

УДК 512.543

А. Е. Копрова, Д. И. Молдаванский

Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп

Для произвольного множества π простых чисел рассматриваются условия аппроксимируемости конечными π -группами обобщенных свободных произведений двух групп. При дополнительном предположении центральности объединяемых подгрупп доказано, что обобщенное свободное произведение двух конечных π -групп является группой, аппроксимируемой конечными π -группами, и на основе этого результата получены условия аппроксимируемости конечными π -группами свободных произведений произвольных групп с объединяемыми центральными подгруппами, аналогичные условиям Г. Баумслэга для свойства финитной аппроксимируемости.

§ 1. Основные результаты

Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из некоторого класса \mathbf{K} (или \mathbf{K} -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathbf{K} , образ элемента g относительно которого отличен от единицы. Подгруппа H группы G называется \mathbf{K} -отделимой, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего H , существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathbf{K} , образ элемента g относительно которого не принадлежит образу подгруппы H . Отметим, что если класс \mathbf{K} гомоморфно замкнут, то нормальная подгруппа H группы G \mathbf{K} -отделима тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H является \mathbf{K} -аппроксимируемой.

Если \mathbf{K} совпадает с классом \mathbf{F} всех конечных групп, то свойства \mathbf{K} -аппроксимируемости и \mathbf{K} -отделимости совпадают с классическими свойствами финитной аппроксимируемости и финитной отделимости соответственно. Более тонкими являются свойства F_π -аппроксимируемости и F_π -отделимости, где для

данного множества π простых чисел символ F_π обозначает класс всех конечных π -групп (если π состоит из единственного простого числа p , будем писать F_p вместо F_π). Общая проблема описания для данной финитно аппроксимируемой группы таких множеств π , что эта группа является F_π -аппроксимируемой, применительно к конструкции обобщенного свободного произведения может быть уточнена следующим образом:

Пусть группа G является обобщенным свободным произведением двух F_π -аппроксимируемых групп. Верно ли, что если группа G F -аппроксимируема, то она является F_π -аппроксимируемой?

Известно, что для обычного свободного произведения ответ на этот вопрос положителен. Это следует из работы [2], но может быть без особого труда доказано и непосредственно. Действительно, если $G = A * B$ – свободное произведение F_π -аппроксимируемых групп A и B , то проблема F_π -аппроксимируемости группы G стандартными рассуждениями сводится к случаю, когда группы A и B конечны. Но тогда группа G является расширением свободной группы при помощи конечной π -группы $A \times B$ и потому F_π -аппроксимируема.

В общем же случае ответ на сформулированный выше вопрос отрицателен: легко построить пример обобщенного свободного произведения двух конечных p -групп, не являющегося F_p -аппроксимируемой группой. В связи с этим естественно спросить, насколько следует расширить множество π , чтобы аппроксимируемость соответствующим классом групп обобщенного свободного произведения двух F_π -аппроксимируемых групп имела место. Так, нетрудно доказать, что свободное произведение $G = (A * B; H = K, \varphi)$ двух конечных групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изомор-

физма $\varphi: H \rightarrow K$, является группой, F_π -аппроксимируемой для некоторого конечного множества π . Более точно, имеет место

Теорема 1. *Если группы A и B конечны и множество π состоит из всех простых чисел, не превосходящих произведения t порядков групп A и B , то группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$ является F_π -аппроксимируемой.*

Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством Г. Баумслага F -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. А именно, Б. Нейманом [4] построен действующий инъективно на подгруппах A и B гомоморфизм группы G в группу подстановок декартова произведения множеств A и B . Поскольку ядро этого гомоморфизма в силу известной теоремы Х. Нейман является свободной группой, этим доказано, что группа G есть расширение свободной группы при помощи конечной π -группы и потому F_π -аппроксимируема.

Критерий F_p -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения $G = (A * B; H = K, \varphi)$ двух конечных p -групп A и B был получен Г. Хигманом в работе [3]. Из этого критерия следует, в частности, что если объединяемые подгруппы H и K расположены в центрах соответствующих свободных множителей A и B , то группа G является F_p -аппроксимируемой. Здесь будет получено следующее обобщение этого результата:

Теорема 2. *Пусть A и B – конечные π -группы, H и K – центральные подгруппы групп A и B соответственно. Тогда группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$ F_π -аппроксимируема.*

Г. Баумслаг [1] на основе своего вышеупомянутого результата об F -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп сформулировал условия F -аппроксимируемости для обобщенного свободного произведе-

ния произвольных групп. Напомним необходимые для формулировки этих условий определения.

Пусть A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A , K – подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ фиксированный изоморфизм. Подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ называются (H, K, φ) -совместимыми, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Это понятие позволяет указать ряд универсальных, в определенном смысле, гомоморфизмов обобщенного свободного произведения $G = (A * B, H = K, \varphi)$. А именно, если R и S нормальные (H, K, φ) -совместимые подгруппы групп A и B , то отображение $\varphi_{R,S}: HR/R \rightarrow KS/S$ подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S , переводящее элемент hR в элемент $(h\varphi)S$ (где $h \in H$), является изоморфизмом. Поэтому можно построить обобщенное свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S, HR/R = KS/S, \varphi_{R,S})$$

и гомоморфизм $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$, действие которого на свободных множителях группы G совпадает с естественными отображениями группы A на фактор-группу A/R и группы B на фактор-группу B/S . Легко видеть, что для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппы $A \cap N$ и $B \cap N$ являются (H, K, φ) -совместимыми, так что произвольный гомоморфизм группы G проходит через некоторый гомоморфизм вида $\rho_{R,S}$.

Следуя Баумслагу будем говорить также, что семейство $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ нормальных подгрупп некоторой группы G называется фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$, а если для подгруппы H группы G выполнено равенство $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$, то эта фильтрация называется H -фильтрацией.

Упомянутые выше условия Баумслага могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть $G = (A * B, H = K, \varphi)$ – обобщенное свободное произведение групп A и B и пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар (H, K, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного индекса групп A и B . Если группа G F -аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией. Обратно, если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией, то группа G F -аппроксимируема.

Теорема 2 позволяет получить условия F_π -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух произвольных групп с объединенными центральными подгруппами, аналогичные этим условиям Баумслага.

Теорема 3. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединёнными подгруппами H и K , причем H и K – центральные подгруппы групп A и B соответственно. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех пар подгрупп A и B соответственно таких, что для любого $\lambda \in \Lambda$ R_λ является нормальной подгруппой конечного π -индекса группы A , S_λ является нормальной подгруппой конечного π -индекса группы B и подгруппы R_λ и S_λ (H, K, φ) -совместимы. Тогда

- 1) если группа G F_π -аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией;
- 2) если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией, то группа G F_π -аппроксимируема.

Легко видеть, что первое утверждение теоремы 3 справедливо и без предположения центральности объединяемых подгрупп. В самом деле, если, скажем, a – неединичный элемент

группы A , то из F_π -аппроксимируемости группы G следует существование нормальной подгруппы N конечного π -индекса группы G , не содержащей элемента a . Тогда этот элемент не принадлежит подгруппе $A \cap N$, входящей в семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, и, таким образом, пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой.

Второе утверждение теоремы 3, в свою очередь, позволяет получить следующий результат:

Теорема 4. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединёнными подгруппами H и K , причем H и K – центральные подгруппы групп A и B соответственно и группы A и B F_π -аппроксимируемы. Предположим также, что в группе A каждая подгруппа, лежащая в H и имеющая в H конечный π -индекс, F_π -отделима и в группе B каждая подгруппа, лежащая в K и имеющая в K конечный π -индекс, F_π -отделима. Тогда группа G F_π -аппроксимируема.

Приведем одно конкретное применение теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – обобщенное свободное произведение F_π -аппроксимируемых конечно порожденных абелевых групп A и B , причем $H \neq A$, $K \neq B$. Группа G является F_π -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда подгруппа H π' -изолирована в группе A и подгруппа K π' -изолирована в группе B .

Напомним, что подгруппа X некоторой группы Y называется π' -изолированной, если для любого простого числа q , не принадлежащего множеству π , и произвольного элемента $y \in Y$ из того, что $y^q \in X$, следует, что $y \in X$. Очевидно, что если группа Y абелева, то ее подгруппа X π' -изолирована в точности тогда, когда периодическая часть фактор-группы Y/X является π -группой. Так как, к тому же, конечно порожденная

абелева группа F_π -аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является π -группой, то отсюда следует, что произвольная подгруппа конечно порожденной абелевой группы будет π' -изолированной тогда и только тогда, когда она является F_π -отделимой. Поскольку подгруппа конечного π -индекса π' -изолированной подгруппы тоже является, очевидно, π' -изолированной, часть «тогда» в формулировке теоремы 5 вытекает непосредственно из теоремы 4.

Для доказательства необходимости, предположим, рассуждая от противного, что для некоторого элемента $a \in A \setminus H$ и простого числа q , не принадлежащего множеству π , имеет место включение $a^q \in H$. Обозначим через g коммутатор $[a, b]$ элементов a и b , где $b \in B \setminus K$. Элемент g отличен от единицы в группе G , т. к. его запись $g = a^{-1}b^{-1}ab$ несократима. С другой стороны, при любом гомоморфизме σ группы G на конечную π -группу образ $a\sigma$ элемента a , как нетрудно видеть, входит в образ $H\sigma$ подгруппы H , и потому $g\sigma = 1$. Это противоречит предположению об F_π -аппроксимируемости группы G , и утверждение о π' -изолированности подгруппы H в группе G тем самым доказано. Справедливость соответствующего утверждения для подгруппы K устанавливается аналогично, и теорема 5 доказана.

Напомним, далее, что подгруппа X некоторой группы Y называется изолированной, если для любого целого числа n , отличного от нуля, и произвольного элемента $y \in Y$ из того, что $y^n \in X$, следует, что $y \in X$. Изолятором подгруппы X в группе Y называется пересечение всех изолированных подгрупп группы Y , содержащих X . Если группа Y является конечно порожденной абелевой, то индекс произвольной подгруппы X в ее изоляторе конечен, и легко видеть, что если π – мно-

жество всех простых делителей этого индекса, то подгруппа $X_{\pi'}$ -изолирована в группе Y . Поэтому из теоремы 5 получаем

Следствие. Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – обобщенное свободное произведение F_{π} -аппроксимируемых конечно порожденных абелевых групп A и B . Тогда группа G является F_{π_1} -аппроксимируемой, где множество π_1 , получается присоединением к множеству π некоторого конечного набора простых чисел.

В самом деле, если через π_1 обозначить результат присоединения к множеству π всех простых делителей индекса подгруппы H в ее изоляторе в группе A и индекса подгруппы K в ее изоляторе в группе B , то подгруппы H и K окажутся, как легко видеть, π_1 -изолированными в группах A и B соответственно.

§ 2. Доказательство теорем 2, 3 и 4

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся конструкцией обобщенного прямого произведения групп.

Пусть A и B – некоторые группы, H – центральная подгруппа группы A , K – центральная подгруппа группы B и $\varphi: H \rightarrow K$ – изоморфизм группы H на группу K . Обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ , называется фактор-группа \overline{C} прямого произведения $C = A \times B$ групп A и B по подгруппе N , состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Непосредственно проверяется, что в группе C выполнены равенства $A \cap N = B \cap N = 1$, и потому отображения $\alpha: a \mapsto aN$ ($a \in A$) и $\beta: b \mapsto bN$ ($b \in B$) являются вложениями групп A и B в группу \overline{C} . Так как, к тому же, для любого $h \in H$ имеем $h\alpha = hN = (h\varphi)N = h(\varphi\beta)$, то существует гомо-

морфизм ρ группы $G = (A * B; H = K, \varphi)$ в группу \bar{C} , продолжающий отображения α и β . Поскольку ядро гомоморфизма ρ тривиально пересекается с каждой подгруппой, сопряженной с любым из свободных множителей группы G , в силу теоремы Х. Нейман оно является свободной группой.

Если теперь считать, что группы A и B являются конечными π -группами, то поскольку тогда и группа \bar{C} будет конечной π -группой, группа G оказывается расширением свободной группы при помощи конечной π -группы и потому является F_π -аппроксимируемой. Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам остается доказать лишь второе утверждение из ее формулировки.

Итак, пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с объединёнными подгруппами H и K , принадлежащими центрам групп A и B соответственно. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех таких пар (H, K, φ) -совместимых подгрупп групп A и B , что для любого $\lambda \in \Lambda$ R_λ – нормальная подгруппа конечного π -индекса группы A и S_λ – нормальная подгруппа конечного π -индекса группы B и пусть семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией.

В соответствии со сказанным в параграфе 1 (и упрощая обозначения) для любого $\lambda \in \Lambda$ введем в рассмотрение группу

$$G_\lambda = (A/R_\lambda * B/S_\lambda; HR_\lambda/R_\lambda = KS_\lambda/S_\lambda, \varphi_\lambda)$$

и гомоморфизм ρ_λ группы G на группу G_λ , продолжающий естественные отображения группы A на фактор-группу A/R_λ и группы B на фактор-группу B/S_λ . Так как группа G_λ является свободным произведением двух конечных π -групп с объединёнными

ными центральными подгруппами, то из теоремы 2 следует, что для любого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ F_π -аппроксимируема.

Поэтому для доказательства F_π -аппроксимируемости группы G достаточно для любого отличного от единицы элемента g этой группы указать такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $g\rho_\lambda \neq 1$.

Пусть $g = x_1x_2 \cdots x_n$ – несократимая запись в группе G элемента g . Предположим сначала, что длина n его равна 1, т.е. элемент g входит в подгруппу A или в подгруппу B ; пусть для определенности $g \in A$. Так как g – неединичный элемент группы A , а семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ подгрупп этой группы является фильтрацией, существует индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $g \notin R_\lambda$. Поскольку ограничение гомоморфизма ρ_λ на подгруппу A совпадает с естественным гомоморфизмом группы A на факторгруппу A/R_λ , мы видим, что $g\rho_\lambda = gR_\lambda$ является неединичным элементом группы G_λ . Таким образом, в этом случае существование $\lambda \in \Lambda$ с требуемым свойством доказано.

Будем считать теперь, что длина n элемента g больше единицы. В этом случае в его записи $g = x_1x_2 \cdots x_n$ сомножители x_1, x_2, \dots, x_n входят поочередно в подгруппы A (A -слоги) и B (B -слоги) и не принадлежат соответствующим объединяемым подгруппам H и K . Поскольку семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ можно указать такое $\mu_i \in \Lambda$, что если x_i есть A -слог, то $x_i \notin HR_{\mu_i}$, а если x_i есть B -слог, то $x_i \notin KS_{\mu_i}$. Так как семейство $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ содержит все пары (H, K, φ) -совместимых нормальных подгрупп конечного π -индекса групп A и B , найдется, как легко видеть, индекс $\lambda \in \Lambda$

такой, что $R_\lambda = \bigcap_{i=1}^n R_{\mu_i}$ и $S_\lambda = \bigcap_{i=1}^n S_{\mu_i}$. Поскольку тогда для любого $i = 1, 2, \dots, n$ из того, что x_i есть A -слог, следует, что $x_i \rho_\lambda = x_i R_\lambda \notin HR_\lambda / R_\lambda$, и из того, что x_i есть B -слог, следует, что $x_i \rho_\lambda = x_i S_\lambda \notin HS_\lambda / S_\lambda$, запись $g \rho_\lambda = x_1 \rho_\lambda \cdot x_2 \rho_\lambda \cdots x_n \rho_\lambda$ элемента $g \rho_\lambda$ является, очевидно, несократимой в группе G_λ , и потому $g \rho_\lambda \neq 1$. Теорема 3, таким образом, доказана.

Переходя к доказательству теоремы 4, напомним, что в ней рассматривается свободное произведение

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

F_π -аппроксимируемых групп A и B с объединёнными подгруппами H и K , принадлежащими центрам групп A и B соответственно. Предполагается также, что в группе A каждая подгруппа, лежащая в H и имеющая в H конечный π -индекс, F_π -отделима и в группе B каждая подгруппа, лежащая в K и имеющая в K конечный π -индекс, F_π -отделима. Для установления F_π -аппроксимируемости группы G достаточно в силу теоремы 3 (и в ее обозначениях) показать, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является K -фильтрацией. Мы покажем, что в действительности из условий теоремы 4 следует, что каждое из этих семейств совпадает с семейством всех нормальных подгрупп конечного π -индекса соответствующей группы A или B , и потому требуемые свойства этих семейств являются очевидными следствиями предположений об F_π -аппроксимируемости группы G и F_π -отделимости подгрупп H и K . Для этого нам понадобится следующее замечание:

Пусть X – подгруппа некоторой группы Y и U – подгруппа конечного π -индекса группы X , являющаяся нормальной подгруппой группы Y . Если подгруппа U F_π -отделима в группе Y ,

то существует нормальная подгруппа V конечного π -индекса группы Y такая, что $X \cap V = U$.

В самом деле, т. к. подгруппа $U F_\pi$ -отделима в группе Y , фактор-группа Y/U является F_π -аппроксимируемой, и поскольку X/U – ее конечная подгруппа, то в группе Y/U найдется нормальная подгруппа V/U конечного π -индекса, пересечение которой с подгруппой X/U тривиально. Легко видеть, что V – искомая подгруппа.

Пусть теперь R – произвольная нормальная подгруппа конечного π -индекса группы A . Тогда $H \cap R$ – нормальная подгруппа конечного π -индекса в группе H и потому $U = (H \cap R)\varphi$ – нормальная подгруппа конечного π -индекса центральной подгруппы K группы B , являющаяся, к тому же, по условию F_π -отделимой в B . Поэтому из нашего замечания следует существование в группе B нормальной подгруппы S конечного π -индекса такой, что $K \cap S = V$. Так как подгруппы R и S являются тогда (H, K, φ) -совместимыми, то подгруппа R входит в семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Аналогично доказывается, что произвольная нормальная подгруппа конечного π -индекса группы B входит в семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, и теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193–209.
2. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. Vol. 7. P. 29–62.
3. Higman G. Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301–305.
4. Neumann B.H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503–554.