УДК 512.543

М. М. Недзельский

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ *HNN*-РАСШИРЕНИЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

1. Введение

Пусть K — некоторая группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа

$$G =< K, t; t^{-1}At = B, \varphi >,$$

порождаемая группой G и элементом t и определяемая соотношениями группы G и соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$ $(a \in A)$, называется HNN - расширением группы G с проходной буквой t относительно связанных подгрупп A и B и изоморфизма φ [1].

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (ф.а.), если для любого неединичного элемента G существует гомоморфизм группы G в подходящую конечную группу, при котором образ данного элемента отличен от единицы.

В работе [2] был найден следующий критерий финитной аппроксимируемости группы G в случае, когда K — конечно порожденная абелева группа.

Пусть $D = \{x \in \ K$; для каждого целого ν существует натуральное $\lambda = \lambda(\nu)$ такое, что $t^{-\nu}x^{\lambda}t^{\nu} \in K\}$. (Легко показать, что D является подгруппой в K.) Группа G будет финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $A = K$ или $B = K$ или существует подгруппа конечного индекса H группы D такая, что $H\varphi = H$.

Автором найден алгоритм, позволяющий по заданным K, A, B и φ определять существование указанной выше подгруппы H.

Прежде всего напомним понятие изолированной подгруппы. А именно, подгруппа H группы K называется изолированной, если для любого элемента $h \in H$ и любого натурального числа n решение уравнения $x^n = h$, если оно существует в K, принадлежит к H. Для любой подгруппы H группы K определено изолированное замыкание H как пересечение всех изолированных подгрупп группы K, содержащих подгруппу H. Легко показать, что это пересечение, которое мы будем обозначать через $I(H)$, само является изолированной подгруппой группы K.

Пусть K — свободная абелева группа с базисом $g_1, \ldots , g_n$. Рассмотрим линейное пространство L над полем рациональных чисел с базисом $g_1, \ldots , g_n$ такое, что группа K естественным образом вкладывается в аддитивную группу пространства L. Для любой подгруппы U группы

K обозначим через $L(U)$ линейное замыкание U в L, то есть линейное подпространство в L, порожденное U. Изоморфизм φ определяет естественным образом линейное отображение φ_L подпространства $L(A)$ на подпространство $L(B)$. Следующие свойства вытекают непосредственно из определений.

Предложение 1. *Для любых двух подгрупп U и V группы K*
1) $L(U \cap V) = L(U) \cap L(V)$;
2) $L(U) \cap K = I(U)$;
3) если $U \subseteq A$, то $L(U\varphi) = L(U)\varphi_L$;
4) если $V \subseteq B$, то $L(V\varphi^{-1}) = L(V)\varphi_L^{-1}$.

В разделе 4 работы [2] показано, что подгруппа D может быть описана следующим образом. Пусть $M_0 = A \cap B$. Определим по индукции $M_{i+1} = M_i\varphi^{-1} \cap M_i \cap M_i\varphi$ для всех $i = 0, 1, \ldots$. Получаем $M_{i+1} \leq M_i$ для всех i и найдется такое целое k, что ранги свободных абелевых групп M_i и M_{i+1} совпадают. Тогда D является изолированным замыканием M_k, то есть $D = I(M_k)$. Отметим, что подгруппа D является изолированной подгруппой группы K.

Переходя к линейным замыканиям и учитывая предложение 1, получаем $L(M_0) = L(A) \cap L(B)$ и $L(M_{i+1}) = L(M_i)\varphi_L^{-1} \cap L(M_i) \cap L(M_i)\varphi_L$ для всех $i = 0, 1, \ldots$. Легко показать, что $L(D) = L(M_k)$, причем $L(D)\varphi_L = L(D)$. Таким образом, $L(D)$ можно эффективно определить за конечное число шагов.

Теорема 1. *Пусть K — конечно порожденная свободная абелева группа, A и B собственные подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа G является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для ограничения ψ линейного отображения φ_L на подпространство $L(D)$ выполняются условия:*

(i) все коэффициенты характеристического многочлена оператора ψ являются целыми числами;

(ii) модуль определителя оператора ψ равен единице.

Учитывая, что $L(D)$ эффективно определяется по заданным A, B и φ, теорема 1 дает алгоритм для проверки финитной аппроксимируемости HNN-расширения свободной абелевой группы конечного ранга.

Нам потребуется одна простая лемма из линейной алгебры.

Лемма. *Пусть L — конечномерное линейное пространство над полем рациональных чисел. Линейный оператор пространства L имеет в подходящем базисе целочисленную матрицу в том и только том случае, когда все коэффициенты его характеристического многочлена являются целыми числами.*

Доказательство. Достаточно разложить L в прямую сумму циклических подпространств. Как хорошо известно, в каждом таком подпространстве можно выбрать базис таким образом, что матрица ограничения оператора на это подпространство будет сопровождающей для характеристического многочлена оператора на данном подпространстве. Но этот нормализованный многочлен является делителем нормализованного многочлена с целыми коэффициентами и потому сам имеет целые коэффициенты.

Доказательство теоремы 1. Пусть группа G финитно аппроксимируема, тогда найдется подгруппа конечного индекса H группы D такая, что $H\varphi = H$. Конечность индекса подгруппы H в группе D влечет совпадение $L(H)$ и $L(D)$. Выберем в подгруппе H какой-нибудь базис и рассмотрим матрицу ограничения φ на подгруппу H, записанную в этом базисе. Эта матрица является целочисленной и ее определитель обратим в кольце целых чисел, так что оба условия из теоремы 1 выполняются очевидным образом.

Обратно, пусть для оператора ψ выполнены (i) и (ii). По предыдущей лемме найдется базис $d_1, \dots, d_r$ пространства $L(D)$, в котором матрица оператора ψ является целочисленной. Как видно из построения $L(D)$, оно содержится в $L(A)$, следовательно, элементы базиса $L(D)$ являются рациональными линейными комбинациями элементов базиса подгруппы A. Поэтому найдется такое натуральное N, что элементы $Nd_1, \dots, Nd_r$ лежат в подгруппе A. Но как легко видеть, матрица оператора ψ в новом базисе $L(D)$ останется прежней. Обозначим через H подгруппу группы A, порожденную элементами $Nd_1, \dots Nd_r$. Из предыдущих рассуждений следует, что имеет место включение $H\varphi \subseteq H$. Условие (ii) означает, что на самом деле $H\varphi = H$. Для завершения доказательства остается заметить, что $I(H) = L(H) \cap K = L(D) \cap K = I(D) = D$, поэтому H является подгруппой конечного индекса в группе D.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда K — произвольная конечно порожденная абелева группа. Обозначим через T периодическую часть группы K, то есть подгруппу группы K, состоящую из всех элементов конечного порядка. Как легко проверить, имеет место равенство $(T \cap A)\varphi = T \cap B$, поэтому φ индуцирует естественным образом изоморфизм $\varphi^* : A/A \cap T \to B/B \cap T$. Пусть φ_T обозначает композицию естественных изоморфизмов $AT/T \to A/A \cap T \to B/B \cap T \to BT/T$, так что $(aT)\varphi_T = (a\varphi)T$. Тогда мы можем определить HNN-расширение $G_T =< t_T, K/T; t_T^{-1}(AT/T)t_T = BT/T, \varphi_T >$ и "естественный" эпиморфизм $\pi_T : G \to G_T$ где $t\pi_T = t_T$ и $k\pi_T = kT$ для всех $k \in K$.

Теорема 2. *Пусть K — конечно порожденная абелева группа, A и B собственные подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Тогда*

(i) если $AT \neq K \neq BT$, то группа G ф.а. тогда и только тогда,

когда G_T ф.а.;

(ii) если $AT \neq K = BT$, то группа G не является ф.а.;

(iii) если $AT = K \neq BT$, то группа G не является ф.а.;

(iv) если $AT = K = BT$, то группа G ф.а.

Заметим, что фактор-группа K/T является свободной абелевой группой. Поэтому вместе теоремы 1 и 2 дают алгоритм для распознавания финитной аппроксимируемости HNN-расширения произвольной конечно порожденной абелевой группы.

Доказательство теоремы 2. (i) Обозначим через θ_T естественный эпиморфизм K на K/T. Пусть $D = \{x \in K$; для каждого целого ν существует натуральное $\lambda = \lambda(\nu)$ такое, что $t^{-\nu}x^{\lambda}t^{\nu} \in K\}$. Пусть также $D_T = \{xT \in K/T$; для каждого целого ν существует натуральное $\lambda = \lambda(\nu)$ такое, что $t_T^{-\nu}(xT)^{\lambda}t_T^{\nu} \in K/T\}$. Прежде всего покажем, что $D{=}D_T\theta^{-1}$. Действительно, рассмотрим произвольный $x \in D$ и покажем, что $xT \in D_T$. Пусть ν — целое число. По определению D найдется натуральное $\lambda = \lambda(\nu)$ такое, что $t^{-\nu}x^{\lambda}t^{\nu} \in K$. Но тогда $t_T^{-\nu}(xT)^{\lambda}t_T^{\nu} = (t^{-\nu}x^{\lambda}t^{\nu})T \in K/T$. Обратно, пусть $xT \in D_T$. Будем считать, что ν пробегает неотрицательные целые числа, и докажем индукцией по ν, что для каждого неотрицательного целого ν найдется натуральное $\lambda = \lambda(\nu)$ такое, что $t^{-\nu}x^{\lambda}t^{\nu} \in K$. При $\nu = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\nu > 0$, тогда по предположению индукции для некоторого $\lambda(\nu-1)$ $h = t^{-\nu+1}x^{\lambda(\nu-1)}t^{\nu-1}$ лежит в K. При этом $t_T^{-\nu+1}(xT)^{\lambda(\nu-1)}t_T^{\nu-1} = hT$. Так как $xT \in D_T$, то найдется натуральное β такое, что $t_T^{-1}(hT)^{\beta}t_T \in K/T$. Это означает, что $h^{\beta} = ak$, где $a \in A$, $k \in T$. Поэтому $h^{\beta|T|} = a^{|T|} \in A$, где $|T|$ — порядок подгруппы T. Таким образом, получаем $t^{-\nu}x^{\lambda(\nu-1)\beta|T|}t^{\nu} = t^{-1}h^{\beta|T|}t \in K$, то есть в качестве $\lambda(\nu)$ можно взять $\lambda(\nu-1)\beta|T|$. Рассуждение для отрицательных ν проводится аналогично.

Далее, пусть группа G финитно аппроксимируема. Это означает, что найдется подгруппа H конечного индекса группы D такая, что $H\varphi = H$. Рассмотрим подгруппу $H_T = H\theta_T$ группы D_T. Имеем $[D_T : H_T] = [D : HT] \leq [D : H] < \infty$. Кроме того, $H_T\varphi_T = \{(hT)\varphi_T; h \in H\} = \{(h\varphi)T; h \in H\} = H_T$. Таким образом, H_T — подгруппа конечного индекса группы D_T такая, что $H_T\varphi_T = H_T$, и, следовательно, группа G_T финитно аппроксимируема.

Обратно, пусть группа G_T финитно аппроксимируема. Это означает, что найдется подгруппа H_T конечного индекса группы D_T такая, что $H_T\varphi_T = H_T$. Обозначим $U = H_T\theta_T^{-1}$. Так как $H_T \leq AT/T$ и $H_T \leq BT/T$, то $U \leq AT$ и $U \leq BT$, поэтому $U^{|T|} \leq A^{|T|} \leq A$ и аналогично $U \leq B$. При этом $U^{|T|}\theta_T = H_T^{|T|}$ и $H_T^{|T|}\varphi_T = H_T^{|T|}$. Далее, $U^{|T|}\varphi \leq U^{|T|}T$ и $U^{|T|}\varphi^{-1} \leq U^{|T|}T$, поэтому $U^{|T|^2}\varphi = U^{|T|^2}$. Легко видеть, что подгруппа $H = U^{|T|^2}$ имеет конечный индекс в D, причем $H\varphi = H$, и тем самым группа G финитно аппроксимируема.

В случаях (ii), (iii) и (iv) подгруппы A и B имеют конечные индексы в K, поэтому $D = K$ и G ф.а. тогда и только тогда, когда найдется подгруппа H конечного индекса группы K такая, что $H\varphi = H$. Если такая подгруппа H существует, то необходимо $[K : A] = [K : B]$. Но в случаях (ii) и (iii) индексы подгрупп A и B в группе K различны. В случае (iv) в качестве H можно взять подгруппу $K^{|T|} = A^{|T|} = B^{|T|}$.

Список использованной литературы

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М., 1980. 448 с.
2. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D. A* characterization of residually finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50. P. 495 – 501.