. е. — некоторой степенью числа p. Если α — автоморфизм группы Y, подгруппу X группы Y называют α-инвариантной, если $X\alpha = X$.

Известно (см. [1]), что в произвольной конечно порожденной нильпотентной группе все p'-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных p-групп. Поэтому непосредственно из сформулированной теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа, A и B собственные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть последовательности U_k и V_k подгрупп группы G определены, как в формулировке теоремы А. Группа*

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$$

является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группе G и*

(2) *для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$ и пересечение всех φ-инвариантных подгрупп H конечного p-индекса группы U_n таких, что автоморфизм φ_H фактор-группы U_n/H, индуцированный отображением φ, является p-элементом, совпадает с единичной подгруппой.*

Отметим еще очевидное

Следствие 2. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что группа G аппроксимируема конечными p-группами и что все ее центральные p'-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных p-групп. Если $A \cap B = 1$, то группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда подгруппы A и B p'-изолированы в группе G.*

Легко видеть, что в произвольной группе G с фиксированными подгруппами A и B и изоморфизмом $\varphi : A \to B$ существует подгруппа $H_G(A, B, \varphi)$, наибольшая из всех подгрупп H таких, что $H\varphi = H$. Очевидно, что ограничение отображения φ на подгруппу H является ее автоморфизмом, и если подгруппа H конечна, то, поскольку в группе $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ этот автоморфизм является ограничением внутреннего автоморфизма, производимого элементом t, из аппроксимируемости группы G^* конечными p-группами следует, что порядок автоморфизма φ группы H является p-числом (здесь и ниже ограничение отображения φ на подгруппу группы A обозначается тем же символом φ). Теорема 8 работы [4] утверждает, что если G является конечной абелевой p-группой, то справедливо и обратное, т. е. HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ конечной абелевой p-группы G является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда порядок автоморфизма φ группы $H_G(A, B, \varphi)$ является p-числом. С другой стороны, если последовательности подгрупп U_k и V_k группы G определены как в формулировке теоремы А и если для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$, то, как легко видеть, подгруппа $H_G(A, B, \varphi)$ совпадает с подгруппой U_n. Если подгруппы A и B группы G конечны, то равенство $U_n = V_n$ наступает всегда, и это позволяет с помощью тех же методов получить следующее обобщение вышеупомянутого результата из [4]:

Теорема 2. *Пусть группа G аппроксимируема конечными p-группами, A и B — конечные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$*

— изоморфизм. Пусть $H_G(A, B, \varphi)$ — наибольшая из подгрупп H группы G таких, что $H\varphi = H$. Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является аппроксимируемой конечными p-группами тогда и только тогда, когда порядок автоморфизма φ группы $H_G(A, B, \varphi)$ является p-числом.

Следствие 3. *Пусть группа G аппроксимируема конечными p-группами, A и B — конечные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Если $A \cap B = 1$, то группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является аппроксимируемой конечными p-группами.*

§ 2. Предварительные замечания

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего понятия и некоторые известные результаты.

Пусть G — некоторая группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Подгруппа H группы G называется (A, B, φ)-совместимой, если $(A \cap H)\varphi = B \cap H$. Легко видеть, что если H — нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение $\varphi_H : AH/H \to BH/H$, определяемое правилом $(aH)\varphi_H = (a\varphi)H$ (где $a \in A$), является изоморфизмом подгруппы AH/H фактор-группы G/H на ее подгруппу BH/H. Поэтому наряду с HNN-расширением $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ группы G можно построить HNN-расширение

$$G^*_H = (G/H, t;\ t^{-1}AH/H\,t = BH/H,\ \varphi_H)$$

группы G/H. Очевидно, что естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H может быть продолжен до гомоморфизма ρ_H группы G^* на группу G^*_H (переводящего t в t). Отметим также, что для любой подгруппы $X \leqslant A$ имеет место равенство $(XH/H)\varphi_H = (X\varphi)H/H$.

Семейство $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп некоторой группы F называется фильтрацией, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если X — подгруппа группы F, то фильтрация $\mathcal{N}$ называется X-фильтрацией, если для любого элемента $f \in F$, не принадлежащего подгруппе X, найдется подгруппа $N \in \mathcal{N}$ такая, что $f \notin XN$. Если X и Y — две подгруппы группы F, то фильтрацию $\mathcal{N}$ будем называть (X, Y)-фильтрацией, если она одновременно является и X-фильтрацией, и Y-фильтрацией.

Пусть $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Хорошо известно (см., напр., предложение 1 из [3]), что если группа G^* финитно аппроксимируема, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией, а если это семейство является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* финитно аппроксимируема; в случае, когда A и B — собственные центральные подгруппы группы G, последнее является и необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G^*. Для формулировки соответствующего p-аналога этого утверждения в работе [2] было предложено следующее понятие (A, B, φ, p)-совместимости:

Подгруппа H группы G называется (A, B, φ, p)-совместимой, если существует последовательность

$$H = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

подгрупп группы G такая, что

1) для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ G_i является нормальной (A, B, φ)-совместимой подгруппой группы G и

2) для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ порядок фактор-группы G_{i+1}/G_i равен p и для произвольного элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.

Пусть $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп группы G. Теорема A фактически утверждает, что если G конечная p-группа, то HNN-расширение

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$$

является группой, аппроксимируемой конечными p-группами, тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ содержит единичную подгруппу. В общем случае имеет место

Предложение 2.1. (Лемма 2.2 из [2]) *а) произвольная нормальная (A, B, φ)-совместимая подгруппа H конечного индекса группы G принадлежит семейству $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ тогда и только тогда, когда группа G^*_H аппроксимируема конечными p-группами, т. е. тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}^p_{G/H}(AH/H, BH/H, \varphi_H)$ содержит единичную подгруппу;*

б) если N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G^* и $M = G \cap N$, то $M \in \mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$.

Аналогом упомянутого выше предложения 1 из [3] является

Предложение 2.2. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть*

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi)$$

— HNN-расширение группы G. Тогда

(1) *если группа G^* аппроксимируема конечными p-группами, то семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией;*
(2) *если семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* аппроксимируема конечными p-группами;*
(3) *если A и B — собственные центральные подгруппы группы G, то группа G^* аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Первые два утверждения этого предложения совпадают с формулировкой теоремы 2 из [2], а доказательство утверждения (3) практически повторяет приведенное там доказательство следствия этой теоремы.

Так как подгруппа произвольной группы, отделимая в классе конечных p-групп, является p'-изолированной, имеет место

Предложение 2.3. *Если семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то в группе G подгруппы A и B p'-изолированы.*

Если подгруппы A и B совпадают с группой G, т. е. изоморфизм φ является автоморфизмом этой группы, (A, B, φ)-совместимость некоторой подгруппы $H \leqslant G$ означает φ-инвариантность этой подгруппы, т. е. справедливость равенства $H\varphi = H$. (A, B, φ, p)-совместимость подгруппы H в этом случае можно охарактеризовать следующим образом:

Предложение 2.4. *Пусть φ — автоморфизм группы G. Нормальная φ-инвариантная подгруппа H группы G является (G, G, φ, p)-совместимой тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H является конечной p-группой и порядок индуцированного автоморфизма φ_H группы G/H является p-числом.*

В самом деле, ввиду предложения 2.1 это равносильно тому, что порядок автоморфизма φ конечной p-группы G является p-числом тогда и только тогда, когда группа G обладает главным рядом, все члены которого φ-инвариантны и в каждом факторе которого автоморфизм φ действует тождественно. Справедливость же этого утверждения, по-видимому, хорошо известна и может быть легко проверена.

Пусть теперь, как в формулировке теоремы A, $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Справедливо

Предложение 2.5. (Предложение 7 из [3]) *Пусть подгруппы A и B являются конечно порожденными абелевыми. Если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$.*

§ 3. Спуск и подъем (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп

Пусть, как и выше, G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $U = A \cap B$ и $V = U\varphi$. Таким образом, группа B содержит изоморфные подгруппы U и V, и φ — изоморфизм подгруппы U на подгруппу V. Следующее утверждение является аналогом предложения 4 из статьи [3].

Предложение 3.1. *Для любой подгруппы $H \in \mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ подгруппа $D = B \cap H$ принадлежит семейству $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$.*

Если семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ является фильтрацией (или (A, B)-фильтрацией), то семейство $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ также является фильтрацией (или, соответственно, (U, V)-фильтрацией).

Доказательство. Пусть $H = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$ — последовательность нормальных (A, B, φ)-совместимых подгрупп группы G такая, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ порядок фактор-группы G_{i+1}/G_i равен p и для произвольного элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i. В силу предложения 4 из [3] каждая из подгрупп $B_i = B \cap G_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ является (U, V, φ)-совместимой. Если для некоторого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ элемент $u \in U$ принадлежит подгруппе B_{i+1}, то $u \in A \cap G_{i+1}$, и потому $(u\varphi)u^{-1} \in G_i$. Так как, кроме того, $(u\varphi)u^{-1} \in B$, имеем $(u\varphi)u^{-1} \in B_i$. Наконец, фактор-группа B_{i+1}/B_i изоморфна некоторой подгруппе фактор-группы G_{i+1}/G_i. Таким образом, последовательность подгрупп

$$D = B_0 \leqslant B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_{n-1} \leqslant B_n = B$$

после отбрасывания повторяющихся членов удовлетворяет всем требованиям определения (U, V, φ, p)-совместимости, и утверждение о принадлежности подгруппы D семейству $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ доказано. Доказательство остальных утверждений предложения 3.1 дословно повторяет соответствующие рассуждения при доказательстве предложения 4 из [3].

Далее будет показано, что при определенных ограничениях, накладываемых на группу G и ее подгруппы A и B, справедливо и обратное утверждение. Рассмотрим сначала случай, когда группа G является конечной.

Предложение 3.2. *Пусть группа G является конечной p-группой и подгруппы A и B лежат в ее центре. Если семейство $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ содержит единичную подгруппу, то и семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ содержит единичную подгруппу.*

Доказательство. По условию, в группе B существует главный ряд

$$1 = B_0 \leqslant B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_{n-1} \leqslant B_n = B, \tag{1}$$

все члены которого (U, V, φ)-совместимы, причем для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и произвольного элемента $b \in U \cap B_{i+1}$ имеет место равенство $(b\varphi)B_i = bB_i$. Существование главного ряда группы G, удовлетворяющего аналогичным требованиям, будем доказывать индукцией по порядку группы B.

Если подгруппы A и B единичны, произвольный главный ряд группы G обладает, очевидно, требуемыми свойствами. Пусть B — неединичная подгруппа. Полагаем $A_1 = B_1\varphi^{-1}$. Так как подгруппы A_1 и U содержатся в подгруппе A, с учетом инъективности отображения φ и (U, V, φ)-совместимости подгруппы B_1 имеем

$$(U \cap A_1)\varphi = U\varphi \cap A_1\varphi = V \cap B_1 = (U \cap B_1)\varphi,$$

откуда следует равенство

$$U \cap A_1 = U \cap B_1. \tag{2}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Подгруппа B_1 содержится в подгруппе U.

Так как тогда из (2) следует, что $B_1 \leqslant A_1$, ввиду совпадения порядков имеем $B_1 = A_1$. Полагая $G_1 = B_1 = A_1$, рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/G_1$; образы элементов $x \in G$ и подгрупп $X \leqslant G$ при естественном гомоморфизме G на $\overline{G}$ будем записывать в виде $\overline{x}$ и $\overline{X}$ соответственно. Поскольку подгруппа G_1 является, очевидно, (A, B, φ)-совместимой, изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi} = \varphi_{G_1}$ подгруппы $\overline{A}$ на подгруппу $\overline{B}$. Из того, что подгруппа G_1 содержится в каждой из подгрупп U, V и B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, следует, очевидно, что $\overline{U} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{U}\overline{\varphi} = \overline{V}$ и последовательность подгрупп

$$1 = \overline{B}_1 \leqslant \overline{B}_2 \leqslant \cdots \leqslant \overline{B}_n = \overline{B}$$

составляет главный ряд группы $\overline{B}$. Кроме того, для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$(\overline{U} \cap \overline{B}_i)\overline{\varphi} = ((U \cap B_i)/G_1)\overline{\varphi} = (U \cap B_i)\varphi/G_1 = (V \cap B_i)/G_1 = \overline{V} \cap \overline{B}_i.$$

Наконец, если для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ элемент $\overline{b} = bG_1$ принадлежит подгруппе $\overline{U} \cap \overline{B}_{i+1} = (U \cap B_{i+1})/G_1$, то $b \in U \cap B_{i+1}$ и потому $(b\varphi)^{-1}b \in B_i$. Следовательно,

$$(\overline{b}\overline{\varphi})^{-1}\overline{b} = ((b\varphi)^{-1}b)G_1 \in B_i/G_1 = \overline{B}_i.$$

Из индуктивного предположения теперь следует, что в группе $\overline{G}$ существует главный ряд

$$1 = \overline{G}_1 \leqslant \overline{G}_2 \leqslant \cdots \leqslant \overline{G}_m = \overline{G},$$

все члены которого $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{\varphi})$-совместимы, причем для любого $i = 1, 2, \ldots, m-1$ и произвольного элемента $\overline{a} \in \overline{A} \cap \overline{G}_{i+1}$ имеет место равенство $(\overline{a}\,\overline{\varphi})\overline{G}_i = \overline{a}\overline{G}_i$. Записывая каждую подгруппу $\overline{G}_i$ в виде G_i/G_1 для подходящей подгруппы G_i группы G, получаем в этой группе главный ряд

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_m = G,$$

который и обладает требуемыми свойствами. Действительно, (A, B, φ)-совместимость подгруппы G_1 отмечена выше. При $i \geqslant 1$ (A, B, φ)-совместимость подгруппы G_i следует из $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{\varphi})$-совместимости подгруппы $\overline{G}_i$, так как

$$(A \cap G_i)\varphi/G_1 = ((A \cap G_i)/G_1)\overline{\varphi} = (\overline{A} \cap \overline{G}_i)\overline{\varphi} = \overline{B} \cap \overline{G}_i = (B \cap G_i)/G_1.$$

Поскольку $G_1 = B_1$ и отображение φ на подгруппе B_1 действует тождественно, равенство $(a\varphi)G_i = aG_i$ для элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ при $i = 0$ очевидно. Если же $i \geqslant 1$, это равенство следует из равенства $(\overline{a}\,\overline{\varphi})\overline{G}_i = \overline{a}\overline{G}_i$.

Случай 2. Подгруппа B_1 не входит в подгруппу U.

Поскольку порядок подгруппы B_1 равен числу p, в этом случае $U \cap B_1 = 1$, а потому ввиду (2) и $U \cap A_1 = 1$. Кроме того, $A_1 \cap B_1 = 1$: в противном случае имело бы место равенство $A_1 = B_1$, следствием которого явилось бы включение $B_1 \leqslant A \cap B = U$. Поэтому подгруппа G_2, порождаемая в группе G подгруппами A_1 и B_1, является прямым произведением этих подгрупп.

Покажем теперь, что

$$A \cap G_2 = A_1 \quad \text{и} \quad B \cap G_2 = B_1. \tag{3}$$

В самом деле, включения $A_1 \leqslant A \cap G_2$ и $B_1 \leqslant B \cap G_2$ очевидны. Если элемент $g \in G_2$, $g = xy$, где $x \in A_1$ и $y \in B_1$, принадлежит подгруппе A, то поскольку $A_1 \leqslant A$ и $A \cap B_1 = A \cap B \cap B_1 = 1$, получаем $y = 1$ и $g \in A_1$. Аналогично, если $g \in B$, то $x = 1$ и $g \in B_1$.

Равенства (3) означают, что подгруппа G_2 является (A, B, φ)-совместимой, и потому изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi} = \varphi_{G_2}$ подгруппы $\overline{A}$ фактор-группы $\overline{G} = G/G_2$ на ее подгруппу $\overline{B}$ (здесь используется та же система обозначений, что и в случае 1).

Утверждается, что в группе $\overline{G}$ выполнены равенства $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{U}$ и $\overline{V} = \overline{U}\overline{\varphi}$. В самом деле, второе из них следует непосредственно из определения отображения $\overline{\varphi}$, а первое равносильно равенству $AG_2 \cap BG_2 = UG_2$, в котором включение справа налево очевидно. Поскольку $AG_2 = AB_1$ и $BG_2 = A_1B$, для произвольного элемента $g \in AG_2 \cap BG_2$ имеем $g = ab_1 = a_1b$ для подходящих $a \in A$, $a_1 \in A_1$, $b \in B$ и $b_1 \in B_1$. Поэтому $a_1^{-1}a = bb_1^{-1} \in U$ и $g = (a_1^{-1}a)(a_1b_1) \in UG_2$.

Так как $\overline{B}_i = B_iG_2/G_2 \simeq B_i/(B_i \cap G_2)$, последовательность подгрупп

$$1 = \overline{B}_1 \leqslant \overline{B}_2 \leqslant \cdots \leqslant \overline{B}_n = \overline{B} \tag{4}$$

составляет нормальный ряд группы $\overline{B}$, факторы которого являются гомоморфными образами соответствующих факторов ряда (1). Кроме того, из (3) следует, что порядок группы $\overline{B} \simeq B/B_1$ меньше порядка группы B.

$(\overline{U}, \overline{V}, \overline{\varphi})$-совместимость всех членов ряда (4) следует из того, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют место легко проверяемые равенства

$$\overline{U} \cap \overline{B}_i = (U \cap B_i)G_2/G_2 \quad \text{и} \quad \overline{V} \cap \overline{B}_i = (V \cap B_i)G_2/G_2.$$

Если для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ элемент $\bar{b} = bG_2 \in \overline{B}$ принадлежит подгруппе $\overline{U} \cap \overline{B}_{i+1}$, то $b = xy$, где $x \in U \cap B_{i+1}$, $y \in G_2$, и потому $\bar{b}\overline{\varphi} = (x\varphi)G_2$. Так как $(x\varphi)^{-1}x \in B_i$, имеем

$$(\bar{b}\overline{\varphi})^{-1}\bar{b} = (x\varphi)^{-1}xyG_2 \in \overline{B}_i,$$

и потому ряд, полученный из последовательности (4) отбрасыванием повторяющихся членов, обладает всеми свойствами, позволяющими утверждать, что семейство $\mathcal{F}^p_{\overline{B}}(\overline{U}, \overline{V}, \overline{\varphi})$ содержит единичную подгруппу. Из индуктивного предположения теперь следует, что в группе $\overline{G}$ существует главный ряд $1 = \overline{G}_2 \leqslant \overline{G}_3 \leqslant \cdots \leqslant \overline{G}_m = \overline{G}$, все члены которого $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{\varphi})$-совместимы, причем для любого $i = 2, 3, \ldots, m-1$ и произвольного элемента $\overline{a} \in \overline{A} \cap \overline{G}_{i+1}$ имеет место равенство $(\overline{a}\,\overline{\varphi})\overline{G}_i = \overline{a}\overline{G}_i$. Записывая каждую подгруппу $\overline{G}_i$ в виде G_i/G_2 для подходящей подгруппы G_i группы G, получаем в этой группе последовательность нормальных подгрупп

$$G_2 \leqslant G_3 \leqslant \cdots \leqslant G_m = G, \tag{5}$$

все факторы которой имеют порядок p.

Легко видеть, что все члены последовательности (5) являются (A, B, φ)-совместимыми подгруппами. В самом деле, если $a \in A \cap G_i$, то элемент aG_2 принадлежит подгруппе $\overline{A} \cap \overline{G}_i$, и потому элемент $(aG_2)\overline{\varphi} = (a\varphi)G_2$ входит в подгруппу $\overline{B} \cap \overline{G}_i = (B \cap G_i)G_2/G_2$. Следовательно, $a\varphi = xy$, где $x \in B \cap G_i$ и $y \in G_2$. Так как $a\varphi \in B$, отсюда $y \in B \cap G_2 \leqslant B \cap G_i$, и потому $a\varphi \in B \cap G_i$. Таким образом, имеет место включение $(A \cap G_i)\varphi \leqslant B \cap G_i$; противоположное включение доказывается аналогично.

Заметим далее, что если для некоторого $i = 2, \ldots, m-1$ и элемента $a \in A$ имеет место включение $a \in G_{i+1}$, то элемент aG_2 принадлежит подгруппе $\overline{A} \cap \overline{G}_{i+1}$, откуда следует, что $(\overline{a}\,\overline{\varphi})^{-1}\overline{a} \in \overline{G}_i$, и потому $(a\varphi)^{-1}a \in G_i$.

Полагая теперь $G_1 = \{(a\varphi)^{-1}a \mid a \in A_1\}$, легко видеть, что G_1 — подгруппа группы G_2, изоморфная подгруппе A_1, причем $A \cap G_1 = 1$ и $B \cap G_1 = 1$. Поэтому подгруппа G_1 (A, B, φ)-совместима, и так как

$A \cap G_2 = A_1$ (и потому на элементах из $A \cap G_2$ отображение φ действует тождественно по модулю подгруппы G_1), последовательность подгрупп

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant G_2 \leqslant \cdots \leqslant G_m = G$$

является главным рядом группы G, удовлетворяющим всем требованиям определения (A, B, φ, p)-совместимости. Индуктивный шаг завершен, и предложение доказано.

Пусть снова G — произвольная группа с изоморфными подгруппами A и B, $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, $U = A \cap B$ и $V = U\varphi$. Следуя [3], подгруппу H группы G будем называть подъемом подгруппы $D \in \mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, если H входит в семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ и $B \cap H = D$. Предложение 5 из работы [3] утверждает, что если подгруппы A и B лежат в центре группы G и все подгруппы группы G, принадлежащие подгруппе $K = AB$ и имеющие в K конечный индекс, финитно отделимы в G, то для любой подгруппы из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ существует подъем. Более того, предложение 6 той же работы утверждает, что при тех же предположениях из того, что семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией, следует, что семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией. Аналогом первого из этих утверждений является

Предложение 3.3. *Пусть группа G аппроксимируема конечными p-группами и подгруппы A и B лежат в центре группы G. Предположим также, что имеет место одно из следующих двух условий:*

(1) *подгруппы A и B конечны;*
(2) *все p'-изолированные центральные подгруппы группы G отделимы в классе конечных p-групп.*

Тогда для любой подгруппы D из семейства $\mathcal{F}^p_B(U, V, \varphi)$ существует подъем H, принадлежащий семейству $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$.

Доказательство. Пусть D — произвольная подгруппа группы B, принадлежащая семейству $\mathcal{F}^p_B(U, V, \varphi)$. Тогда индекс подгруппы D в группе B конечен и является p-числом. Поэтому $C = D\varphi^{-1}$ является подгруппой конечного p-индекса группы A, и потому, как легко видеть, подгруппа CD имеет конечный p-индекс в группе $K = AB$. Кроме того, при доказательстве предложения 5 из [3] показано, что

$$A \cap CD = C \quad \text{и} \quad B \cap CD = D.$$

Отсюда следует, очевидно, что произвольная подгруппа H группы G, для которой выполнено равенство

$$K \cap H = CD, \tag{6}$$

является (A, B, φ)-совместимой, причем $B \cap H = D$. Покажем, что каждая удовлетворяющая равенству (6) нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G является (A, B, φ, p)-совместимой.

Так как подгруппа H (A, B, φ)-совместима, изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\varphi_H : AH/H \to BH/H$ подгруппы AH/H фактор-группы G/H на ее подгруппу BH/H, действующий по правилу $(aH)\varphi_H = (a\varphi)H$ (где $a \in A$).

Покажем, что в фактор-группе G/H выполнены равенства

$$AH/H \cap BH/H = UH/H \quad \text{и} \quad (UH/H)\varphi_{_H} = VH/H.$$

Так как второе из них является очевидным следствием определения отображения $\varphi_{_H}$, для этого достаточно показать, что $AH \cap BH = UH$.

Если $g \in AH \cap BH$, то $g = ax = by$, где $a \in A$, $b \in B$ и $x, y \in H$. Тогда $b^{-1}a = yx^{-1} \in K \cap H$, и ввиду (6) имеем $b^{-1}a = cd$ для некоторых элементов $c \in C$ и $d \in D$. Поэтому $ac^{-1} = bd \in A \cap B = U$, откуда $a \in Uc$, и так как $c \in H$, получаем $g = ax \in UH$. Поскольку противоположное включение очевидно, требуемое равенство доказано.

Так как $B \cap H = D$, отображение фактор-группы B/D в фактор-группу G/H, при котором смежному классу bD ставится в соответствие смежный класс bH (где $b \in B$), является изоморфизмом группы B/D на подгруппу BH/H группы G/H. При этом подгруппы UD/D и VD/D переходят в подгруппы UH/H и VH/H соответственно и изоморфизму $\varphi_{_D} : UD/D \to VD/D$ соответствует изоморфизм $\varphi_{_H} : UH/H \to VH/H$. Из предположения $D \in \mathcal{F}^p_B(U, V, \varphi)$ и предложения 2.1 следует, что семейство $\mathcal{F}^p_{B/D}(UD/D, VD/D, \varphi_{_D})$ содержит единичную подгруппу. Поэтому единичную подгруппу содержит семейство $\mathcal{F}^p_{BH/H}(UH/H, VH/H, \varphi_{_H})$, и в силу предложения 3.2 семейство $\mathcal{F}^p_{G/H}(AH/H, BH/H, \varphi_{_H})$ содержит единичную подгруппу. Из предложения 2.1 теперь следует, что подгруппа H принадлежит семейству $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$.

Таким образом, нам остается показать, что для любой подгруппы $D \in \mathcal{F}^p_B(U, V, \varphi)$ существует нормальная подгруппа H конечного p-индекса группы G, удовлетворяющая равенству (6), где $C = D\varphi^{-1}$.

В случае, когда подгруппы A и B конечны, это почти очевидно. Действительно, тогда подгруппа CD является конечной, и так как в группе, аппроксимируемой конечными p-группами, конечные подгруппы отделимы в классе конечных p-групп, фактор-группа G/CD является аппроксимируемой конечными p-группами. Поскольку ее подгруппа K/CD конечна, найдется содержащая подгруппу CD нормальная подгруппа H конечного p-индекса группы G такая, что в фактор-группе G/CD пересечение подгрупп H/CD и K/CD совпадает с единичной подгруппой. Ясно, что подгруппа H является искомой.

Предположим теперь, что все p'-изолированные центральные подгруппы группы G отделимы в классе конечных p-групп. Обозначим через Q p'-изолятор в группе G подгруппы CD, т. е. наименьшую p'-изолированную подгруппу, содержащую подгруппу CD. Поскольку из аппроксимируемости группы G конечными p-группами следует, что ее центр является отделимой в классе конечных p-групп и потому p'-изолированной подгруппой, подгруппа Q лежит в центре группы G. Поэтому Q совпадает с множеством всех таких элементов $g \in G$, что $g^n \in CD$ для некоторого целого числа n, взаимно простого с p. Так как CD является p'-изолированной подгруппой группы K, отсюда легко следует, что $K \cap Q = CD$. Поэтому $KQ/Q \simeq K/CD$ — конечная подгруппа фактор-группы G/Q, являющейся в силу предположения аппроксимируемой конечными p-группами. Следовательно, существует нормальная подгруппа H конечного p-индекса группы G такая, что $H \cap KQ = Q$. Так как

$$K \cap H = K \cap KQ \cap H = K \cap Q = CD,$$

подгруппа H является искомой, и предложение 3.3 доказано.

В случае, когда подгруппы A и B являются конечными, аналог упомянутого выше предложения 6 из [3] является непосредственным следствием доказательства предложения 3.3.

Предложение 3.4. *Пусть группа G аппроксимируема конечными p-группами и A и B — центральные конечные подгруппы группы G. Если семейство $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ содержит единичную подгруппу, то семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

В самом деле, для любого неединичного элемента $g \in G$ обозначим через M множество всех неединичных элементов подгруппы $K = AB$ и смежных классов gA и gB. Так как множество M конечно, найдется нормальная подгруппа H конечного p-индекса группы G, пересечение которой с множеством M пусто. Поскольку подгруппа H удовлетворяет условию (6) при $D = 1$, из доказательства предложения 3.3 следует, что $H \in \mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$. Кроме того, элемент g не входит в H, и если $g \notin A$ или $g \notin B$, то $g \notin AH$ или $g \notin BH$ соответственно.

Докажем теперь справедливость аналога предложения 6 из [3] при выполнении условия (2) предложения 3.3.

Предложение 3.5. *Пусть группа G аппроксимируема конечными p-группами, подгруппы A и B лежат в центре группы G и являются p'-изолированными. Пусть также все p'-изолированные центральные подгруппы группы G отделимы в классе конечных p-групп. Если семейство $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией, то семейство $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Доказательство. Предположим, что семейство $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что для любого неединичного элемента $g \in G$ можно найти подгруппу D из семейства $\mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$ и такой ее подъем $H \in \mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$, что $g \notin H$, а если элемент g не принадлежит подгруппе A или подгруппе B, то подгруппу D и ее подъем H можно выбрать так, чтобы g не входил в подгруппу AH или в подгруппу BH соответственно. Это, в свою очередь, непосредственно вытекает из следующих утверждений:

1. Если элемент g отличен от 1 и принадлежит подгруппе U, то существует не содержащая этого элемента подгруппа $D \in \mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$, произвольный подъем H которой также не содержит элемента g.

2. Если элемент g принадлежит подгруппе B и не входит в подгруппу A, то существует такая подгруппа $D \in \mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$, что $g \notin UD$, и для подъема H подгруппы D, построенного в доказательстве предложения 3.3, элемент g не принадлежит подгруппе AH (и тем более не принадлежит подгруппе H).

3. Если элемент g принадлежит подгруппе A и не входит в подгруппу B, то существует такая подгруппа $D \in \mathcal{F}_B^p(U, V, \varphi)$, что $g \notin VD$, и для подъема H подгруппы D, построенного в доказательстве предложения 3.3, элемент g не принадлежит подгруппе BH.

4. Если элемент g принадлежит подгруппе $K = AB$, но не входит ни в подгруппу A, ни в подгруппу B и $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$, то

существует такая подгруппа $D \in \mathcal{F}^p_B(U,V,\varphi)$, что $a\varphi \notin VD$ и $b \notin UD$, и для подъема H подгруппы D, построенного в доказательстве предложения 3.3, ни одна из подгрупп AH и BH не содержит элемента g.

5. Если элемент g не принадлежит подгруппе K, то семейство $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ содержит такую подгруппу H, что ни одна из подгрупп AH и BH не содержит элемента g.

Утверждение 1 очевидно. Доказательства утверждений 2, 3 и 4 практически дословно повторяют соответствующие рассуждения из доказательства предложения 6 работы [3]. Докажем утверждение 5.

Обозначим через X p'-изолятор подгруппы K в группе G и предположим сначала, что элемент g не принадлежит подгруппе X. Выберем произвольную подгруппу D из семейства $\mathcal{F}_B(U,V,\varphi)$ и, полагая, как в доказательстве предложения 3.3, $C = D\varphi^{-1}$, снова обозначим через Q p'-изолятор подгруппы CD. Нетрудно видеть, что $Q \leqslant X$, и из отделимости конечными p-группами подгруппы X группы G следует, очевидно, что подгруппа X/Q группы G/Q отделима в классе конечных p-групп. Так как элемент gQ не принадлежит подгруппе X/Q, в группе G найдется содержащая подгруппу Q нормальная подгруппа R конечного p-индекса такая, что элемент gQ не принадлежит подгруппе $X/Q \cdot R/Q$. Очевидно, что нормальную подгруппу H конечного p-индекса группы G такую, что $H \cap KQ = Q$, мы можем выбрать так, чтобы $H \leqslant R$. Так как $g \notin XR$, имеем $g \notin AH$ и $g \notin BH$, и потому подгруппа H является искомой.

Если g принадлежит подгруппе X, то $g^n \in K$ для некоторого целого числа n, взаимно простого с p. Так как подгруппы A и B являются p'-изолированными, элемент g^n не принадлежит ни подгруппе A, ни подгруппе B. Ввиду рассмотренного случая 4 существует такая подгруппа $H \in \mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$, что ни одна из подгрупп AH и BH не содержит элемента g^n. Тогда и элемент g не входит ни в одну из этих подгрупп.

§ 4. Доказательство теорем

Пусть группа G с подгруппами A и B и изоморфизмом $\varphi : A \to B$ удовлетворяет условиям теоремы 1: A и B — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы G, группа G аппроксимируема конечными p-группами и все ее центральные p'-изолированные подгруппы отделимы в классе конечных p-групп. Пусть последовательности подгрупп U_k и V_k группы G определены, как в формулировке теоремы А: $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.

Предположим сначала, что группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами. Тогда из предложения 2.2 следует, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi)$ является (A,B)-фильтрацией, и потому в силу предложения 2.3 подгруппы A и B являются p'-изолированными. Кроме того, ввиду включения $\mathcal{F}^p_G(A,B,\varphi) \subseteq \mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ семейство $\mathcal{F}_G(A,B,\varphi)$ также является (A,B)-фильтрацией, и из предложения 2.5 следует, что для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$. В силу предложения 3.1 для любого $k \geqslant 0$ семейство $\mathcal{F}^p_{V_k}(U_{k+1},V_{k+1},\varphi)$ является (U_{k+1},V_{k+1})-фильтрацией, и так как $U_{n+1} = V_{n+1} = U_n$, из предложения 2.4 вытекает, что пересечение всех φ-инвариантных подгрупп H конечного p-индекса группы U_n таких, что автоморфизм φ_H фактор-группы U_n/H, индуцированный отображением φ, является p-элементом, совпадает с единичной подгруппой.

Обратно, предположим, что утверждения (1) и (2) из формулировки теоремы 1 выполнены. Тогда из предложения 2.4 следует, что семейство $\mathcal{F}^p_{U_n}(U_{n+1}, V_{n+1}, \varphi)$ является (U_{n+1}, V_{n+1})-фильтрацией. Легко видеть также, что из p'-изолированности подгрупп A и B следует p'-изолированность всех подгрупп U_k и V_k, и так как эти подгруппы являются конечно порожденными абелевыми, для любого $k = 0, 1, \dots, n-1$ группа V_k с подгруппами U_{k+1} и V_{k+1} удовлетворяет условиям предложения 3.5. Повторное применение этого предложения показывает, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, откуда ввиду предложения 2.2 следует аппроксимируемость группы G^* конечными p-группами. Теорема 1 доказана.

Как отмечено в параграфе 1, необходимость условия в теореме 2 очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что порядок автоморфизма φ подгруппы $H_G(A, B, \varphi)$ является p-числом. Пусть целое число $n \geqslant 0$ таково, что подгруппы U_n и V_n совпадают и потому $V_n = H_G(A, B, \varphi)$. В силу предложения 2.4 это означает, что семейство $\mathcal{F}^p_{V_n}(U_{n+1}, V_{n+1}, \varphi)$ содержит единичную подгруппу. Повторное применение предложения 3.2 показывает, что тогда и семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ содержит единичную подгруппу, и потому из предложения 3.4 следует, что семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, что, в свою очередь, ввиду предложения 2.2 влечет аппроксимируемость группы G^* конечными p-группами. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сибир. мат. журн. 1999. Т. 40. С. 395—407.
2. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
3. *МолдаванскийД. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123—133.
4. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f.g. abelian group// J. of Pure Appl. Algebra 1991. Vol. 76. P. 167—178.