

УДК 512.543

А. В. Агафонова, Д. И. Молдавский

**О финитной аппроксимируемости обобщенных
прямых произведений групп**

Указаны условия финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения двух групп, аналогичные известным условиям Г. Баумслэга для обобщенных свободных произведений.

Напомним, что конструкция обобщенного прямого произведения двух групп в работе [3] определяется следующим образом.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A , K – подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм группы H на группу K . Обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ , называется группа G с подгруппами A и B такая, что $G = AB$, подгруппы A и B поэлементно перестановочны и их пересечение совпадает как с подгруппой H , так и с подгруппой K , причем элементы подгруппы H и K отождествляются в соответствии с изоморфизмом φ .

Очевидным необходимым условием существования такой группы G является центральность подгрупп H и K в группах A и B соответственно. Нетрудно видеть, что это условие оказывается и достаточным. Действительно, в этом случае в прямом произведении $D = A \times B$ групп A и B подмножество N , состоящее из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$, является (центральной) подгруппой. Легко проверяемая справедливость в группе D равенств $A \cap N = B \cap N = 1$ и $AN \cap BN = HN = KN$ говорит о том, что подгруппы AN/N и BN/N фактор-группы D/N изоморфны группам A и B соответственно, а их пересечение совпадает с подгруппой HN/N , так что фактор-группа D/N является обобщенным прямым произведением групп A и B с объ-

единенными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами H и K . Для полноты картины отметим также, что из этого построения следует и единственность обобщенного прямого произведения: произвольная группа G с подгруппами A и B такими, что $G = AB$, $[A, B] = 1$ и $A \cap B = H = K$, оказывается изоморфной фактор-группе D/N .

В данной работе рассматриваются условия финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения групп, и мы отметим, прежде всего, существование простых примеров обобщенного прямого произведения двух финитно аппроксимируемых групп, не являющегося финитно аппроксимируемой группой.

Так, пусть A – свободная абелева группа с множеством свободных порождающих a_1, a_2, \dots , H – подгруппа группы A , порожденная элементами $a_1 a_2^2, a_1 a_3^3, \dots$. Через B обозначим свободную абелеву группу с множеством свободных порождающих b_1, b_2, \dots , а через K – ее подгруппу, порожденную элементами b_2^2, b_3^3, \dots . Поскольку указанные порождающие подгрупп H и K являются, очевидно, свободными, существует изоморфизм $\varphi: H \rightarrow K$, определяемый отображением $a_i a_i^i \mapsto b_i^i$ ($i = 2, 3, \dots$). Пусть G – обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Так как в этой группе для любого целого числа $n \geq 2$ выполнено равенство $a_1 = (b_n a_n^{-1})^n$ и элемент a_1 отличен от 1, группа G не является финитно аппроксимируемой.

Основной целью данной работы является доказательство того, что известные условия Г. Баумслэга [2] финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений дословно переносятся на обобщенные прямые произведения. Напомним необходимые для формулировки этих условий определения.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A , K – подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ –

фиксированный изоморфизм. Подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ называются (H, K, φ) -совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Следуя Баумслагу будем говорить также, что некоторое семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$, а если для некоторой подгруппы H группы G выполнено равенство $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$, то эта фильтрация называется H -фильтрацией.

В работе [2] доказано, что если $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – обобщенное свободное произведение и $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B , то для финитной аппроксимируемости группы G необходимо, чтобы каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ являлось фильтрацией, а достаточное условие финитной аппроксимируемости этой группы состоит в том, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией. Аналогичное утверждение оказывается справедливым и для обобщенных прямых произведений.

Теорема. Пусть A и B – группы, H – центральная подгруппа группы A , K – центральная подгруппа группы B , $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм группы H на группу K и G – обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ . Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B . Тогда:

- 1) если группа G финитно аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией;
- 2) если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией, то группа G финитно аппроксимируема.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся указанным выше представлением группы G в виде фактор-группы прямого произведения $D = A \times B$ по подгруппе N , состоящей из элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$ ($h \in H$).

Предположим сначала, что группа G финитно аппроксимируема, и покажем, что тогда каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ должно быть фильтрацией. В самом деле, пусть, скажем, a – неединичный элемент группы A . Тогда элемент aN группы G отличен от 1 и потому не входит в ее подгруппу U/N для некоторой нормальной подгруппы U конечного индекса группы D , содержащей подгруппу N (и не содержащей элемента a). Полагаем $R = A \cap U$ и $S = B \cap U$. Поскольку подгруппа N содержится в подгруппе U , для любого элемента $h \in H$ элементы h и $h\varphi$ входят или не входят в подгруппу U одновременно. Так как $H \cap R = H \cap U$ и $K \cap S = K \cap U$, отсюда следует, что $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Таким образом, R и S являются (H, K, φ) -совместимыми нормальными подгруппами конечного индекса групп A и B , и потому $R = R_\lambda$ для подходящего $\lambda \in \Lambda$. Так как $a \notin R$, этим доказано, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией.

Предположим теперь, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией. Для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно показать, что в группе D подгруппа N является финитно отделимой, т. е. что произвольный элемент $g \in D$, не принадлежащий подгруппе N , не входит в некоторую подгруппу конечного индекса группы D , содержащую подгруппу N .

Запишем элемент g в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$, и предположим сначала, что элемент a не входит в подгруппу H . Тогда поскольку семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией,

для подходящего $\lambda \in \Lambda$ мы будем иметь $a \notin HR_\lambda$. Покажем, что подгруппа $L = HR_\lambda B$ является искомой.

В самом деле, конечность индекса подгруппы L в группе D следует из конечности индекса в этой группе подгруппы $R_\lambda B$. Включение $N \subseteq L$ очевидно, и остается показать, что элемент g не входит в L . Если, напротив, $g \in L$, то $g = hrb_1$, для некоторых $h \in H$, $r \in R_\lambda$ и $b_1 \in B$. Сравнивая это выражение элемента g с его исходной записью $g = ab$, имеем $a = hr$, что противоречит выбору подгруппы R_λ .

Случай, когда $b \notin K$, рассматривается аналогично, и мы будем считать теперь, что $a \in H$ и $b \in K$. Тогда $b = h\varphi$ для некоторого элемента $h \in H$, причем, поскольку элемент g не входит в подгруппу N , $a \neq h^{-1}$.

Так как семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, то найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что $ah \notin R_\lambda$. Покажем, что тогда подгруппа $L = NR_\lambda S_\lambda$ является искомой.

Конечность индекса этой подгруппы в группе D и включение $N \subseteq L$ снова очевидны. Если предположить, что элемент g входит в подгруппу L , то $g = h_1(h_1\varphi)^{-1}rs$, для некоторых элементов $h_1 \in H$, $r \in R_\lambda$ и $s \in S_\lambda$. Тогда $a = h_1r$ и $b = (h_1\varphi)^{-1}s$. Из последнего равенства следует, что элемент s принадлежит подгруппе K , и потому $s \in K \cap S_\lambda$. Следовательно, $s = r_1\varphi$ для подходящего $r_1 \in H \cap R_\lambda$. Отсюда $h\varphi = (h_1^{-1}r)_1\varphi$, и так как отображение φ инъективно, имеем $h = h_1^{-1}r_1$. Но тогда $ah = rr_1 \in R_\lambda$, что противоречит выбору подгруппы R_λ . Теорема доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что достаточное условие финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения, содержащееся в пункте 2) доказанной теоремы, не является необходимым.

Пусть A – группа, заданная порождающими элементами a_1, a_2, \dots и определяющими соотношениями $a_i = a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots$), и H – ее подгруппа, порожденная элементом a_1 . Хорошо известно, что группа A (изоморфная аддитивной группе двоичных дробей) финитно аппроксимируема. Легко видеть также, что подгруппа H в этой группе не является финитно отделимой (поскольку фактор-группа A/H изоморфна квазициклической группе типа 2^∞ и потому не финитно аппроксимируема).

Пусть еще B – свободная абелева группа ранга 2 со свободными порождающими x, y и K – ее подгруппа, порожденная элементом x . Поскольку в группе B все подгруппы финитно отделимы, в силу предложения 2 из работы [1] обобщенное прямое произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с очевидным изоморфизмом, является финитно аппроксимируемой группой. Вместе с тем, так как в группе A подгруппа H не финитно отделима, никакое семейство нормальных подгрупп конечного индекса группы A не может быть H -фильтрацией, так что требования условия 2) теоремы здесь не выполнены.

Библиографический список

1. Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 114–122.
2. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193-209.
3. Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503-554.