ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В работе рассматривается свойство финитной аппроксимируемости группы, а также ряд его обобщений применительно к группам, строение которых может быть описано при помощи свободных конструкций, т. е. свободного произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения.

Понятие финитно аппроксимируемой группы, как свидетельствуют В. Чандлер и В. Магнус в историческом обзоре [16], впервые в явном виде появилось в работе А. И. Мальцева [9], где была установлена финитная аппроксимируемость конечно порожденных матричных групп и доказана хопфовость конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп. Это понятие обобщалось затем в различных направлениях; в частности, в статьях А. И. Мальцева [10] и [11] рассматривались свойства апроксимируемости групп и отделимости подгрупп в произвольном классе групп. В настоящее время в наиболее общей форме понятие аппроксимируемости групп определяется следующим образом (см. [5]):

Пусть G — некоторая группа и ρ — отношение между элементами и (или) множествами элементов, определенное на группе G и всех ее гомоморфных образах. Пусть также $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Будем говорить, что группа G *аппроксимируема группами из класса* $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-*аппроксимируема*) *относительно отношения* ρ, если для любых элементов и множеств элементов из G, не находящихся в отношении ρ, существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образы этих элементов и множеств также не находятся в отношении ρ.

В работах по этой тематике чаще всего рассматривается аппроксимируемость относительно отношения равенства (и в этом случае мы будем говорить просто о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости), отношения сопряженности элементов и отношения вхождения в подмножество (если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема относительно вхождения в подмножество M, говорят, что подмножество M является $\mathcal{K}$-отделимым в G). При этом, как правило, в качестве $\mathcal{K}$ выступает или класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп, или класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп, или класс $\mathcal{N}$ всех нильпотентных групп. Таким образом, в частности, понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы.

Одним из заметных направлений в исследованиях по аппроксимируемости групп является изучение поведения того или иного аппроксимационного свойства относительно той или иной теоретико-групповой конструкции. Так, прямое или декартово произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых или $\mathcal{K}$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп является, очевидно, группой, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой или $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности соответственно. Вместе с тем, прямое произведение двух свободных групп ранга 2 содержит конечно порожденную подгруппу, не являющуюся $\mathcal{F}$-отделимой (см., напр., [17]), тогда как в силу теоремы Холла – Бернса (см. [7, с. 34]) в любой свободной группе все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.

Аппроксимируемость свободного произведения групп рассматривалась К. Грюнбергом в работе [29]. В этой работе вводится понятие корневого класса групп и доказывается, что если класс групп $\mathcal{K}$ является корневым, то свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп будет снова $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда произвольная свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема. (Напомним, что класс групп $\mathcal{K}$, содержащий хотя бы одну неединичную группу, называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений и для любой последовательности $C \leqslant B \leqslant A$ подгрупп группы A такой, что C нормальна в B, B нормальна в A и фактор-группы B/C и A/B принадлежат классу $\mathcal{K}$, в подгруппе C содержится некоторая нормальная подгруппа D группы A, такая, что $A/D \in \mathcal{K}$.) Недавно Д. Н. Азаров [1] заметил, что произвольный корневой класс содержит или все конечно порожденные нильпотентные группы, или все конечные p-группы, и потому каждая свободная группа является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой для любого корневого класса $\mathcal{K}$. С учетом этого замечания теорема Грюнберга утверждает, таким образом, что для любого корневого класса $\mathcal{K}$ класс $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп замкнут относительно свободных произведений. В частности, свободное произведение $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп или $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой или $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой соответственно. Свободное произведение $\mathcal{N}$-аппроксимируемых групп далеко не всегда будет $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой (простейшим примером может служить свободное произведение двух циклических групп порядков 2 и 3); необходимые, а также достаточные условия $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения указаны А. И. Мальцевым [10]. Ранее $\mathcal{N}$-аппроксимируемость произвольной свободной группы была установлена В. Магнусом. В. Н. Ремесленников [13] показал, что свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, а в работе Н. С. Романовского [15] доказано, что в свободном произведении произвольного семейства групп все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы, если $\mathcal{F}$-отделимыми являются все конечно порожденные подгруппы в каждой группе этого семейства.

Свободное произведение является исторически первой из так называемых свободных конструкций групп; другими свободными конструкциями являются обобщенное свободное произведение, т. е. свободное произведение групп с объединенными подгруппами, и расширение Хигмана – Неймана – Нейман (HNN-расширение). Положение с аппроксимационными свойствами этих конструкций оказывается более сложным, чем для обычного свободного произведения: свободное произведение с объединенными подгруппами двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп и HNN-расширение $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы далеко не всегда являются $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми группами.

По-видимому, первым примером обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп, не являющегося $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, можно считать группу Хигмана

$$\langle a, b, c;\ b^{-1}ab = a^2,\ c^{-1}ac = a^2\rangle,$$

предложенную им в работе [31] в качестве примера нехопфовой конечно определенной группы. Ввиду нехопфовости и в силу теоремы Мальцева эта группа не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой. С другой стороны, она раскладывается в свободное произведение с объединенной циклической подгруппой групп $\langle a, b;\ b^{-1}ab = a^2\rangle$ и $\langle a, c;\ c^{-1}ac = a^2\rangle$, входящих в семейство групп, называемых теперь группами Баумслага – Солитэра, т. е. в семейство групп с одним определяющим соотношением вида $H(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^lb = a^m\rangle$, где l и m ненулевые целые числа. Именно в этом классе групп Г. Баумслаг и Д. Солитэр в 1962 году обнаружили первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми: оказалось (см. [23] и [38]), что группа

$H(l,m)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|l|=1$, или $|m|=1$, или $|l|=|m|$. Мы видим, таким образом, что группа Хигмана действительно является обобщенным свободным произведением двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп. Кроме того, поскольку каждая группа $H(l,m)$ является HNN-расширением с проходной буквой b бесконечной циклической группы, порождаемой элементом a, среди групп Баумслага – Солитэра мы находим и примеры HNN-расширений $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп, не являющихся $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Началом систематического изучения $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободного произведения $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ двух групп A и B с объединенными подгруппами H и K следует, по-видимому, считать работу Г. Баумслага [22]. В этой работе доказано, что если группы A и B конечны, то группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, и на основе этого результата с использованием введенного там же понятия пары совместимых подгрупп из свободных множителей сформулировано весьма общее достаточное (а также и некоторое необходимое) условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух произвольных групп. Тем самым в работе [22] была предложена определенная методика получения конкретных результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. Так, например, эта методика практически сразу приводит к утверждению об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп в случае, когда объединяемые подгруппы конечны, а также позволяет легко доказать $\mathcal{F}$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения двух конечно порожденных абелевых групп. Подавляющее большинство известных результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп было получено с использованием этой методики.

Развитие исследований $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений началось с работ [19] и [27], в которых практически одновременно и независимо было показано, что HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\big)$, базовая группа G которого конечна, является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Более того, в работе [19] фактически было сформулировано понятие совместимой подгруппы, явившееся аналогом введенного Баумслагом вышеупомянутого понятия пары совместимых подгрупп, и на языке этого понятия указано достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения с произвольной базовой группой, из которого легко вытекает, например, $\mathcal{F}$-аппроксимируемость HNN-расширения, базовая группа которого $\mathcal{F}$-аппроксимируема, а связанные подгруппы конечны.

Некоторое уточнение формулировок из [19] приводит к методике, аналогичной той, которая была указана Баумслагом, и состоящей в том, что, как и в случае обобщенных свободных произведений, условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения могут быть выражены как определенные свойства семейства всех совместимых нормальных подгрупп конечного индекса базовой группы. А именно, необходимое условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения состоит в том, что базовая группа его является не просто $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, а аппроксимируемой фактор-группами по нормальным совместимым подгруппам конечного индекса, а достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости получается, если к этому добавить требование отделимости в классе таких фактор-групп каждой из связанных подгрупп (точные формулировки см. ниже). Как и в случае обобщенных свободных произведений, подавляющее большинство результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений получено с помощью этой методики. Это относится и к ряду результатов данной работы. Отметим, также что указанное необходимое условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения в общем случае не является достаточным (соответствующие примеры можно найти уже среди HNN-расширений, базовая группа которых является бесконечной циклической, т. е. среди групп Баумслага – Солитэра); тем не менее, здесь будет доказано, что что для так называемых *нисходящих* HNN-расширений, т. е. HNN-расширений, в которых одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой, это условие является и достаточным для $\mathcal{F}$-аппроксимируемости.

Переходя к рассмотрению $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений, заметим, что в формулировке и обосновании указанных выше условий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения решающую роль играет следующее свойство совместимых подгрупп: образы связанных подгрупп в фактор-группе базовой группы по нормальной совместимой подгруппе конечного индекса оказываются изоморфными, и соответствующее HNN-расширение этой фактор-группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, будучи HNN-расширением конечной группы. Поскольку как обобщенное свободное произведение двух конечных p-групп, так и HNN-расширение конечной p-группы может не быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, для получения аналогов соответствующей методики изучения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных конструкций групп необходимо располагать условиями $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп и HNN-расширения конечной p-группы. Для обобщенного свободного произведения соответствующий критерий указан Г. Хигманом [32], и модифицированное на его основе понятие пары совместимых подгрупп действительно привело к аналогу методики Баумслага для изучения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения (см. [8]).

Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной p-группы, предложенный в работе [41], для указанной цели не подходит. В данной работе получен другой критерий, формулируемый практически в тех же терминах, что и вышеупомянутый критерий Хигмана, и основанная на нем соответствующая модификация понятия совместимой подгруппы позволила получить условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений, формулировка которых практически дословно повторяет упоминавшиеся выше условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости. Это, в свою очередь, приводит к характеризации $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых HNN-расширений с произвольной базовой группой при некоторых дополнительных предположениях, включающих центральность связанных подгрупп, а также групп с одним определяющим соотношением, принадлежащих классу групп Баумслага – Солитэра и классу групп Бруннера (см. ниже).

Напомним, далее, что группа G называется хопфовой, если она не может быть изоморфной никакой своей истинной фактор-группе, т. е. для любой нормальной подгруппы N группы G из $G/N \simeq G$ следует, что $N = 1$. В противном случае группа G называется нехопфовой.

Вопрос о существовании конечно порожденных нехопфовых групп был сформулирован Хопфом в 1932 году (см. [16]), и первым общим результатом по этому вопросу явилась упомянутая выше теорема Мальцева [9], утверждающая хопфовость произвольной конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы. Первый пример конечно порожденной нехопфовой группы принадлежит Б. Нейману [40]; построенная им нехопфова группа имеет два порождающих, но требует бесконечного множества определяющих соотношений. Выше приводился пример Г. Хигмана [31] нехопфовой группы с тремя порождающими и двумя определяющими соотношениями. Утверждения об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости произвольной свободной группы и, как следствие, о хопфовости свободной группы конечного ранга вытекают, очевидно, уже из результатов работы А. И. Мальцева [9]. Ожидалось, что этими же свойствами обладают и формально близкие к свободным группы, задаваемые одним определяющим соотношением, но в упоминавшейся уже статье [23] Г. Баумслаг и

Д. Солитэр обнаружили примеры нехопфовых групп среди групп вида

$$H(l,m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^{l}b = a^{m}\rangle,$$

где m и n — произвольные целые числа, отличные от 0. Новые примеры нехопфовых групп с одним определяющим соотношением были затем найдены А. Бруннером [25] среди некоторых HNN-расширений групп Баумслага – Солитэра, а именно среди групп вида

$$G(l,m;k) = \langle a, t;\ t^{-1}a^{-k}ta^{l}t^{-1}a^{k}t = a^{m}\rangle,$$

где l, m и k — произвольные целые числа, отличные от нуля. (То, что группа $G(l,m;k)$ является HNN-расширением группы $H(l,m)$, становится очевидным после введения в ее представление нового образующего b вместе с определяющим соотношением $b = t^{-1}a^{k}t$.) Следует, впрочем, заметить, что на группы этого класса еще в 1969 году обратил внимание Г. Баумслаг [20], доказав, что все конечные гомоморфные образы группы $G(2,1;1)$ являются циклическими группами (и приведя тем самым наиболее впечатляющий пример группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами). Тем не менее, здесь нам будет удобно называть группы вида $G(l,m;k)$ группами Бруннера.

Второй вопрос Хопфа заключался в существовании конечно порожденных неизоморфных групп, гомоморфно отображающихся друг на друга. Примеры таких групп можно построить, исходя из приведенной выше группы Хигмана (см. [39]). В работе [23] также был приведен пример двух неизоморфных групп, гомоморфно отображающихся друг на друга, причем одна из них совпадает с некоторой группой $H(l,m)$, а другая, как удалось установить, не может быть определена одним соотношением. В связи с этим в 1969 году автором был сформулирован вопрос (см. [6, вопрос 3.33]), будут ли изоморфны две группы, каждая из которых задается одним определяющим соотношением и является гомоморфным образом другой? Здесь будет доказано, что для групп Баумслага – Солитэра ответ на этот вопрос положителен, и, более того, будет дана классификация этих групп. Отрицательный ответ на этот вопрос на примерах, являющихся группами Бруннера, был анонсирован в сообщении [3]. В порядке уточнения некоторых формулировок из этого сообщения здесь при $|l| \neq |m|$ будет получена классификация групп Бруннера, а также будут перечислены все пары неизоморфных групп Бруннера, гомоморфно отображающихся друг на друга.

Интересное свойство нехопфовых групп, отвечая на один вопрос В. Магнуса, рассматривает Р. Хиршон в работе [33]. Из хопфовости конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп легко следует, что ядро любого сюръективного эндоморфизма конечно порожденной группы G содержится в пересечении $\sigma(G)$ всех нормальных подгрупп конечного индекса этой группы. Спрашивается, какие нехопфовы группы G с конечным числом порождающих обладают хотя бы одним таким сюръективным эндоморфизмом, объединение ядер всех степеней которого совпадает с $\sigma(G)$? В работе [33] такие эндоморфизмы были явно указаны для ряда известных конечно определенных нехопфовых групп и поставлен вопрос о существовании эндоморфизма с указанным свойством в произвольной конечно определенной нехопфовой группе. Здесь будет показано, что ответ на этот вопрос отрицателен, а также дано описание групп Баумслага – Солитэра, таким эндоморфизмом обладающих.

Рассмотрим, далее, еще один подкласс класса групп с одним определяющим соотношением, состоящий из групп с нетривиальным центром. Хорошо известно, что группы этого класса обладают рядом аппроксимационных свойств. Все они $\mathcal{F}$-аппроксимируемы и даже $\mathcal{F}$-аппроксимируемы относительно сопряженности (см., напр., [28]). Критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости таких групп получен в работах [36] и [37], причем установлено, что группа с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром $\mathcal{N}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой для некоторого простого p. В статье [26] было доказано, что в группе с одним определяющим соотношением, обладающей нетривиальным центром, все конечно порожденные нормальные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. В действительности, требование нормальности подгрупп излишне: здесь будет доказано, что в группе с одним определяющим соотношением, обладающей нетривиальным центром, все конечно порожденные подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. В силу общего замечания А. И. Мальцева [11] о связи между $\mathcal{F}$-аппроксимируемостью конечно определенной группы относительно некоторого отношения и алгоритмической распознаваемостью этого отношения следствием этого результата является установленная В. Н. Безверхним [2] для групп с одним соотношением и нетривиальным центром разрешимость проблемы вхождения в конечно порожденные подгруппы.

Говоря о группе, в которой $\mathcal{K}$-отделимы все подгруппы, или все конечно порожденные подгруппы, или все циклические подгруппы, обычно тем самым предполагают $\mathcal{K}$-отделимость и единичной подгруппы, т. е.

$\mathcal{K}$-аппроксимируемость этой группы. Тем не менее, $\mathcal{K}$-отделимость подгрупп оказывается, как правило, более сильным свойством группы, чем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость. Например, группа Баумслага – Солитэра $H(l, 1)$ при $|l| > 1$ содержит циклическую подгруппу, не являющуюся $\mathcal{F}$-отделимой. В статье [26] приводится пример группы, являющейся расширением свободной группы ранга два при помощи бесконечной циклической группы и содержащей не $\mathcal{F}$-отделимую 2-порожденную подгруппу. С другой стороны, по теореме 1 из [11] эта группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, а по теореме 4 из [17] — π_c-*группой* (т. е. группой, все циклические подгруппы которой $\mathcal{F}$-отделимы).

Группы, упомянутые в предыдущем абзаце, являются нисходящими HNN-расширениями, и здесь будет получено необходимое и достаточное условие принадлежности произвольного нисходящего HNN-расширения классу π_c-групп. Это условие, формулируемое практически в тех же терминах, что и критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, означает, что каждая циклическая подгруппа базовой группы HNN-расширения отделима ее фактор-группами по нормальным совместимым подгруппам конечного индекса.

Рассмотрим теперь другой вид отделимости подгрупп, который получается заменой отношения принадлежности подмножеству отношением быть сопряженным с некоторым элементом этого подмножества. Более точно, назовем подмножество M группы G сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что элемент $a\varphi$ не сопряжен в группе $G\varphi$ ни с одним элементом из подмножества $M\varphi$.

Этот вид отделимости подмножеств также представляет определенный интерес. Хорошо известно, например, что если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то для любой нормальной подгруппы N группы G $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы G/N равносильна $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы N. В работе [4] замечено, что если снова $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс , то для любой группы G и произвольной ее нормальной подгруппы N фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы G по подгруппе N сопряженно $\mathcal{K}$-отделим.

Дж. Дайер [28] доказала, что в произвольной конечно порожденной нильпотентной группе и в любой свободной группе все циклические подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы. Из результатов работы [42] следует, что распространить это утверждение на произвольные конечно порожденные подгруппы любой нильпотентной группы с конечным числом порождающих нельзя. С другой стороны, в данной работе доказано, что в свободной группе все конечно порожденные подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы.

В общую схему понятия аппроксимируемости группы относительно некоторого отношения между элементами и множествами элементов этой группы укладывается еще одно естественное аппроксимационное свойство групп. Будем говорить, что группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности (конечно порожденных) подгрупп, если для любых двух (конечно порожденных) подгрупп H и K группы G, не сопряженных в ней, существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу X такой, что образы $H\varphi$ и $K\varphi$ подгрупп H и K не сопряжены в группе X.

Это свойство групп рассматривалось в работе В. Н. Ремесленникова [14], где было доказано, что конечно порожденные нильпотентные группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности подгрупп. Впоследствии этот результат был распространен на класс полициклических групп в работе [30]. Здесь будет доказано, что произвольная свободная группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп.

Ряд результатов диссертации относится к близкой к аппроксимационным свойствам проблеме определяемости $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы G семейством $\mathcal{F}(G)$ ее конечных гомоморфных образов. Хорошо известно, что вопрос о том, будут ли $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы G и H обязательно изоморфны, если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$, в общем случае решается отрицательно. В. Н. Ремесленников [14] привел пример двух неизоморфных 2-порожденных 4-ступенно нильпотентных групп с одинаковыми конечными гомоморфными образами. В работе Г. Баумслага [21] указана серия пар неизоморфных метациклических групп, также имеющих одни и те же конечные гомоморфные образы. С другой стороны, имеется не так уж много результатов противоположного характера. Уместно напомнить, в частности, что до сих пор неизвестен ответ на вопрос В. Н. Ремесленникова, будут ли изоморфными две конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов, если одна из них — свободная или свободная разрешимая (см. [6], вопрос 5.48).

Цель работы. Целью работы является получение новых критериев $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений при некоторых ограничениях на базовую группу и связанные подгруппы, получение критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной p-группы, разработка на его основе методики изучения $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений с произвольной базой и применение этой методики к характеризации $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости некоторых HNN-расширений и групп с одним определяющим соотношением, принадлежащих классам групп Баумслага – Солитэра и Бруннера. Будет получена классификация групп Баумслага – Солитэра и некоторого подкласса групп Бруннера и дано описание всех пар неизоморфных групп Бруннера, гомоморфно отображающихся друг на друга, получен критерий хопфовости групп Бруннера и описание тех групп Баумслага – Солитэра, объединение ядер степеней некоторого сюръективного эндоморфизма которых совпадает с пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса. Будет доказана $\mathcal{F}$-отделимость конечно порожденных подгрупп групп с одним определяющим соотношением, обладающих нетривиальным центром, $\mathcal{F}$-аппроксимируемость произвольной свободной группы относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп, получен ряд результатов о группах с одинаковыми конечными гомоморфными образами.

Научная новизна работы. Все основные результаты работы являются новыми.

Методы исследования. В работе используются обычные методы комбинаторной теории групп, используемые при изучении свободных конструкций групп.

Теоретическое и практическое значение работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп, а также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзных и Международных конференциях в Красноярске (1980, 1993), Ленинграде (1981), Минске (1983), Свердловске (1989), Новосибирске (1989), Барнауле (1991), Санкт-Петербурге (1997), Туле (2003), Москве (2004), на семинаре по теории групп МГУ и на алгебраическом семинаре Ивановского госуниверситета.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [44]–[61]. В статьях, написанных в соавторстве, формулировки результатов и идеи доказательств принадлежат соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на 10 параграфов, и изложена на 204 страницах. Список литературы состоит из 81 наименования.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Как уже отмечалось выше, в работе получен ряд новых результатов по аппроксимируемости HNN-расширений в классах всех конечных групп и всех конечных p-групп с последующим их применением к характеризации аппроксимируемости в этих классах групп с одним определяющим соотношением, принадлежащих семействам групп Баумслага – Солитэра и Бруннера. Решается ряд вопросов, связанных с хопфовостью этих групп и свойством финитной отделимости подгрупп. Перейдем к точным формулировкам и более подробному описанию этих и других результатов работы.

Напомним, прежде всего, что если G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A и B и фиксированным изоморфизмом $\varphi : A \to B$, то *HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными (относительно изоморфизма φ) подгруппами A и B* называется группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$, порождаемая элементами, порождающими группу G, и еще одним элементом t и определяемая всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A$. Группу G называют *базовой группой* HNN-расширения.

В первом параграфе работы напоминаются основные свойства этой конструкции (как и необходимые для доказательств свойства обобщенного свободного произведения групп) и приводятся условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения. Приведем соответствующие определения и формулировки.

Если снова G — некоторая группа, с подгруппами A и B и изоморфизмом $\varphi : A \to B$, подгруппа H группы G называется (A, B, φ)-*совместимой*, если $(A \cap H)\varphi = B \cap H$. $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ будет обозначать семейство всех (A, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G.

Следуя Г. Баумслагу [22], семейство $\mathcal{X}$ нормальных подгрупп некоторой группы G будем называть *фильтрацией*, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если A — подгруппа группы G, то фильтрация $\mathcal{X}$ называется A-*фильтрацией*, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе A, найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}$ такая, что $g \notin AN$. Если A и B — две подгруппы группы G, то фильтрацию $\mathcal{X}$ будем называть (A, B)-*фильтрацией*, если она одновременно является и A-фильтрацией, и B-фильтрацией.

Следующее утверждение, являющееся некоторой модификацией теоремы 4.2 из [19], используется практически в каждом исследовании финитной аппроксимируемости HNN-расширений (нумерация всех приводимых здесь утверждений совпадает с принятой в диссертации):

Предложение 1.16. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi\big)$$

— HNN-расширение группы G. Тогда

(1) *если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией;*
(2) *если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Простые примеры показывают, что доставляемое утверждением (1) предложения 1.16 необходимое условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения, вообще говоря, не является достаточным. Тем не менее, можно указать достаточно широкий класс HNN-расширений, для $\mathcal{F}$-аппроксимируемости которых указанное необходимое условие является и достаточным. Это так называемые *нисходящие* HNN-расширения, т. е. HNN-расширения, в которых одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой. Имеет место

Теорема 1.1. *Пусть G — некоторая группа, B — подгруппа группы G, изоморфная этой группе и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$ — нисходящее HNN-расширение группы G. Группа G^* является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}_G(G, B, \varphi)$ является фильтрацией.*

С помощью теоремы 1.1 можно получить следующее достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения:

Теорема 1.2. *Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}G\,t = B, \varphi\big)$ — нисходящее HNN-расширение конечно порожденной группы G, причем подгруппа B*

имеет конечный индекс по модулю коммутанта G' группы G. Предположим также, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого числа p из некоторого бесконечного множества простых чисел. Тогда G^* является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Так как свободные группы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы при любом простом p, из теоремы 1.2 получаем

Следствие 1. *Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}G\,t = B, \varphi\big)$ — нисходящее HNN-расширение свободной группы G конечного ранга. Если подгруппа BG' имеет конечный индекс в группе G, то группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Если G — свободная нильпотентная группа конечного ранга и B — подгруппа группы G, изоморфная ей, то, как известно, индекс подгруппы BG' в группе G конечен. Поскольку, к тому же, свободные нильпотентные группы аппроксимируются конечными p-группами при любом простом p, то имеем

Следствие 2. *Произвольное нисходящее HNN-расширение конечно порожденной свободной нильпотентной группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.*

Теоремы 1.1 и 1.2 и приведенные здесь следствия из теоремы 1.2 были опубликованы в работе [48] в 1992 году. В той же работе отмечался, как открытый, вопрос о том, будет ли произвольное нисходящее HNN-расширение свободной группы $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Недавно в работе [24] с помощью методов, отличных от используемых здесь, было доказано, что любое нисходящее HNN-расширение конечно порожденной свободной группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В работе [34] утверждение следствия 2 было распространено на произвольные полициклические группы.

Условия $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширения, содержащиеся в предложении 1.16, несмотря на их весьма общий характер и наличие существенного пробела между необходимым и достаточным условиями, в ряде случаев позволяют получать конкретные критерии $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi\big)$. Так, в случае, когда группа G является абелевой с конечным числом порождающих, соответствующий критерий был получен в работе [18]. Здесь такой критерий установлен при более слабых предположениях:

Теорема 2.1. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе AB, $\mathcal{F}$-отделимы. Построим две последовательности U_k и V_k подгрупп группы G, полагая $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.*

Группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi\big)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$.

При ограничениях, накладываемых на группу G и ее подгруппы A и B в формулировке теоремы 2.1, можно получить еще один критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G^*. А именно, из предложения 1.16 без труда получается следующее достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости:

Предложение 1.17. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Если группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема, подгруппы A и B $\mathcal{F}$-отделимы в G и в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится некоторая подгруппа из семейства $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$, то группа*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$$

является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой.

В рассматриваемом случае это условие оказывается и необходимым:

Теорема 2.2. *Пусть группа G и ее подгруппы A и B удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Если группа G^* $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится некоторая (A, B, φ)-совместимая нормальная подгруппа, имеющая в G конечный индекс.*

Приведем два следствия сформулированных утверждений. В первом из них речь идет о $\mathcal{F}$-отделимости циклических подгрупп.

Напомним, что группа G называется π_c-группой, если все ее циклические подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы. Очевидно, что произвольная π_c-группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой. Обратное, вообще говоря, не имеет места; простейший контрпример, как известно, доставляет группа Баумслага – Солитэра вида $H(l, 1)$, являющаяся HNN-расширением бесконечной циклической группы. С другой стороны, легко показать (см., напр., [35]), что если группа G является π_c-группой, подгруппы A и B $\mathcal{F}$-отделимы и каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит некоторую (A, B, φ)-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса, то группа G^* является π_c-группой. Поэтому из теоремы 2.2 получаем

Следствие 1. *Пусть группа G и ее подгруппы A и B удовлетворяют условиям теоремы 2.1, и пусть, кроме того, G является π_c-группой. Группа G^* является π_c-группой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}$-аппроксимируема.*

Второе следствие указывает на более конкретное применение этих результатов. Из теоремы 6 работы [11] следует, что в произвольной полициклической группе все подгруппы являются финитно отделимыми. Так как свойство финитной отделимости всех подгрупп сохраняется при конечных расширениях, имеем

Следствие 2. *Пусть группа G является конечным расширением полициклической группы и A и B — собственные центральные подгруппы группы G. Пусть последовательности U_k и V_k подгрупп группы G определены как в теореме 2.1. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$;*
(2) *группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой;*
(3) *группа G^* является π_c-группой.*

В случае, когда группа G является конечно порожденной абелевой, равносильность утверждений (2) и (3) следствия 2 была известна: она вытекает из результатов работ [18] и [43]. Равносильность утверждений (1) и (2) дает для HNN-расширения с конечно порожденной абелевой базой критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости, отличный от соответствующего критерия из работы [18]. Можно предположить, что в ряде случаев применение критерия, указанного здесь, оказывается более предпочтительным.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 используют прием, который можно назвать *методом спуска и подъема совместимых подгрупп* и который состоит в следующем.

Пусть, как и выше, G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $U = A \cap B$ и $V = U\varphi$. Таким образом, U и V — подгруппы группы B, и φ — изоморфизм подгруппы U на подгруппу V (здесь и ниже ограничение отображения φ на произвольную подгруппу группы A обозначается тем же символом φ).

При определенных ограничениях, накладываемых на группу G и ее подгруппы A и B, некоторые свойства семейств $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ и $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ взаимосвязаны. В самом общем случае имеет место

Предложение 2.4. *Для любой подгруппы $H \in \mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ подгруппа $D = B \cap H$ принадлежит семейству $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$.*

Если семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией ((A, B)-фильтрацией), то семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ также является фильтрацией (соответственно, (U, V)-фильтрацией).

Подгруппу H группы G будем называть *подъемом подгруппы* $D \in \mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, если H входит в семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ и $B \cap H = D$.

Предложение 2.5. *Пусть подгруппы A и B лежат в центре группы G и пусть все подгруппы группы G, принадлежащие подгруппе $K = AB$, финитно отделимы в G. Тогда*

(1) *для любой подгруппы из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ существует подъем;*
(2) *если каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы B содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$, то и каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$.*

Отсюда вытекает частичное обращение второго утверждения предложения 2.4:

Предложение 2.6. *Пусть подгруппы A и B лежат в центре группы G и пусть все подгруппы группы G, принадлежащие подгруппе $K = AB$, финитно отделимы в G. Тогда если семейство $\mathcal{F}_B(U, V, \varphi)$ является (U, V)-фильтрацией, то семейство $\mathcal{F}_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией.*

Отметим, что если вместо (U, V)-фильтрации говорить просто о фильтрации, аналог предложения 2.6 может оказаться неверным.

В третьем параграфе работы рассматриваются условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширений, и первым результатом, полученным здесь, является следующий критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения, базовая группа которого является конечной p-группой:

Теорема 3.1. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. HNN-расширение $G^* =$*

$\big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$ *является* $\mathcal{F}_p$*-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

группы G*, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

(1) *для любого* $i = 0, 1, \ldots, n$ *подгруппа* G_i *является* (A, B, φ)*-совместимой, т. е.* $(A \cap G_i)\varphi = B \cap G_i$ *;*
(2) *для любого* $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *и для каждого элемента* $a \in A \cap G_{i+1}$ *элементы* $a\varphi$ *и* a *сравнимы по модулю подгруппы* G_i*.*

(Напомним, что *главным рядом* некоторой группы G называется ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений.)

Этот критерий формулируется практически в тех же терминах, что и упоминавшийся выше критерий Хигмана для обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп, и в отличие от критерия, указанного в работе [41], позволяет получить методику, аналогичную описанной выше методике изучения $\mathcal{F}$-аппроксимируемости HNN-расширений. А именно, формулировка теоремы 3.1 подсказывает возможность введения следующего аналога понятия (A, B, φ)-совместимой подгруппы.

Пусть снова G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть p — простое число. Подгруппу H группы G будем называть (A, B, φ, p)*-совместимой*, если существует последовательность

$$H = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_{n-1} \leqslant G_n = G$$

подгрупп группы G такая, что

1) для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ G_i является нормальной (A, B, φ)-совместимой подгруппой группы G и

2) для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ порядок фактор-группы G_{i+1}/G_i равен p и для произвольного элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ элементы $a\varphi$ и a сравнимы по модулю подгруппы G_i.

Пусть $\mathcal{F}_G^p(A, B, \varphi)$ обозначает семейство всех (A, B, φ, p)-совместимых подгрупп группы G. Имеет место следующий аналог предложения 1.16:

Предложение 3.5. *Пусть G — некоторая группа, A и B — подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A\,t = B, \varphi\big)$ — HNN-расширение группы G. Тогда*

(1) *если группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является фильтрацией;*
(2) *если семейство $\mathcal{F}^p_G(A, B, \varphi)$ является (A, B)-фильтрацией, то группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Применение этого утверждения вместе с использованием метода спуска и подъема совместимых подгрупп позволяет получить следующие результаты:

Теорема 3.2. *Пусть A и B — конечно порожденные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, причем $A \neq G$ и $B \neq G$. Предположим также, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и что все ее центральные p'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы. Пусть последовательности U_k и V_k подгрупп группы G определены, как в формулировке теоремы 2.1, т. е. $U_0 = A$, $V_0 = B$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.*

Группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi\big)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда

(1) *подгруппы A и B p'-изолированы в группе G и*
(2) *для некоторого $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$ и пересечение всех φ-инвариантных подгрупп H конечного p-индекса группы U_n таких, что автоморфизм $\varphi_{{}_H}$ фактор-группы U_n/H, индуцированный отображением φ, является p-элементом, совпадает с единичной подгруппой.*

(Напомним, что подгруппа X группы Y называется *p'-изолированной*, если для любого простого числа $q \neq p$ и любого элемента $y \in Y$ из $y^q \in X$ следует, что $y \in X$. Легко видеть, что всякая $\mathcal{F}_p$-отделимая подгруппа должна быть p'-изолированной.)

Теорема 3.3. *Пусть G — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа, A и B — конечные центральные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть $H_G(A, B, \varphi)$ — наибольшая из подгрупп H группы G таких, что $H\varphi = H$. Группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A\,t = B,\ \varphi\big)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда порядок автоморфизма φ группы $H_G(A, B, \varphi)$ является p-числом.*

Отметим, что теорема 3.3 обобщает теорему 8 работы [41], где аналогичный критерий был получен для случая, когда G является конечной абелевой p-группой.

Из теорем 3.2 и 3.3 следует также, что *если A и B — центральные подгруппы $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы G и $A \cap B = 1$, то*

а) если подгруппы A и B конечны, то группа G^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой;

б) если все ее центральные p'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы, то группа G^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда подгруппы A и B p'-изолированы в группе G.

Перечисленные результаты получены в первой главе работы. Во второй главе рассматриваются различные свойства групп Баумслага – Солитэра

$$H(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m \rangle$$

и групп Бруннера

$$G(l, m; k) = \langle a, t;\ t^{-1}a^{-k}ta^l t^{-1}a^k t = a^m \rangle,$$

причем и в том, и в другом случае без потери общности можно считать, что $|l| \geqslant m > 0$, а для групп Бруннера еще и $k > 0$.

В четвертом параграфе работы собраны предварительные результаты о строении этих групп, а в пятом параграфе рассматривается их аппроксимируемость в классах конечных групп и конечных p-групп. Здесь отмечено, прежде всего, что критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра, сформулированный в работе [23], уточненный затем в [38] и утверждающий, что группа $H(l, m)$ (где $|l| \geqslant m > 0$) $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $|l| = m$, можно получить как непосредственное следствие результатов главы I, а именно, теорем 1.1 и 2.1. Характеризацию $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп Баумслага – Солитэра дает доказываемая с помощью результатов предыдущей главы (в частности, предложения 3.5)

Теорема 5.2. *Группа $H(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m \rangle$ (где $|l| \geqslant m > 0$) $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $l \equiv 1 \pmod p$, или $|l| = m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $l = -m$, то $p = 2$.*

Критерии $\mathcal{F}$- и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп Бруннера формулируются следующим образом:

Теорема 5.3. *Группа $G(l,m;k)$ (где $k>0$ и $|l|\geqslant m>0$) является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $|l|=m$.*

Теорема 5.4. *Группа $G(l,m;\,k)$ (где $|l|\geqslant m>0$ и $k>0$) является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $|l|=m=p^r$ и $k=p^s$ для некоторых целых чисел $r\geqslant 0$ и $s\geqslant 0$, причем если $l=-m$, то $p=2$ и $s\leqslant r$.*

Заметим, что необходимость условия в теореме 5.3 была отмечена (без доказательства) в работе [25]. Доказательства теорем 5.3 и 5.4 также опираются на результаты главы I.

В шестом параграфе рассматриваются вопросы хопфовости и классификации групп Баумслага – Солитэра и Бруннера. Нехопфовы группы Баумслага – Солитэра описаны в работе [23]: группа $H(l,m)$ (где, напомним, $|l|\geqslant m>0$) не является хопфовой тогда и только тогда, когда $|l|>m>1$ и множество простых делителей числа l не совпадает с множеством простых делителей числа m. Достаточное условие нехопфовости групп Бруннера, доказанное в работе [25], оказалось и необходимым:

Теорема 6.2. *Группа $G(l,m;\,k)$ (где $|l|\geqslant m>0$ и $k>0$)) не является хопфовой тогда и только тогда, когда $|l|>m>1$, число m является делителем чисел l и k и числа m и l/m взаимно просты.*

Нетрудно видеть, что для любой нехопфовой группы $H(l,m)$ можно указать такую неизоморфную ей группу G, что группы $H(l,m)$ и G будут гомоморфными образами друг друга. Тем не менее, среди групп Баумслага – Солитэра такой группы найти нельзя:

Теорема 6.3. *Группы $H(l,m)$ и $H(p,q)$, где $|l|\geqslant m>0$ и $|p|\geqslant q>0$, изоморфны тогда и только тогда, когда $l=p$ и $m=q$. Если каждая из групп $H(l,m)$ и $H(p,q)$ является гомоморфным образом другой, то они изоморфны.*

С другой стороны, в сообщении [3] было анонсировано существование неизоморфных групп Бруннера, гомоморфно отображающихся друг на друга. Следующий результат работы, уточняя ряд утверждений из [3], дает перечисление всех таких пар групп Бруннера.

Теорема 6.4.

1. *Если группы $G_1=G(l_1,m_1;\,k_1)$ и $G_2=G(l_2,m_2;\,k_2)$ гомоморфно отображаются друг на друга и выполнено хотя бы одно из неравенств $|l_1|>m_1$ и $|l_2|>m_2$, то $l_1=l_2$ и $m_1=m_2$.*

2. *Если* $|l| > m$, *то группы* $G_1 = G(l,m;k_1)$ *и* $G_2 = G(l,m;k_2)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(2.1) $k_1 = k_2$;

(2.2) $m > 1$, *числа* k_1 *и* k_2 *делятся на наибольший общий делитель чисел* l *и* m *и* $k_1/k_2 = \pm(l/m)^p$ *для некоторого целого числа* $p \neq 0$;

(2.3) $m = 1$ *и частное* k_1/k_2 *является* l*-числом.*

3. *Группы* $G_1 = G(l,m;k_1)$ *и* $G_2 = G(l,m;k_2)$ *гомоморфно отображаются друг на друга и не изоморфны тогда и только тогда, когда* $|l| > m > 1$ *и число* m *является делителем каждого из чисел* l, k_1 *и* k_2, *причем число* $s = l/m$ *взаимно просто с* m *и частное* k_1/k_2 *является* s*-числом, не совпадающим ни с какой степенью (с целочисленным показателем) числа* $\pm s$.

(Здесь, как обычно, утверждение о том, что целое число m является n-числом, означает, что m делится лишь на простые числа, делящие целое число n; рациональное число будем называть n-числом, если n-числами являются числитель и знаменатель представляющей его несократимой дроби.)

Таким образом, среди групп вида $G(l,m;k)$ имеется бесконечно много пар, доставляющих контрпримеры к упоминавшемуся выше вопросу 3.33 из [6]; в некотором смысле минимальную такую пару составляют группы $G(18,2;2)$ и $G(18,2;6)$.

В седьмом параграфе работы рассматривается следующий вопрос В. Магнуса (см. [33]). Пусть $\sigma(G)$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Из хопфовости конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп легко следует, что для любого сюръективного эндоморфизма φ конечно порожденной группы G имеет место включение $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \sigma(G)$, а потому — и включение $K(\varphi) \subseteq \sigma(G)$, где

$$K(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker}\varphi^i.$$

Спрашивается, какие нехопфовы группы с конечным числом порождающих обладают хотя бы одним сюръективным эндоморфизмом φ таким, что $K(\varphi) = \sigma(G)$? В работе [33] такие эндоморфизмы были явно указаны для ряда известных конечно определенных нехопфовых групп и поставлен вопрос о существовании эндоморфизма с указанным свойством в произвольной конечно определенной нехопфовой группе. Нетрудно показать, тем не менее, что ответ на этот вопрос отрицателен. А именно, имеет место

Теорема 7.1. *Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H, $G = (A * B;\ H)$. Предположим, что*

(1) *существует сюръективный эндоморфизм τ группы A с нетривиальным ядром, действующий тождественно на подгруппе H;*
(2) *группа A совпадает с нормальным замыканием в этой группе подгруппы H;*
(3) *подгруппа $\sigma(B)$ содержит подгруппу H и совпадает с нормальным замыканием в группе B некоторого конечного множества ее элементов.*

Тогда группа G нехопфова, и для любого сюръективного эндоморфизма φ группы G подгруппы $K(\varphi)$ и $\sigma(G)$ различны.

По-видимому, простейшим конкретным примером, удовлетворяющим условиям теоремы 7.1 является, группа

$$G = \langle a, b, c;\ b^{-1}a^2b = a^3,\ b = \big[b, c^{-1}bc\big]\rangle.$$

С другой стороны, один из результатов работы [33] утверждает, что группа Баумслага – Солитэра $H(l, m)$ в случае, когда числа l и m взаимно просты, таким сюръективным эндоморфизмом φ, что $K(\varphi) = \sigma(H(l, m))$, обладает. Основной целью параграфа 7 является доказательство следующей теоремы, дающей исчерпывающую характеризацию тех групп $H(l, m)$, которые обладают сюръективным эндоморфизмом с указанным свойством.

Теорема 7.2. *Пусть $H(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^lb = a^m\rangle$ — произвольная группа Баумслага – Солитэра и пусть числа l и m, определяющие эту группу, записаны в виде $l = l_1p$ и $m = m_1q$, где $(p, m) = (q, l) = 1$ и положительные числа l_1 и m_1 имеют одни и те же простые делители. Группа $H(l, m)$ обладает сюръективным эндоморфизмом φ таким, что $K(\varphi) = \sigma(H(l, m))$, тогда и только тогда, когда $m_1 = n_1$.*

Заметим, что если числа l и m взаимно просты, то $l_1 = m_1 = 1$, так что приведенный выше результат из [33] является непосредственным следствием этой теоремы.

В формулировке теоремы 7.2 отсутствует предположение о нехопфовости группы $H(l, m)$. Дело в том, что конечно порожденная группа G, обладающая сюръективным эндоморфизмом φ таким, что $K(\varphi) = \sigma(G)$, не обязательно является нехопфовой: если группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой (т. е. $\sigma(G) = 1$), то любой ее автоморфизм φ удовлетворяет указанному равенству. Более того, очевидно, что если группа G хопфова и $K(\varphi) = \sigma(G)$ для некоторого ее сюръективного эндоморфизма φ, то эта группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема. Таким образом, класс конечно порожденных групп, обладающих сюръективным эндоморфизмом с указанным свойством, состоит из групп, являющихся либо $\mathcal{F}$-аппроксимируемыми, либо нехопфовыми, причем все конечно порожденные $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы этому классу принадлежат. Поэтому для хопфовых групп $H(l, m)$ утверждение теоремы 7.2 является непосредственным следствием критериев $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и хопфовости групп Баумслага – Солитэра, и доказательство теоремы 7.2 достаточно провести при дополнительном предположении о нехопфовости группы $H(l, m)$. Тем не менее, в этом доказательстве будет использоваться лишь более слабое предположение $|l| > m > 0$. Пусть α обозначает (сюръективный) эндоморфизм группы $H(l, m)$, переводящий элемент a в элемент a^{pq} и оставляющий элемент b на месте. Теорема 7.2 является очевидным следствием следующих двух утверждений, которые и доказываются в работе:

Теорема 7.2a. *Фактор-группа $H(l, m)/K(\alpha)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $l_1 = m_1$.*

Теорема 7.2b. *Ядро каждого сюръективного эндоморфизма группы $H(l, m)$ содержится в подгруппе $K(\alpha)$.*

В третьей главе работы рассматриваются свойства $\mathcal{F}$-отделимости подгрупп и некоторые другие аппроксимационные свойства групп. Как уже отмечалось выше, произвольная группа вида $H(l, 1)$, где $|l| > 1$, не является π_c-группой. Все эти группы являются нисходящим HNN-расширением бесконечной циклической группы, и следующий результат, доставляющий необходимое и достаточное условие принадлежности нисходящего HNN-расширения классу π_c-групп, объясняет, в частности, такое поведение групп $H(l, 1)$ относительно свойства быть π_c-группой.

Теорема 8.1. *Пусть G — некоторая группа, B — подгруппа группы G, изоморфная этой группе, и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ — нисходящее HNN-расширение группы G.*

Группа G^* является π_c-группой тогда и только тогда, когда для каждой циклической подгруппы A группы G семейство $\mathcal{F}_G(G, B, \varphi)$ всех (G, B, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G является A-фильтрацией.

Следующий результат относится к группам с одним определяющим соотношением, центр которой нетривиален.

Теорема 8.2. *Пусть G — группа с одним определяющим соотношением, обладающая нетривиальным центром. Тогда произвольная конечно порожденная подгруппа группы G является $\mathcal{F}$-отделимой.*

Заметим, что опустить в формулировке этой теоремы требование конечной порожденности подгрупп нельзя: каждая группа с одним соотношением и нетривиальным центром содержит неотделимую подгруппу, если, разумеется, она вообще содержит хотя бы одну подгруппу, не являющуюся конечно порожденной (т. е не является циклической и не изоморфна группе $H(\pm 1, 1)$).

Решающую роль в доказательстве теоремы 8.2 играет следующее замечание, имеющее, возможно, и самостоятельный интерес.

Предложение 8.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс групп и пусть G — группа, обладающая бесконечным центром, отличным от квазициклической группы. Предположим далее, что для любой неединичной центральной подгруппы A группы G все $\mathcal{K}$-подгруппы фактор-группы G/A $\mathcal{F}$-отделимы. Тогда $\mathcal{F}$-отделимыми будут и все $\mathcal{K}$-подгруппы группы G.*

Отметим еще, что теорема 8.2 была опубликована в 1987 году в работе [45], а в опубликованной в том же году статье [26] для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром другими методами была установлена $\mathcal{F}$-отделимость конечно порожденных *нормальных* подгрупп.

Следующие два результата относятся к свободным группам.

Теорема 8.3. *Произвольная конечно порожденная подгруппа H свободной группы F является сопряженно $\mathcal{F}$-отделимой.*

Напомним здесь еще раз, что подгруппа H некоторой группы G называется сопряженно $\mathcal{F}$-отделимой, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из H, найдется такой гомоморфизм

φ группы G на некоторую конечную группу, что элемент $a\varphi$ не сопряжен в группе $G\varphi$ ни с одним элементом из подгруппы $H\varphi$.

Теорема 9.1. *Произвольная свободная группа $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп.*

В силу общего замечания А. И. Мальцева [11] следствием этой теоремы является алгоритмическая распознаваемость сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы; ранее этот результат был получен другими методами в работе [12].

Приведем также следующее утверждение, используемое при доказательстве теоремы 8.3:

Предложение 8.4. *Пусть $G = A * B$ — (обычное) свободное произведение групп A и B. Каждый из свободных множителей A и B является сопряженно $\mathcal{F}$-отделимой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда группы A и B $\mathcal{F}$-аппроксимируемы.*

Интересной оказалась ситуация с $\mathcal{F}$-аппроксимируемостью относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп для групп Баумслага – Солитэра вида $H(l,1)$. Если $l = \pm 1$, группа $H(l,1)$ является полициклической, и потому $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп в силу вышеупомянутого результата работы [30] (при $l = 1$ это просто очевидно). В оставшемся случае соответствующий критерий формулируется следующим образом:

Теорема 9.2. *Если $|l| > 1$, группа $H(l,1) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a\rangle$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности конечно порожденных подгрупп тогда и только тогда, когда $l = \pm p$ для некоторого простого числа p.*

В последнем параграфе работы получено несколько результатов об $\mathcal{F}$-аппроксимируемых группах с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов.

Следующее утверждение можно рассматривать как некоторое усиление теоремы А. И. Мальцева о хопфовости конечно порожденных $\mathcal{F}$-аппроксимируемых групп (напомним, что $\mathcal{F}(G)$ обозначает семейство всех конечных гомоморфных образов группы G).

Теорема 10.1. *Пусть G — конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа и N — нормальная подгруппа группы G. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G/N)$, то $N = 1$.*

Эта теорема используется при получении следующего результата, представляющего некоторый интерес в связи с вышеупомянутым вопросом В. Н. Ремесленникова:

Теорема 10.2. *Пусть конечно порожденная группа G является конечным расширением свободной группы. Если $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H)$ для некоторой свободной группы H, то группы G и H изоморфны.*

Для групп Баумслага – Солитэра вида $H(l, 1)$ доказана

Теорема 10.3. *Для любых ненулевых целых чисел k и l равенство $\mathcal{F}(H(k, 1)) = \mathcal{F}(H(l, 1))$ имеет место тогда и только тогда, когда $k = l$.*

Отметим вытекающее отсюда

Следствие. *Если G — $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа с одним определяющим соотношением и если для некоторого целого числа l выполнено равенство $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(H(l, 1))$, то $G \simeq H(l, 1)$.*

Если рассматривать лишь те конечные гомоморфные образы, которые являются p-группами (при фиксированном простом p), утверждение теоремы 10.3 перестает быть справедливым. Пусть $\mathcal{F}_p(G)$ обозначает семейство всех конечных p-групп, являющихся гомоморфными образами группы G. Имеет место

Теорема 10.4. *Пусть p — простое число. Тогда*

1. *Если $\mathcal{F}_p(H(k, 1)) = \mathcal{F}_p(H(l, 1))$ и одно из чисел $k-1$ и $l-1$ делится на p, то и другое делится на p.*

(2) *Если числа $k - 1$ и $l - 1$ не делятся на p, то $\mathcal{F}_p(H(k, 1)) = \mathcal{F}_p(H(l, 1))$.*

(3) *Если числа $k-1$ и $l-1$ делятся на p, то следующие утверждения равносильны:*

(3.1) *$\mathcal{F}_p(H(k, 1)) = \mathcal{F}_p(H(l, 1))$;*

(3.2) *для любого целого числа $s > 0$ элементы $k + p^s\mathbb{Z}$ и $l + p^s\mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}^*_{p^s}$ (мультипликативной группы кольца $\mathbb{Z}_{p^s} = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ вычетов целых чисел по модулю p^s) порождают в этой группе одну и ту же циклическую подгруппу;*

(3.3) *числа $k - 1$ и $l - 1$ делятся на одни и те же степени числа p, причем в случае, когда $p = 2$ и числа $k - 1$ и $l - 1$ не делятся на 4, числа $k^2 - 1$ и $l^2 - 1$ делятся на одни и те же степени числа 2.*

Поскольку всякая конечная p-группа нильпотентна, то в силу пункта (3.3) этой теоремы из того, что группы $H(k,1)$ и $H(l,1)$ имеют одни и те же нильпотентные гомоморфные образы, следует, что $|k-1| = |l-1|$. В действительности, имеет место

Следствие. *Если множество нильпотентных гомоморфных образов группы $H(k,1)$ совпадает с множеством нильпотентных гомоморфных образов группы $H(l,1)$, то $k = l$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азаров Д.Н., Тъеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5. Иваново. 2002. С. 6–10.
2. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы вхождения в группах с одним определяющим соотношением с нетривиальным центром // Деп. в ВИНИТИ, № 3207-84. 1984.
3. *Борщев А. В.* О проблеме изоморфизма для одного класса групп с одним определяющим соотношением // Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти Д. К. Фаддеева. Тезисы докладов. Санкт–Петербург. 1997. С. 170–171.
4. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об апппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125–130.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 15-е. Новосибирск. 2002. 172 с.
7. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 447 с.
8. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. ж. 1999. Т. 40, N 2. С. 395–407.
9. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 405–422.

10. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. № 3. С. 347–366.

11. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

12. *Молдаванский Д. И.* Сопряженность подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, вып. 6. С. 691–694.

13. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085–1099.

14. *Ремесленников В. Н.* Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и Логика. Семинар. 1967. Т. 6. Вып. 2. С. 61–75.

15. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324–1329.

16. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп М.: Мир, 1985. 253 с.

17. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.

18. *Andreadakis S., Raptis E. and Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50. P. 495–501.

19. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179–194.

20. *Baumslag G.* A noncyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic // J. Austral. Math. Soc. 1969. Vol. 10. № 3–4. P. 497–498.

21. *Baumslag G.* Residually finite groups with the same finite images // Compos. Math. 1974. Vol. 29. № 3 P. 249–252.

22. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193–209.

23. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.

24. *Borisov A., Sapir M.* Polinomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of groups endomorphisms // arXiv: math. GR/0309121v1. 6 Sep. 2003.

25. *Brunner A. M.* On a class of one-relator groups// Can. J. Math. 1980. Vol. 50. P. 414–420.

26. *Burns R., Karrass A., Solitar D.* A note on groups with separable finitely generated subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 1987. Vol. 36. P. 153–160.

27. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma// J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232–234.

28. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29. № 1. P. 35–51.

29. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. Vol. 7. P. 29–62.

30. *Grunewald F., Segal D.* Conjugacy in polycyclic groups // Commun. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 775–798.

31. *Higman G.* A finitely generated group with an isomorphic proper factor group // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 59–61.

32. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301–305.

33. *Hirshon R.* The intersection of the subgroups of finite index in some finitely presented groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 53, № 1. P. 32–36.

34. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residual finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. Vol. 182. P. 65–78.

35. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. Vol. 30. P. 285–293.

36 *Kim G., McCarron J.* On residually p-finite one-relator groups // J. Algebra. 1994. Vol. 169. P. 817–826.

37. *McCarron J.* Residually nilpotent one-relator groups with non-trivial centre // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124. № 1. P. 1–5.

38. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.

39. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503–554.

40. *Neumann B. H.* A two-generator group isomorphic to a proper factor group // J. London Math. Soc. 1950. Vol. 25. P. 247–248.

41. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f.g. abelian group// J. of Pure Appl. Algebra 1991. Vol. 76. P. 167–178.

42. *Segal D.* Decidable properties of polycycle groups // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61. P. 497–528.

43. *Wong P. C. and Tang C. K.* Cyclic subgroup separability of certain HNN-extensions of finitely generated abelian groups // Rocky Mt. J. Math. 1999. Vol. 29. P. 347–356.

Работы автора по теме диссертации*

44. *Молдаванский Д. И.* Пересечение подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением (реферат статьи, депонированной в ВИНИТИ 18.05.1986 за № 6671-В86, 27 с., Библиогр. 16) // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 219.

45. *Молдаванский Д. И., Тимофеева Л. В.* Конечно порожденные подгруппы группы, определяемой одним соотношением и обладающей нетривиальным центром, финитно отделимы // Известия ВУЗов. Математика. 1987. Вып. 12. С. 58–59.

46. *Кавуцкий М. А., Молдаванский Д. И.* Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы. Межвузовский сборник научных трудов. Иваново. 1988. С. 35–48.

47. *Молдаванский Д. И.* Изоморфизм групп Баумслага – Солитэра // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 12. С. 1684–1686.

48. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 6. С. 842–845.

49. *Молдаванский Д. И.* О финитной отделимости подгрупп // Иван. гос. ун-т. 20 лет. Юбил. сб. науч. статей. Часть 2. Иваново, 1993. С. 18–23

50. *Молдаванский Д. И.*Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы // Третья Международная

*работы [44], [45], [47], [48], [61] опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, перечень которых рекомендован ВАКом

конференция по алгебре памяти М.И.Каргаполова (23 - 28 августа 1993 г.). Сборник тезисов. Красноярск, 1993. С. 234–235.

51. *Moldavanski D., Sibyakova N.* On the finite images of some one-relator groups. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 123. P. 2017–2020

52. *Молдаванский Д. И., Якушев А. В.* О конечных гомоморфных образах некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та Сер. Математика. 1997. Вып. 1. С. 72–78.

53. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп. Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, Россия, 24-30 июня 1997 г.) Тезисы докладов. С-Петербург. 1997. С. 245–246.

54. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129–140.

55. *Молдаванский Д. И.* Об отделимости циклических подгрупп нисходящего HNN-расширения групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2000. Вып. 3. Иваново. С. 56–58.

56. *Молдаванский Д. И.* Два замечания о финитно аппроксимируемых группах с одинаковыми семействами конечных гомоморфных образов // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2001. Вып. 4. Иваново. С. 83–86.

57. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123–133.

58. *Алексеев Ю. Н. Молдаванский Д. И.* О сопряженности конечно порожденных подгрупп свободной группы // Чебышевский сб. 2002. Т. 3. Вып. 1. Тула. С. 8–10.

59. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2003. Вып. 3. С. 102–116.

60. *Borschev A. V., Moldavanskii D. I.* On the isomorphism of some one-relator groups // arXiv: math.GR/0502153. Feb. 08, 2005)

61. *Борщев А. В., Молдаванский Д. И.* Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 2006. Т. 79. Вып. 1. С. 34–44.