Математические заметки

Том 87 выпуск 1 январь 2010

УДК 512.543

О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага–Солитэра

Д. И. Молдаванский

Для каждой из групп с одним определяющим соотношением, составляющих семейство групп Баумслага–Солитэра, указана система ее элементов, нормальное замыкание которой в этой группе совпадает с пересечением всех ее нормальных подгрупп конечного индекса. Непосредственным следствием этого результата является известный критерий финитной аппроксимируемости групп Баумслага–Солитэра. Показано также, что если пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы Баумслага–Солитэра отлично от единичной подгруппы (т.е. если эта группа не финитно аппроксимируема), то это пересечение не является нормальным замыканием никакого конечного множества элементов.

Библиография: 8 названий.

1. Пусть $\sigma(G)$ обозначает пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Очевидно, что совпадение подгруппы $\sigma(G)$ с единичной подгруппой равносильно финитной аппроксимируемости группы G; более того, $\sigma(G)$ является наименьшей из нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым финитно аппроксимируемы.

В исследованиях по финитной аппроксимируемости групп обычно рассматривается проблема выделения в некотором семействе групп тех из них, которые являются финитно аппроксимируемыми. При этом в ряде случаев установленный критерий финитной аппроксимируемости групп данного семейства помогает решить и более общую задачу описания подгруппы $\sigma(G)$ произвольной группы G этого семейства. Два результата такого типа были получены в работе [1], и в первом из них рассматривалось семейство групп, являющихся нисходящими HNN-расширениями.

Напомним, что если G – некоторая группа и φ – ее инъективный эндоморфизм, то *нисходящим* HNN-*расширением* группы G, соответствующим этому эндоморфизму, называется группа

$$G(\varphi) = (G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi,\ g \in G),$$

полученная присоединением к порождающим группы G элемента t, а к определяющим соотношениям группы G – всевозможных соотношений вида $t^{-1}gt = g\varphi$, где $g \in G$. В работе [2] было доказано, что группа $G(\varphi)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой (подгруппа H группы G называется *φ-совместимой*, если выполнено равенство $H\varphi = G\varphi \cap H$). С помощью этого результата нетрудно показать, что подгруппа $\sigma(G(\varphi))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(\varphi)$ пересечения всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G.

Второе семейство, рассмотренное в [1], состоит из обобщенных свободных произведений $G = (A * B;\ H = K, \varphi)$ групп A и B с подгруппами $H < A$ и $K < B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$, причем предполагается, что группы A и B финитно аппроксимируемы, K является центральной подгруппой группы B и в группе B финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в K и имеющие в K конечный индекс. В [1] доказано, что такая группа G финитно аппроксимируема в том и только в том случае, когда в группе A подгруппа H финитно отделима, и с помощью этого результата (но уже не столь непосредственно) установлено, что для любой группы G из этого семейства подгруппа $\sigma(G)$ совпадает с нормальным замыканием в группе G взаимного коммутанта $[H_1, B]$ подгрупп H_1 и B, где H_1 – пересечение всех подгрупп конечного индекса группы A, содержащих подгруппу H.

Примером другого рода, когда при описании подгруппы $\sigma(G)$ критерий финитной аппроксимируемости не используется, является рассматриваемое здесь семейство групп Баумслага–Солитэра, т.е. групп вида

$$G(m, n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где m и n – ненулевые целые числа. Напомним (см. [3], [4]), что группа $G(m, n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$. Здесь будет доказана

Теорема 1. *Пусть $d = (m, n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n. Подгруппа $\sigma(G(m, n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m, n)$ множества коммутаторов вида $[a^k b^d a^{-k}, b]$, где k принимает всевозможные целочисленные значения.*

Как уже было сказано, приведенный выше критерий финитной аппроксимируемости групп $G(m, n)$ при доказательстве этой теоремы не используется. Напротив, он оказывается ее непосредственным следствием. В самом деле, предположим сначала, что $|m| = 1$ или $|n| = 1$. Хорошо известно и легко видеть, что в этом случае нормальное замыкание в группе $G(m, n)$ элемента b является локально циклической и потому абелевой группой. Поэтому все коммутаторы вида $[a^k b^d a^{-k}, b]$ равны 1. Если $|m| = |n|$, то $d = |m| = |n|$ и определяющее соотношение группы $G(m, n)$ равносильно соотношению вида $a^{-1}b^d a = b^{d\varepsilon}$ для подходящего $\varepsilon = \pm 1$. Из него следует, что для любого целого k в группе $G(m, n)$ выполнено равенство $a^k b^d a^{-k} = b^{d\varepsilon^k}$, откуда снова получаем $[a^k b^d a^{-k}, b] = 1$. Таким образом, если $|m| = 1$ или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$, то из теоремы 1 вытекает, что $\sigma(G(m, n)) = 1$, и потому группа $G(m, n)$ финитно аппроксимируема.

С другой стороны, предположим, что абсолютные величины чисел m и n отличны друг от друга и от единицы. Заметим, что группа $G(m, n)$ является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы с порождающим b и связанными подгруппами, порождаемыми элементами b^m и b^n соответственно. Так как $|m| \neq |n|$, хотя бы одно из чисел m или n не является делителем числа $d = (m, n)$; пусть, для определенности, d не делится на m и потому элемент b^d не принадлежит подгруппе, порожденной элементом b^m. Поскольку, к тому же, $|n| > 1$

и потому элемент b не принадлежит подгруппе, порожденной элементом b^n, запись $a^{-1}b^{-d}ab^{-1}a^{-1}b^dab$ коммутатора $[a^{-1}b^da, b]$ является приведенной в этом HNN-расширении, и в силу леммы Бриттона этот коммутатор оказывается неединичным элементом группы $G(m, n)$. Следовательно, в силу теоремы 1 имеем $\sigma(G(m, n)) \neq 1$, и группа $G(m, n)$ не является финитно аппроксимируемой.

Следует заметить также, что в одном частном случае утверждение теоремы 1 можно получить из результатов работы [5], где подгруппа $\sigma(G(m, n))$ рассматривалась в связи со следующим вопросом Хиршона [6]: верно ли, что произвольная конечно порожденная нехопфова группа G обладает сюръективным эндоморфизмом, объединение ядер всех степеней которого совпадает с $\sigma(G)$? Запишем числа m и n в виде $m = m_1p$ и $n = n_1q$, где $(m, q) = (n, p) = 1$, а числа m_1 и n_1 положительны и имеют одни и те же простые делители. В [5] было доказано, что группа $G(m, n)$ обладает эндоморфизмом с указанными свойствами в точности тогда, когда $m_1 = n_1$, и из доказательства этого результата вытекает также, что при $m_1 = n_1$ подгруппа $\sigma(G(m, n))$ совпадает с нормальным замыканием всевозможных коммутаторов вида $[a^kb^da^{-k}, b]$. Тем не менее, для получения утверждения теоремы 1 в полном объеме результатов работы [5] недостаточно; доказательство ее, приводимое здесь, не использует результатов из [5].

Указанное в теореме 1 множество элементов группы $G(m, n)$, порождающее $\sigma(G(m, n))$ как нормальную подгруппу, выглядит бесконечным, но в случае, когда эта группа финитно аппроксимируема, оно оказывается состоящим лишь из одного элемента – единицы. Следующая теорема говорит о том, что этот случай является единственным, когда $\sigma(G(m, n))$ является конечно порожденной нормальной подгруппой.

Теорема 2. *Если подгруппа $\sigma(G(m, n))$ группы $G(m, n)$ неединична, то она не является нормальным замыканием в группе $G(m, n)$ никакого конечного множества элементов этой группы.*

2. Приступим к доказательству теорем. Пусть U обозначает нормальное замыкание в группе $G(m, n)$ всевозможных коммутаторов $[a^kb^da^{-k}, b]$. Включение $U \subseteq \sigma(G(m, n))$ практически сразу вытекает из следующего простого замечания.

Предложение 1. *Пусть g и h – элементы одинакового конечного порядка некоторой группы G, причем $g^r = h^s$ для некоторых ненулевых целых чисел r и s. Тогда в группе G выполнены равенства $[g^t, h] = 1$ и $[g, h^t] = 1$, где $t = (r, s)$ – наибольший общий делитель чисел r и s.*

Доказательство. Действительно, если k есть порядок каждого из элементов g и h, то из совпадения элементов g^r и h^s следует равенство $(k, r) = (k, s)$. Поэтому наибольший общий делитель (k, r) чисел k и r является общим делителем чисел r и s, а потому – делителем числа t. Следовательно, сравнение $rx \equiv t \pmod k$ имеет решение x_0. Тогда $g^t = g^{rx_0} = h^{sx_0}$, откуда и следует, что $[g^t, h] = 1$. Равенство $[g, h^t] = 1$ доказывается аналогично.

Запишем числа m и n в виде $m = du$ и $n = dv$, где, напомним, $d = (m, n)$ и потому числа u и v взаимно просты. Очевидная индукция показывает, что для любого целого $k \geqslant 0$ в группе $G(m, n)$ выполнено равенство $a^{-k}b^{du^k}a^k = b^{dv^k}$. Отсюда и из предложения 1 следует, что произвольная нормальная подгруппа N конечного индекса группы $G(m, n)$ содержит все коммутаторы вида $[a^kb^da^{-k}, b]$.

Действительно, если $k \leqslant 0$, то полагая $g = a^k b a^{-k}$, получаем $g^{du^{-k}} = b^{dv^{-k}}$. Так как элементы g и b сопряжены, их порядки по модулю подгруппы N совпадают, и поскольку наибольший общий делитель чисел du^{-k} и dv^{-k} равен d, из предложения 1 (примененного к фактор-группе $G(m,n)/N$) следует, что коммутатор

$$[a^k b^d a^{-k}, b] = [g^d, b]$$

принадлежит подгруппе N. Если же $k > 0$, аналогичные рассуждения применительно к элементам b и $h = a^{-k} b a^k$, показывают, что подгруппа N содержит элемент

$$[b^d, h] = a^{-k}[a^k b^d a^{-k}, b]a^k.$$

Таким образом, справедливость включения $U \subseteq \sigma(G(m,n))$ доказана. Для доказательства противоположного включения нам достаточно показать, что фактор-группа $\overline{G} = G(m,n)/U$ группы $G(m,n)$ по подгруппе U, определяемая порождающими и определяющими соотношениями вида

$$\overline{G} = \langle a, b;\ a^{-1} b^m a = b^n,\ [a^k b^d a^{-k}, b] = 1,\ k \in \mathbb{Z}\rangle,$$

финитно аппроксимируема.

Введем в рассмотрение группу

$$B = \langle b_i,\ i \in \mathbb{Z};\ [b_i^d, b_j] = 1,\ i, j \in \mathbb{Z}\rangle$$

и для каждого целого числа $r > 0$ – группу

$$B_r = \langle b_{-r}, b_{-r+1}, \ldots, b_r;\ [b_i^d, b_j] = 1,\ -r \leqslant i, j \leqslant r\rangle.$$

В группе B для произвольного номера i полагаем $c_i = b_i^d$ и обозначим через C ее подгруппу, порожденную всеми элементами c_i, $i \in \mathbb{Z}$. Аналогично, в группе B_r для произвольного i, $-r \leqslant i \leqslant r$, полагаем $c_i = b_i^d$ и обозначим через C_r ее подгруппу, порожденную всеми элементами c_i, $-r \leqslant i \leqslant r$. Имеет место

Предложение 2. *Подгруппа C лежит в центре группы B и является свободной абелевой группой, свободно порождаемой элементами c_i, $i \in \mathbb{Z}$. Аналогично, подгруппа C_r лежит в центре группы B_r и является свободной абелевой группой, свободно порождаемой элементами c_i, $-r \leqslant i \leqslant r$.*

Доказательство. Действительно, центральность подгруппы C в группе B очевидна. Далее, предположим, что элемент $c = c_{i_1}^{k_1} c_{i_2}^{k_2} \cdots c_{i_s}^{k_s}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$, равен единице. Пусть для целого числа l через π_l обозначен гомоморфизм группы B в аддитивную группу $\mathbb{Z}$ целых чисел, отображающий элемент b_i в единицу, если $i = l$, и – в 0, если $i \neq l$. Поскольку для любого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, выполнено равенство $c\pi_{i_j} = dk_j$, имеем $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, и для группы B утверждение доказано. Для группы B_r доказательство аналогично.

(Группа B используется в доказательстве теоремы 1, а группы B_r будут использоваться при доказательстве теоремы 2.)

Обозначим через E подгруппу группы B, порожденную всевозможными элементами $c_i^u c_{i+1}^{-v}$ (где, как и выше, числа u и v определяются из равенств $m = du$ и

$n = dv$), и через $\overline{B}$ – фактор-группу группы B по подгруппе E. Очевидно, что группа $\overline{B}$ задается представлением вида

$$\overline{B} = \langle b_i,\ i \in \mathbb{Z};\ [b_i^d, b_j] = 1,\ b_i^m = b_{i+1}^n,\ i,j \in \mathbb{Z}\rangle,$$

а ее подгруппа $\overline{C} = C/E$ – представлением

$$\overline{C} = \langle c_i,\ i \in \mathbb{Z};\ [c_i, c_j] = 1,\ c_i^u = c_{i+1}^v,\ i,j \in \mathbb{Z}\rangle.$$

Легко видеть также, что отображение $b_i \mapsto b_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$, продолжаемо до автоморфизма φ группы $\overline{B}$. Поэтому группа

$$\langle a, b_i,\ i \in \mathbb{Z};\ [b_i^d, b_j] = 1,\ b_i^m = b_{i+1}^n,\ a^{-1}b_i a = b_{i-1},\ i,j \in \mathbb{Z}\rangle \tag{1}$$

является расщепляемым расширением группы $\overline{B}$ при помощи бесконечной циклической группы с порождающим a. Так как $\overline{C}\varphi = \overline{C}$, подгруппа $\overline{C}$ нормальна в группе (1). Легко видеть также, что в этой группе для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $b_k = a^k b_0 a^{-k}$. Поэтому она порождается двумя элементами a и b_0, и непосредственное применение преобразований Тице показывает, что отображение $a \mapsto a$, $b \mapsto b_0$ определяет изоморфизм группы

$$\overline{G} = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n,\ [a^k b^d a^{-k}, b] = 1,\ k \in \mathbb{Z}\rangle$$

на группу (1). Подгруппы группы $\overline{G}$, соответствующие при этом изоморфизме подгруппам $\overline{B}$ и $\overline{C}$ группы (1), будем обозначать теми же символами. Таким образом, подгруппа $\overline{B}$ группы $\overline{G}$ порождается всевозможными элементами вида $a^i b a^{-i}$, а подгруппа $\overline{C}$ – элементами $a^i b^d a^{-i}$. В частности, имеет место

Предложение 3. *Порождаемая элементами $c_i = a^i b^d a^{-i}$, $i \in \mathbb{Z}$, подгруппа $\overline{C}$ группы $\overline{G}$ в этой системе порождающих определяется соотношениями*

$$[c_i, c_j] = 1, \quad c_i^u = c_{i+1}^v, \qquad i,j \in \mathbb{Z},$$

и является нормальной подгруппой группы $\overline{G}$. Фактор-группа $\overline{G}/\overline{C}$ является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка d.

Доказательство. Действительно, первое утверждение вытекает из построения группы (1), а второе очевидно, так как

$$\overline{G}/\overline{C} = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n,\ [a^k b^d a^{-k}, b] = 1,\ b^d = 1,\ k \in \mathbb{Z}\rangle = \langle a, b;\ b^d = 1\rangle.$$

Другое задание порождающими и определяющими соотношениями группы $\overline{C}$ делает ее строение более понятным.

Предложение 4. *Для каждого целого числа $k > 0$ фиксируем пару целых чисел α_k и β_k таких, что $\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k} = 1$, и полагаем*

$$e_k = c_{-k}^{\alpha_k} c_k^{\beta_k}.$$

Группа $\overline{C}$ порождается элементами $e_1, e_2, \ldots$ и в этой системе порождающих определяется соотношениями

$$e_k = e_{k+1}^{uv}, \qquad k > 0.$$

В частности, $\overline{C}$ является финитно аппроксимируемой абелевой группой ранга 1.

Доказательство. Из определяющих соотношений $c_i^u = c_{i+1}^v$ группы $\overline{C}$ следует, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ и произвольного целого $r > 0$ выполнено равенство $c_i^{u^r} = c_{i+r}^{v^r}$. В частности, при любом $k > 0$ имеем $c_{-k}^{u^{2k}} = c_k^{v^{2k}}$, откуда

$$c_k = c_k^{\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k}} = c_{-k}^{\alpha_k u^{2k}} c_k^{\beta_k u^{2k}} = e_k^{u^{2k}}$$

и, аналогично,

$$c_{-k} = c_{-k}^{\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k}} = c_{-k}^{\alpha_k v^{2k}} c_k^{\beta_k v^{2k}} = e_k^{v^{2k}}.$$

Таким образом, при любом целом $k > 0$ в группе $\overline{C}$ выполнены соотношения

$$c_k = e_k^{u^{2k}} \qquad \text{и} \qquad c_{-k} = e_k^{v^{2k}}. \tag{2}$$

Поскольку, к тому же,

$$c_0 = c_0^{\alpha_1 v^2 + \beta_1 u^2} = c_{-1}^{\alpha_1 uv} c_1^{\beta_1 uv} = e_1^{uv},$$

элементы $e_1, e_2, \dots$ порождают группу $\overline{C}$.

Используя равенства (2) и соотношения $c_i^u = c_{i+1}^v$, получаем при произвольном $k > 0$

$$e_k^{u^{2k+1}} = c_k^u = c_{k+1}^v = e_{k+1}^{u^{2(k+1)}v} = (e_{k+1}^{uv})^{u^{2k+1}}$$

и

$$e_k^{v^{2k+1}} = c_{-k}^v = c_{-k-1}^u = e_{k+1}^{v^{2(k+1)}u} = (e_{k+1}^{uv})^{v^{2k+1}},$$

и так как числа u^{2k+1} и v^{2k+1} взаимно просты, в группе $\overline{C}$ выполнены соотношения

$$e_k = e_{k+1}^{uv}, \qquad k > 0. \tag{3}$$

Введем теперь в рассмотрение группу

$$X = \langle x_1, x_2, \dots;\, x_k = x_{k+1}^{uv},\, k > 0 \rangle.$$

Равенства (3) говорят о том, что отображение $x_k \mapsto e_k$, $k > 0$, определяет гомоморфизм φ группы X на группу $\overline{C}$.

С другой стороны, в группе X для любого $k > 0$ выполнено равенство

$$(x_k^{u^{2k}})^u = (x_{k+1}^{uv})^{u^{2k+1}} = (x_{k+1}^{u^{2(k+1)}})^v,$$

а для $k < -1$ – равенство

$$(x_{-k}^{v^{-2k}})^u = (x_{-k}^{uv})^{v^{-2k-1}} = x_{-k-1}^{v^{-2k-1}} = (x_{-(k+1)}^{v^{-2(k+1)}})^v.$$

Так как, кроме того,

$$(x_1^{v^2})^u = (x_1^{uv})^v \qquad \text{и} \qquad (x_1^{uv})^u = (x_1^{u^2})^v,$$

отображение, переводящее элемент c_k в элемент $x_k^{u^{2k}}$, если $k > 0$, в элемент x_1^{uv}, если $k = 0$, и в элемент $x_{-k}^{v^{-2k}}$, если $k < 0$, определяет гомоморфизм ψ группы $\overline{C}$ в группу X. Непосредственная проверка показывает, что гомоморфизмы φ и ψ взаимно обратны, и предложение 4 доказано.

Известная теорема Мальцева [7] утверждает, что расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы при помощи финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой. Нам понадобится здесь следующее обобщение этой теоремы, полученное Азаровым [8].

Предложение 5. *Расщепляемое расширение финитно аппроксимируемой группы конечного ранга при помощи финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой.*

Утверждение о финитной аппроксимируемости группы $\overline{G}$ теперь почти очевидно. Действительно, поскольку в силу предложения 3 фактор-группа $\overline{G}/\overline{C}$ является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка d, она обладает подгруппой конечного индекса $\overline{F}/\overline{C}$, являющейся свободной группой. Так как произвольное расширение при помощи свободной группы расщепляемо, из предложений 4 и 5 следует, что подгруппа $\overline{F}$ группы $\overline{G}$ финитно аппроксимируема. А так как ее индекс в группе $\overline{G}$ конечен, то и группа $\overline{G}$ является финитно аппроксимируемой. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Будем считать, что $\sigma(G(m,n)) \neq 1$, т.е. что группа $G(m,n)$ не является финитно аппроксимируемой. Следовательно, $|m| > 1$, $|n| > 1$ и $|m| \neq |n|$. В частности, наибольший общий делитель d чисел m и n отличен от абсолютной величины хотя бы одного из них. Поскольку группы $G(m,n)$ и $G(n,m)$ изоморфны, без потери общности можно считать, что $d < |n|$, т.е. что $|v| > 1$.

Для произвольного целого числа $r > 0$ обозначим через U_r нормальное замыкание в группе $G(m,n)$ множества коммутаторов

$$[a^k b^d a^{-k}, b], \qquad -r \leqslant k \leqslant r.$$

Поскольку любое конечное подмножество множества всех коммутаторов вида $[a^k b^d a^{-k}, b]$ содержится в подгруппе U_r для подходящего $r > 0$ (и с учетом того, что если подгруппа Y некоторой группы X является нормальным замыканием в X конечного числа элементов, то в любом множестве, порождающем Y как нормальную подгруппу, можно указать конечное подмножество с тем же свойством), теорема 2 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 6. *Для любого целого $r > 0$ коммутатор $[a^{2r+1} b^d a^{-(2r+1)}, b]$ не принадлежит подгруппе U_r.*

Для доказательства этого предложения воспользуемся группой

$$B_r = \langle b_{-r}, b_{-r+1}, \dots, b_r;\ [b_i^d, b_j] = 1,\ -r \leqslant i, j \leqslant r \rangle.$$

Напомним, что в соответствии с предложением 2 подгруппа C_r, порожденная элементами $c_i = b_i^d$, $-r \leqslant i \leqslant r$, лежит в ее центре и является свободной абелевой, свободно порождаемой указанными элементами. Введем также следующие подгруппы группы B_r:

- B_r^- – подгруппа, порожденная элементами $b_{-r}, b_{-r+1}, \dots, b_{r-1}$;
- C_r^- – подгруппа, порожденная элементами $c_{-r}, c_{-r+1}, \dots, c_{r-1}$;
- B_r^+ – подгруппа, порожденная элементами $b_{-r+1}, b_{-r+2}, \dots, b_r$;
- C_r^+ – подгруппа, порожденная элементами $c_{-r+1}, c_{-r+2}, \dots, c_r$.

Утверждается, что

$$B_r^- \cap C_r = C_r^- \qquad \text{и} \qquad B_r^+ \cap C_r = C_r^+. \tag{4}$$

Действительно, включения справа налево очевидны. Пусть элемент $b \in B_r$ принадлежит подгруппе $B_r^- \cap C_r$. Так как $b \in C_r$, для подходящих чисел $k_{-r}, k_{-r+1}, \ldots, k_r$ имеем

$$b = c_{-r}^{k_{-r}} c_{-r+1}^{k_{-r+1}} \cdots c_r^{k_r} = b_{-r}^{dk_{-r}} b_{-r+1}^{dk_{-r+1}} \cdots b_r^{dk_r},$$

и потому образ элемента b при гомоморфизме π_r (см. доказательство предложения 2) равен dk_r. Но так как $b \in B_r^-$, $b\pi_r = 0$. Следовательно, $k_r = 0$ и $b \in C_r^-$. Включение $B_r^- \cap C_r \subseteq C_r^-$, таким образом, доказано. Включение $B_r^+ \cap C_r \subseteq C_r^+$ доказывается аналогично.

Введем еще следующие подгруппы группы C_r:

- E_r – подгруппа, порожденная элементами $c_i^u c_{i+1}^{-v}$, где $-r \leqslant i < r$;
- E_r^- – подгруппа, порожденная элементами $c_i^u c_{i+1}^{-v}$, где $-r \leqslant i < r-1$;
- E_r^+ – подгруппа, порожденная элементами $c_i^u c_{i+1}^{-v}$, где $-r+1 \leqslant i < r$.

Поскольку группа C_r является свободной абелевой, свободно порождаемой элементами $c_{-r}, c_{-r+1}, \ldots, c_r$, очевидно, что

$$E_r \cap C_r^- = E_r^- \qquad \text{и} \qquad E_r \cap C_r^+ = E_r^+.$$

Отсюда и из (4) получаем

$$B_r^- \cap E_r = E_r^- \qquad \text{и} \qquad B_r^+ \cap E_r = E_r^+. \tag{5}$$

Отображение $b_i \mapsto b_{i-1}$, $-r < i \leqslant r$, определяет, как легко видеть, изоморфизм φ подгруппы B_r^+ группы B_r на ее подгруппу B_r^-. Так как $E_r^+\varphi = E_r^-$, в силу равенств (5) отображение φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi}$ подгруппы $\overline{B}_r^{\,+} = B_r^+ E_r/E_r$ фактор-группы $\overline{B}_r = B_r/E_r$ на ее подгруппу $\overline{B}_r^{\,-} = B_r^- E_r/E_r$. Пусть

$$\overline{B}_r^{\,*} = (\overline{B}_r, t;\ t^{-1}\overline{B}_r^{\,+} t = \overline{B}_r^{\,-}, \overline{\varphi})$$

– HNN-расширение группы $\overline{B}_r$ с проходной буквой t и связанными относительно изоморфизма $\overline{\varphi}$ подгруппами $\overline{B}_r^{\,+}$ и $\overline{B}_r^{\,-}$. Так как в группе $\overline{B}_r^{\,*}$ выполнены равенства

$$\overline{b}_i^{\,m} = \overline{b}_{i+1}^{\,n}, \quad -r \leqslant i < r, \qquad \text{и} \qquad t^{-1}\overline{b}_i t = \overline{b}_{i-1}, \quad -r < i \leqslant r \tag{6}$$

(где $\overline{b}$ обозначает образ элемента $b \in B_r$ при естественном гомоморфизме группы B_r на группу $\overline{B}_r$), имеем

$$t^{-1}\overline{b}_0^{\,m} t = \overline{b}_{-1}^{\,m} = \overline{b}_0^{\,n}.$$

Следовательно, отображение $a \mapsto t$, $b \mapsto \overline{b}_0$ определяет гомоморфизм τ_r группы $G(m,n)$ в группу $\overline{B}_r^{\,*}$. Из второй группы соотношений (6) легко следует, что для любого целого числа k, $|k| \leqslant r$, в группе $\overline{B}_r$ выполнено равенство $t^k \overline{b}_0 t^{-k} = \overline{b}_k$. Отсюда и из соотношений $[\overline{b}_i^{\,d}, \overline{b}_j] = 1$, выполненных для всех i, j, $-r \leqslant i, j \leqslant r$, следует, что при гомоморфизме τ_r произвольный коммутатор $[a^k b^d a^{-k}, b]$ при $|k| \leqslant r$ переходит в единицу. Таким образом, подгруппа U_r лежит в ядре гомоморфизма τ_r, и нам остается показать, что образ коммутатора $[a^{2r+1} b^d a^{-(2r+1)}, b]$ при этом гомоморфизме отличен от единицы.

Покажем для этого, что в группе $\overline{B}_r$ элемент $\bar{b}_{-r}$ не принадлежит подгруппе $\overline{B}_r^{\,+}$, а элемент $\bar{b}_r^{\,d}$ не принадлежит подгруппе $\overline{B}_r^{\,-}$.

В самом деле, если $\bar{b}_{-r} \in \overline{B}_r^{\,+}$, то в группе B_r элемент b_{-r} принадлежит подгруппе $B_r^+ E_r$ и потому входит в подгруппу $B_r^+ C_r$. Тогда $b_{-r} = bc$, где $b \in B_r^+$ и $c \in C_r$. Так как $b_{-r}\pi_{-r} = 1$, $b\pi_{-r} = 0$ и $(bc)\pi_{-r} = b\pi_{-r} + c\pi_{-r} = dx$ для подходящего $x \in \mathbb{Z}$, имеем $d = 1$. Следовательно, $m = u$, подгруппы B_r^+ и C_r^+ совпадают и элемент $b_{-r} = c_{-r}$ принадлежит подгруппе $C_r^+ E_r$. Но это невозможно, поскольку эта подгруппа свободной абелевой группы C_r порождается в ней элементами c_{-r}^u, $c_{-r+1}, \dots, c_r$ и $|u| = |m| > 1$.

Если $\bar{b}_r^{\,d} \in \overline{B}_r^{\,-}$, то в группе B_r элемент $b_r^d = c_r$ принадлежит подгруппе $B_r^- E_r$, т.е. $c_r = be$, где $b \in B_r^-$ и $e \in E_r$. Так как тогда элемент $b = c_r e^{-1}$ входит в подгруппу C_r, из (4) следует, что $c_r \in C_r^- E_r$. Но это невозможно, поскольку подгруппа $C_r^- E_r$ порождается элементами $c_{-r}, c_{-r+1}, \dots, c_{r-1}$, c_r^v и $|v| > 1$.

Возвращаясь к коммутатору $[a^{2r+1} b^d a^{-(2r+1)}, b]$, рассмотрим сопряженный с ним элемент
$$w = a^{-r}[a^{2r+1} b^d a^{-(2r+1)}, b]a^r = [a^{r+1} b^d a^{-(r+1)}, a^{-r} b a^r].$$
Так как $t^r \bar{b}_0 t^{-r} = \bar{b}_r$ и $t^{-r} \bar{b}_0 t^r = \bar{b}_{-r}$, имеем
$$w\tau_r = [t\bar{b}_r^{\,d} t^{-1}, \bar{b}_{-r}] = t\bar{b}_r^{\,-d} t^{-1} \bar{b}_{-r}^{\,-1} t \bar{b}_r^{\,d} t^{-1} \bar{b}_{-r}.$$
Поскольку элемент $\bar{b}_{-r}$ не принадлежит подгруппе $\overline{B}_r^{\,+}$ и элемент $\bar{b}_r^{\,d}$ не принадлежит подгруппе $\overline{B}_r^{\,-}$, последнее выражение является приведенной записью элемента $w\tau_r$ в HNN-расширении $\overline{B}_r^{\,*}$ и потому этот элемент отличен от 1. Предложение 6 доказано, и доказательство теоремы 2 закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д. И. Молдаванский, “О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки*, 2008, № 2, 114–122.

[2] Д. И. Молдаванский, “Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп”, *Укр. матем. журн.*, **44**:6 (1992), 842–845.

[3] G. Baumslag, D. Solitar, “Some two-generator one-relator non-Hopfian groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 199–201.

[4] S. Meskin, “Nonresidually finite one-relator groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 105–114.

[5] Д. И. Молдаванский, *Пересечение подгрупп конечного индекса в нехопфовых группах с одним определяющим соотношением*, Деп. в ВИНИТИ 6671-В86.

[6] R. Hirshon, “The intersection of the subgroups of finite index in some finitely presented groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53**:1 (1975), 32–36.

[7] А. И. Мальцев, “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Учен. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **18**:5 (1958), 49–60.

[8] Д. Н. Азаров, “О группах конечного общего ранга”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Биолог., хим., физ., матем.*, 2004, № 3, 100–103.

Д. И. Молдаванский
Ивановский государственный университет
E-mail: moldav@mail.ru

Поступило
05.02.2009
Исправленный вариант
27.04.2009