

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 13 Выпуск 1 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЭРА

Д. И. Молдаванский (г. Иваново)

ON THE RESIDUALLITY OF BAUMSLAG – SOLITAR GROUPS

D. I. Moldavanskii

Аннотация

Приведен обзор полученных к настоящему времени результатов об аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра некоторыми классами конечных групп относительно предикатов равенства и сопряженности.

The survey of results on residuallity and conjugacy separability in some classes of finite groups of Baumslag – Solitar groups that have received up to now is given.

Группами Баумслага – Солитэра называют группы вида

$$G(m, n) = \langle a, b; a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа. Отметим сразу же, что поскольку группы $G(m, n)$, $G(n, m)$ и $G(-m, -n)$ попарно изоморфны, без потери общности можно считать, что параметры m и n , определяющие группу $G(m, n)$ удовлетворяют условию $|n| \geq m > 0$; в тех случаях, когда это удобно для формулировок, мы будем предполагать это условие выполненным.

Семейство групп $G(m, n)$ было введено в рассмотрение в статье Г. Баумслага и Д. Солитэра [1]. Именно в этом семействе авторы обнаружили первый пример группы с одним определяющим соотношением, не являющейся хопфовой (т. е. изоморфной некоторой своей истинной фактор-группе); было показано, что группа $G(2, 3)$ является нехопфовой. Тем самым оказалось опровергнутым

предположение о том, что произвольная группа, определяемая одним соотношением, является хопфовой и даже финитно аппроксимируемой. Это предположение разделялось в то время рядом математиков и основывалось, по-видимому, на чисто формальной близости групп с одним определяющим соотношением к свободным группам. Тот же пример позволил ответить и на вопрос Б. Неймана [2], может ли нехопфова группа, порожаемая двумя элементами, определяться конечным множеством соотношений.

В течение ряда лет свойства групп Баумслага – Солитэра привлекали внимание многих математиков, в частности и потому, что ряд естественных вопросов о строении и свойствах групп с одним определяющим соотношением в случае групп Баумслага – Солитэра получают более определенные, чем в общем случае, ответы. Например, проблема изоморфизма для групп этого семейства оказывается тривиальной, благодаря следующему результату (см. [3]): группы $G(m, n)$ и $G(m', n')$, где $|n| \geq m > 0$ и $|n'| \geq m' > 0$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = m'$ и $n = n'$. В определенной степени это справедливо и для проблем, связанных с аппроксимируемостью групп. Обзор полученных к настоящему времени результатов об аппроксимируемости групп $G(m, n)$ некоторыми классами конечных групп относительно предикатов равенства и сопряженности и является целью данного сообщения.

Напомним, что если \mathcal{K} — некоторый класс групп, то группа G называется \mathcal{K} -аппроксимируемой (\mathcal{K} -аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых различных (соответственно, не сопряженных) ее элементов a и b существует гомоморфизм группы G на некоторую группу X из класса \mathcal{K} , при котором образы этих элементов различны (соответственно, не сопряжены в группе X). Очевидно, что произвольная \mathcal{K} -аппроксимируемая относительно сопряженности группа является \mathcal{K} -аппроксимируемой.

Через \mathcal{F} будет обозначаться класс всех конечных групп, и для некоторого простого числа p и некоторого множества π простых чисел символы \mathcal{F}_p и \mathcal{F}_π будут обозначать соответственно класс всех конечных p -групп и класс всех конечных π -групп. Ясно, что свойство \mathcal{F} -аппроксимируемости (относительно сопряженности) совпадает с классическим свойством финитной аппроксимируемости (относительно сопряженности).

Попытка в статье [1] указать достаточное условие \mathcal{F} -аппроксимируемости групп $G(m, n)$ была уточнена в работе С. Мескина [4] следующим образом:

Теорема 1. *Группа $G(m, n)$ \mathcal{F} -аппроксимируема тогда и только тогда, когда (при условии $|n| \geq m > 0$) или $m = 1$, или $|n| = m$.*

В работе [5] доказана

Теорема 2. *Для любого простого числа p группа $G(m, n)$ (где снова предполагается, что $|n| \geq m > 0$) является \mathcal{F}_p -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod{p}$, или $|n| = m = p^r$ для некоторого $r \geq 0$, причем если $n = -m$, то $p = 2$.*

Теоремы 1 и 2 могут быть обобщены следующим образом.

Для некоторого класса групп \mathcal{K} и произвольной группы G через $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем обозначать пересечение всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат классу \mathcal{K} . Очевидно, что группа G является \mathcal{K} -аппроксимируемой в точности тогда, когда $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ совпадает с единичной подгруппой; более того, $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ является наименьшей из нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым \mathcal{K} -аппроксимируемы.

В случае, когда \mathcal{K} совпадает с классом \mathcal{F} всех конечных групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем писать $\sigma(G)$, и если \mathcal{K} совпадает с классом \mathcal{F}_p всех конечных p -групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ договоримся писать $\sigma_p(G)$.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 3. ([6, теорема 1]) Пусть $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n . Подгруппа $\sigma(G(m, n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m, n)$ множества всех коммутаторов $[a^k b^d a^{-k}, b]$, где k принимает всевозможные целочисленные значения.

Теорема 4. (см. [7]) Пусть p — простое число. Запишем числа m и n в виде $m = p^r t_1$ и $n = p^s n_1$, где $r, s \geq 0$ и каждое из чисел t_1 и n_1 взаимно просто с p . Обозначим также через d наибольший общий делитель чисел t_1 и n_1 и запишем $t_1 = du$ и $n_1 = dv$. Тогда

если $r \neq s$ или если числа t_1 и n_1 не сравнимы по модулю p , то подгруппа $\sigma_p(G(m, n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m, n)$ элемента b^{p^t} , где $t = \min\{r, s\}$;

если $r = s$ и $t_1 \equiv n_1 \pmod{p}$, то подгруппа $\sigma_p(G(m, n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m, n)$ множества, состоящего из элемента $a^{-1} b^{p^r u} a b^{-p^r v}$ и всевозможных коммутаторов вида $[a^k b^{p^r} a^{-k}, b]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Следует подчеркнуть, что в доказательствах теорем 3 и 4 критерии \mathcal{F} -аппроксимируемости и \mathcal{F}_p -аппроксимируемости группы $G(m, n)$, доставляемые теоремами 1 и 2, не используется и, наоборот, могут быть получены соответственно из теорем 3 и 4 достаточно простыми рассуждениями.

Другое направление обобщений теорем 1 и 2 состоит в изучении условий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости групп $G(m, n)$ для некоторого (непустого) множества простых чисел π . В статье [8] доказана

Теорема 5. Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа $G(1, n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π -число $s > 1$, взаимно простое с n , порядок по модулю которого числа n также является π -числом.

Из теоремы 2 следует, разумеется, что группа $G(1, n)$ является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой, если множество π содержит хотя бы один делитель числа $n - 1$. Существование множества π , не содержащего делителей $n - 1$ и такого, что группа $G(1, n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема, гарантируется следующим утверждением, вытекающим из теоремы 5:

Следствие. Если $|n| > 1$, то для любого простого числа p , не делящего

число $n - 1$, существует простое число q , не делящее $n - 1$ и такое, что группа $G(1, n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема при $\pi = \{p, q\}$.

Для групп вида $G(m, n)$, где $|n| = m$, общий критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости допускает более прозрачную формулировку:

Теорема 6. *Для любого множества простых чисел π группа $G(m, m)$ является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π -числом, а группа $G(m, -m)$ является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π -числом и множество π содержит число 2.*

Перейдем теперь к результатам об аппроксимируемости групп $G(m, n)$ относительно сопряженности.

Утверждение об \mathcal{F} -аппроксимируемости относительно сопряженности групп $G(1, n)$, доказанное в [9], вытекает и из полученного в [10] более общего результата об \mathcal{F} -аппроксимируемости относительно сопряженности любого нисходящего HNN -расширения конечно порожденной абелевой группы. \mathcal{F} -аппроксимируемость относительно сопряженности групп $G(m, n)$, где $|n| = m$, может быть выведена из результата работы [11] или из его обобщения, полученного в [12]. Впрочем, более простое и непосредственное доказательство этого факта можно получить, следуя идеям статьи М. И. Каргаполова [13].

С другой стороны, в работе [14] было показано, что для любого целого числа n , отличного от 0 и ± 1 , и для любого множества π , состоящего из двух простых чисел p и q , группа $G(1, n)$ не является \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности. Отсюда и из следствия из теоремы 5 вытекает, таким образом, что для некоторых 2-элементных множеств π группа $G(1, n)$ может быть \mathcal{F}_π -аппроксимируемой и не быть \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности. Для групп вида $G(m, n)$, где $|n| = m$, ситуация оказывается противоположной:

Теорема 7. *Если группа $G(m, n)$, где $|n| = m$, \mathcal{F}_π -аппроксимируема, то она является и \mathcal{F}_π -аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Теоремы 6 и 7 получены недавно И. А. Варламовой и Д. И. Молдаванским; статья принята к печати в Вестнике Ивановского государственного университета.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199 – 201.
- [2] Neumann B. H. An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503 – 554.
- [3] Молдаванский Д. И. Изоморфизм групп Баумслэга – Солитэра // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 12. С. 1684 – 1686.

- [4] Meskin S. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105 – 114.
- [5] Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными p -группами HNN -расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129 – 140.
- [6] Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслэга – Солитэра // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 92 – 100.
- [7] Молдаванский Д. И. О пересечении подгрупп конечного p -индекса в группах Баумслэга – Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2010. Вып. 2. С. 106 – 111.
- [8] Иванова О. А., Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными π -группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6. Иваново. 2008. С. 51 – 58.
- [9] Молдаванский Д. И., Кравченко Л. В., Фролова Е. Н. // Фinitная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмич. проблемы теории групп и полу-групп. Тула: Тул. гос. пед. инст. 1986, С. 81 – 91
- [10] Соколов Е. В. Фinitная аппроксимируемость относительно сопряженности нисходящих HNN -расширений конечно порожденных абелевых групп // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 5, С. 748 – 762.
- [11] Wong P. C., Tang C. K. Conjugacy separability of certain HNN extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25 – 31.
- [12] Сенкевич О. Е. Фinitная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN -расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. 2006, Вып. 3. С. 133 – 146.
- [13] Каргаполов М. И. Фinitная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 1. С. 63 – 68.
- [14] Иванова Е. А., Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными группами разрешимых групп Баумслэга – Солитэра // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2011, Вып. 2. С. 129 – 136