Научные труды ИвГУ. Математика. 2000. Выпуск 3

УДК 512.543

М. М. Недзельский

КРИТЕРИЙ ХОПФОВОСТИ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Найден критерий хопфовости *HNN*-расширения произвольной конечно порожденной абелевой группы

1. Введение.

Пусть K — некоторая группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа

$$G =< K, t;\ t^{-1}At = B, \varphi >,$$

порождаемая группой K и элементом t и определяемая соотношениями группы K и соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$ $(a \in A)$, называется HNN-расширением группы K с проходной буквой t относительно связанных подгрупп A и B и изоморфизма φ [1].

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента G существует гомоморфизм группы G в подходящую конечную группу, при котором образ данного элемента отличен от единицы.

Напомним также, что группа G называется хопфовой, если она не изоморфна никакой своей истинной фактор-группе. Легко видеть, что группа G является нехопфовой тогда и только тогда, когда она обладает сюрьективным эндоморфизмом с нетривиальным ядром.

Известная теорема А. И. Мальцева утверждает что произвольная конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.

В работе [5] были найдены необходимые и достаточные условия для финитной аппроксимируемости HNN-расширения произвольной конечно порожденной абелевой группы. В ряде работ исследовались условия хопфовости HNN-расширений. В частности, в работе [3] были даны достаточные условия для нехопфовости HNN-расширения произвольной группы с абелевыми связанными подгруппами. А именно, была доказана теорема:

Пусть K — некоторая группа, A и B — абелевы подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Предположим, что существует эндоморфизм ϑ группы K, обладающий следующими свойствами:

1) подгруппы A и B допустимы относительно ϑ, т. е. $A\vartheta \subseteq A, B\vartheta \subseteq B$;

2) ограничение ϑ на подгруппу A перестановочно с изоморфизмом φ, т. е. для любого $a \in Aa(\vartheta\varphi) = a(\varphi\vartheta)$;

3) группа K порождается подгруппами $K\vartheta$, $(K\vartheta \cap A)\varphi$, и $(K\vartheta \cap B)\varphi^{-1}$;

4) существуют элементы $f, g \in K$ такие, что $f\vartheta \in A$ и $f \notin A$, $g\vartheta \in B$ и $g \notin B$.

Тогда группа $G =< K, t;\ t^{-1}At = B, \varphi >$ нехопфова.

Основной результат данной работы (см. раздел 3) утверждает, что в случае, когда группа K конечно порожденная абелева, то с некоторым ослаблением требования 3 указанные условия являются и необходимыми для нехопфовости группы G. Следует отметить, что для случая, когда K является свободной абелевой группой, соответствующий критерий был найден в работе [6]. При этом, в том случае, когда подгруппы A и B имеют конечный индекс в группе K, формулировка из [6] фактически совпадает с нашей. В общем же случае критерий дан в других терминах. Кроме того, доказательство, приводимое здесь, даже при отсутствии кручения в группе K является технически более простым и естественным.

В разделе 2 данной работы приводятся необходимые сведения о строении абелевых подгрупп HNN-расширений; в разделе 3 – формулировки всех основных утверждений, приводящих к основному результату работы. Некоторые ключевые утверждения приводятся без доказательств. Полный вариант работы будет опубликован в другом месте.

2. Предварительные замечания.

Пусть K — произвольная группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть также $G =< K, t; t^{-1}at = a\varphi,\ a \in A >$ есть HNN-расширение группы K со связанными подгруппами A и B относительно изоморфизма φ.

Все термины, связанные с конструкцией HNN-расширения, согласованы с [1]. $|g|$ будет обозначать длину элемента $g \in G$, т. е. длину его неприводимой записи. Будем говорить также, что произведение gh элементов g и h группы G приведено (или несократимо), если g и h приведены и в произведении gh t-редукции невозможны.

Описание абелевых подгрупп произвольного HNN-расширения впервые было дано Д. И. Молдаванским в [2]. А именно, им было доказано, что всякая абелева подгруппа G сопряжена или с подгруппой из K, или с прямым произведением бесконечной циклической группы и некоторой подгруппы из A или B, или является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из A или B. Нам потребуется некоторое уточнение для случая, когда K — абелева группа. Обозначим через K_r подгруппу t^rKt^{-r} группы G. Легко видеть, что при $r \geq 1$ $K \cap K_r$ состоит из тех и только тех элементов группы K, для каждого из которых $g\varphi^i$ определен при $i = 0, \dots, r$, то есть

$$K \cap K_r = \{g \in K; g\varphi^i \in A \text{ при } i = 0, \dots, r-1\}.$$

Аналогично при $r \geq 1$

$$K \cap K_{-r} = \{g \in K; g\varphi^{-i} \in B \text{ при } i = 0, \dots, r-1\}.$$

Пусть $H^+ = \bigcap_{r\geq 0} K_r$, $H^- = \bigcap_{r\leq 0} K_r$, $H^* = H^- \cap H^+$. Тогда H^* - максимальная подгруппа K, такая, что $H^*\varphi = H^*$. Если группа K абелева, то H^* — максимальный среди нормальных делителей группы G, содержащихся в K.

Положим для целого p

$$C_p = \{g \in K; g\varphi^p = g\}.$$

Очевидно, что $C_p = C_{-p}$ и при p, отличном от нуля, C_p будет нормальным делителем в G и, следовательно, $C_p \subseteq H^*$.

Определим также две функции на элементах G. Пусть

$$g = g_0 t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_n} g_n$$

— приведенная запись элемента $g \in G$. Обозначим $s_i = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда по определению $\underline{s}(g) = \min\{s_i\}$, $\bar{s}(g) = \max\{s_i\}$. Если $g \in K$, то полагаем $\underline{s}(g) = \bar{s}(g) = 0$. Очевидно, что $\underline{s}(g) \leq \sigma_t(g) \leq \bar{s}(g)$, где $\sigma_t(g)$ - сумма показателей по t в приведенной записи элемента g. Легко видеть, что если $\sigma_t(g) = 0$, то $\underline{s}(g^{-1}) = \underline{s}(g)$ и $\bar{s}(g^{-1}) = \bar{s}(g)$.

Лемма 2.1. *Пусть группа K абелева, $g \in G$, $h \in K$. Тогда $g^{-1}hg \in K$ тогда и только тогда, когда $h \in K \cap K_{\underline{s}(g)} \cap K_{\bar{s}(g)}$. При этом, если $g^{-1}hg \in K$, то $g^{-1}hg = h\varphi^{\sigma_t(g)}$.*

Следствие. *Если K абелева, то для любого $g \in G$ имеем $K \cap gKg^{-1} = K \cap K_{\underline{s}(g)} \cap K_{\overline{s}(g)}$.*

Лемма 2.2. *Пусть K абелева, $g \in G, h \in K$. Тогда $gh = hg$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*
1) $\sigma_t(g) = 0,\ h \in K \cap K_{\underline{s}(g)} \cap K_{\overline{s}(g)}$;
2) $\sigma_t(g) = p \neq 0,\ h \in C_p$.

Лемма 2.3. *Пусть $g, h \in G, gh = hg, gh$ несократимо и $|g| = n, |h| = m$, причем $m \geq n$. Тогда для элемента $\bar{h} = hg^{-1}$ имеем $|\bar{h}| = m - n$.*

Следствие. *Если $gh = hg, gh$ несократимо и $|g| = |h|$, то $gh^{-1} \in K$.*

Отметим тот факт, что если $g, h \in G$ и g циклически несократим, то есть $|g^2| = 2|g|$, то или gh, или $g^{-1}h$ несократимо.

Лемма 2.4. *Пусть абелева подгруппа F группы G содержит циклически приведенный элемент g длины $n \geq 1$. Пусть $d = \min\{|h|; h \in F, |h| \geq 1\}$ и $g_1 \in F, |g_1| = d$. Тогда g_1 циклически несократим и для любого элемента $f \in F$ $|f|$ делится на d.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать gg_1 несократимым. Ясно, что $d \leq n$. Далее, из $gg_1 = g_1g$ следует, что $g = \bar{g}g_1$, где $|\bar{g}| = n - d$. Мы видим, что $gg_1 = \bar{g}g_1^2$, причем $|\bar{g}g_1^2| = |gg_1| = n + d$. С другой стороны, $|\bar{g}g_1^2| \leq |\bar{g}| + |g_1^2| = n - d + |g_1^2|$. Отсюда $|g_1^2| = 2d = 2|g_1|$.

Пусть теперь $f \in F, |f| = rd + s, 0 \leq s < d$. Возьмем $h = g_1^r, |h| = rd$. Можем считать fh несократимым, тогда $fh^{-1} \in F$, где $|fh^{-1}| = s < d$ и получаем $s = 0$.

Предложение 2.5. *Пусть $F \leq G$ - абелева подгруппа группы G и существует элемент из F, не содержащийся ни в какой сопряженной с K подгруппе. Тогда F сопряжена с подгруппой вида $L \times V$, где $V = (v), v \in G \backslash K, L \subseteq A$ или $L \subseteq B$, причем v циклически несократим. Если K абелева, то имеет место один из случаев:*
1) $\sigma_t(v) = 0$, $L \subseteq K \cap K_{\underline{s}(v)} \cap K_{\overline{s}(v)}$;
2) $\sigma_t(v) = p \neq 0,\ L \subseteq C_p$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в F есть циклически приведенный элемент ненулевой длины. Пусть $d = \min\{|h|; h \in F, |h| \geq 1\}$ и $v \in F$, $|v| = d$. Тогда v циклически несократим и для любого элемента $f \in F$ $|f|$ делится на d. Обозначим через $L = F \cap K$. Пусть $g \in F, |g| = ds$, тогда $|v^s| = ds$ и так как $gv^s = v^sg$, то $gv^{-s} \in F \cap K = L$. Следовательно, $F = LV$, причем $L \cap V = 1$ (v циклически несократим) и поэтому $F = L \times V$. Так как g имеет вид $g = g_0t^{\epsilon_1} \ldots t^{\epsilon_n}$, и все элементы из L перестановочны с g, то или $L \subseteq A$ или $L \subseteq B$. Если K абелева, то соответствующие условия немедленно следуют из леммы 2.3.

Лемма 2.6. *Пусть* $g = u^{-1}k_1u = v^{-1}k_2v$ *и* $|g| = 2|u| = 2|v|$. *Тогда* $v = xu$, *где* $x \in K$.

Следствие. *Пусть* $g = u^{-1}k_1u = v^{-1}k_2v$ *и* $|g| = 2|u|, |v| \geq |u|$. *Тогда* $v = \bar{v}u, |\bar{v}| = |v| - |u|$ *и* $\bar{v}^{-1}k_2\bar{v} \in K$.

Циклически приведенной длиной элемента $g \in G$ будем называть длину любого сопряженного с g циклически приведенного элемента. Согласно лемме Коллинза она определяется однозначно. Будем обозначать циклически приведенную длину $|g|_c$. Понятно, что элемент имеет циклически приведенную длину, равную нулю, тогда и только тогда, когда он лежит в некоторой сопряженной с K подгруппе $\mathbf{t}$. Кроме того, элемент $g \in G$ циклически несократим тогда и только тогда, когда $|g|_c = |g|$.

Пусть теперь $g \in G$, $|g|_c = 0$. Тогда найдется $u \in G$, такой, что $g = u^{-1}ku$, $k \in K$ и $|g| = 2|u|$. Обозначим $S(g) = u^{-1}Ku$. Из Леммы 2.6 следует, что $S(g)$ определяется однозначно.

Заметим, что если $h \in S(g)$ и $|g| = |h|$, то $S(g) = S(h)$.

Лемма 2.7. *Пусть* $g \in G, h \in K, |g|_c = 0, gh = hg$. *Тогда* $h \in S(g)$.

<u>Доказательство.</u> Если $S(g) = K$, то утверждение очевидно. Пусть $S(g) = u^{-1}Ku, |u| \geq 1$. Тогда $g = u^{-1}k_1u, k_1 \in K$, и

$$g^{-1}hg = u^{-1}k_1^{-1}uhu^{-1}k_1u = h.$$

Легко видеть, что $uhu^{-1} \in K$, то есть $h \in u^{-1}Ku = S(g)$.

Следствие 1. *Пусть* $|g|_c = |h|_c = 0, |g| \geq |h|, gh = hg$. *Тогда* $h \in S(g)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $g = u^{-1}k_1u, h = v^{-1}k_2v, |g| = 2|u|, |h| = 2|v|$. Если $vu^{-1} \in K$, то $S(g) = S(h)$. Пусть $vu^{-1} \notin$K. Тогда $vu^{-1}k_1uv^{-1}$ и k_2 перестановочны и $k_2 \in vu^{-1}Kuv^{-1}$, то есть $h = v^{-1}k_2v \in S(g)$.

Следствие 2. *Если* $|g|_c = |h|_c = 0, |g| = |h|, gh = hg$, *то* $S(g) = S(h)$.

Следствие 3. *Если* $|g|_c = |h|_c = 0, gh = hg$, *то или* $g, h \in S(g)$, *или* $g, h \in S(h)$.

Следствие 4. *Пусть* $|g|_c = |h|_c = 0, gh = hg$. *Тогда* $|gh| \leq \max(|g|, |h|)$.

Предложение 2.8. *Пусть F — абелева подгруппа группы G и для любого $g \in F$ $|g|_c = 0$. Если длины элементов из F ограничены в совокупности, то F содержится в некоторой сопряженной с K подгруппе. Если длины неограничены, то F есть объединение цепи своих истинных подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из A или из B.*

Доказательство. Обозначим через $F_r = \{g \in F; |g| \leq r\}$. F_r является подгруппой в G и $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots\ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$, причем $F = \bigcup_{r \geq 0} F_r$. Пусть $g_r \in F_r, |g_r| = \max\{|g|; g \in F_r\}$. Тогда $F_r \subseteq S(g_r)$.

Следствие. *Конечно порожденная абелева подгруппа группы G, состоящая из элементов нулевой циклически приведенной длины, содержится в некоторой сопряженной с K подгруппе.*

Предложение 2.9. *Пусть K — конечно порожденная абелева группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть также $G =< K, t; t^{-1}at = a\varphi, a \in A >$ есть HNN-расширение группы K со связанными подгруппами A и B относительно изоморфизма φ. Тогда для любого эндоморфизма $\vartheta \in \operatorname{End} G$ группы G найдется внутренний автоморфизм $\rho \in InnG$, такой, что $F = K\vartheta\rho$ удовлетворяет в точности одному из следующих условий:*

1) $F \subseteq K$;

2) $F = L \times V$, где $V = (v), \sigma_t(v) = 0$ и $L \subseteq K \cap K_{\underline{s}(v)} \cap K_{\bar{s}(v)}$;

3) $F = L \times V$, где $V = (v), \sigma_t(v) = p \neq 0$ и $L \subseteq C_p$;

причем во втором и третьем случаях v циклически несократим.

Доказательство. Если все элементы $K\vartheta$ имеют нулевую циклически приведенную длину, то по следствию из предложения 2.8 $K\vartheta \subseteq gKg^{-1}$ для некоторого $g \in G$ и осталось взять $\rho = \hat{g}$. Если в $K\vartheta$ найдется элемент, не лежащий ни в какой сопряженной с K подгруппе, то по предложению 2.5$K\vartheta$ сопряжена с подгруппой, удовлетворяющей одному из условий 2 или 3. Очевидно, что каждое из условий исключает остальные.

3. Основной результат.

Пусть K — конечно порожденная абелева группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Пусть также $G =< K, t; t^{-1}at = a\varphi, a \in A >$ есть HNN-расширение группы K со связанными подгруппами A и B относительно изоморфизма φ. Положим

$$\operatorname{Sur} G = \{\vartheta \in \operatorname{End} G;\ G\vartheta = G\}.$$

Подгруппа F группы K называется (A, B, φ)-совместимой, если $(F \cap A)\varphi = F \cap B$. Пересечение всех (A, B, φ)-совместимых подгрупп в K, содержащих какую-либо подгруппу H группы K, есть (A, B, φ)-совместимая подгруппа, которая называется (A, B, φ)-замыканием подгруппы H в группе K и обозначается через $\widehat{H}$. Изолятор подгруппы H в группе K будет обозначаться $I(H)$.

Далее $\operatorname{rank} G$ для произвольной группы G будет обозначать наименьшее возможное число порождающих группы G.

Предложение 3.1. *Пусть* $\operatorname{rank}(K/AB) \geq 2$. *Тогда для любого* $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$ $K\vartheta^* \subseteq gKg^{-1}$ *для подходящего* $g \in G$.

Доказательство. Пусть $H = AB$. Легко видеть, что H — (A, B, φ)-совместимая подгруппа в K и φ очевидным образом индуцирует изоморфизм $\varphi_H : AH/H \to BH/H$. При этом $AH/H = BH/H = 1$. Пусть

$$G_H =< K/H, \tau; \tau^{-1}aH\tau = (aH)\varphi_H, a \in A > .$$

Рассмотрим отображение $k \mapsto kH, t \mapsto \tau$. Оно продолжается до гомоморфизма π G на G_H. При этом $G_H = K/AB* < \tau >$ и $\operatorname{rank} G_H \geq 3$. С другой стороны, $G = (K\vartheta^*, t\vartheta^*)$. Мы видим, что $K\vartheta^*$ есть абелева подгруппа G. Если бы имело место равенство $K\vartheta^* = L \times V$, где $L \subseteq A$ или $L \subseteq B$, то $G = (A, v, t\vartheta^*)$ или $G = (B, v, t\vartheta^*)$, поэтому $G_H = (v\pi, t\vartheta^*\pi)$ и $rank G_H \leq 2$. Следовательно, $K\vartheta^*$ содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с K.

Лемма 3.2. *Пусть* $g, h \in G, |g|, |h| \geq 1$ *и* $\sigma_t(g) \neq 0$ *или* $\sigma_t(h) \neq 0$. *Пусть также* $|gh| = |g| + |h|$. *Тогда не существует элемента* $k \in K$ *такого, что* $gh = kh^{-1}g$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G, K\vartheta^* = L \times U, U = (u), |u^2| = 2|u|$, $|u| \geq 1$. *Получаем для любого* $k \in K$ $k\vartheta^* = l_k u^{n_k}$. *Тогда* $\forall a \in A$ $n_a = n_{a\varphi}$.

Предложение 3.4. *Если существует* $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$*, такой, что* $K\vartheta^*$ *не содержится в* K^G *(нормальном замыкании группы* K *в группе* G*), то группа* G *финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank}(K/AB) \geq 2$, то согласно предложению 3.1 для любого $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$ $K\vartheta^* \subseteq K^G$. Пусть $\operatorname{rank}(K/AB) \leq 1$. Покажем сначала, что если $A\vartheta^*$ или $B\vartheta^*$ не содержится в K^G, то необходимо $K = A = B$. Согласно предложению 2.9 без ограничения общности мы можем считать $K\vartheta^* = L \times U$, где $U = (u), \sigma_t(u) = p \neq 0$ и u циклически несократим. При этом $L \subseteq C_p \subseteq H^*$. Пусть $a \in A$ такой, что $a\vartheta^* = l_a u^{n_a}$

и $n_a \neq 0$. Обозначим $v = t\vartheta^*$. Соотношения t^{-1}at$= a\varphi$ переходят в соотношения $v^{-1}l_a u^{n_a} v = l_{a\varphi} u^{n_{a\varphi}}$, причем $n_a = n_{a\varphi}$ вследствие леммы 3.3. Получаем $G = (K, t) = G\vartheta^* = (K\vartheta^*, t\vartheta^*) = (L, u, v) = (H^*, u, v)$. H^* — (A, B, φ) — совместимая подгруппа в группе K, поэтому мы можем рассматривать гомоморфизм π группы G на группу $\overline{G}$:

$$\overline{G} =< K/H^*, \tau; \tau^{-1}aH^*\tau = (aH^*)\varphi_H, a \in A > .$$

Легко видеть, что $\overline{G} = (H^*\pi, u\pi, v\pi) = (u\pi, v\pi)$, причем $u^{n_a}v = vu^{n_a}$, и $\overline{G}$ должна быть циклической. Это возможно только при $K = H^* = A = B$.

Пусть $A\vartheta^* \subseteq K$ и $B\vartheta^* \subseteq K$. Если $K = I(AB)$, то $K\vartheta^* \subseteq K$ и $K\vartheta^* \subseteq K^G$. Осталось рассмотреть случай $K = AB \times X$, где X — бесконечная циклическая группа. Без ограничения общности $x\vartheta^* = u$ и мы получаем $G = (AB, x, t) = G\vartheta^* = (H^*, u, v)$. Для группы $\overline{G}$ имеем

$$\overline{G} = (AB/H^*, x\pi, t\pi) = (u\pi, v\pi).$$

Легко видеть, что $\overline{G}$ отображается на свободную группу ранга 2 и сама поэтому будет свободной. Необходимо $AB = H^* = A = B$ и группа G финитно аппроксимируема.

Следствие. *Пусть $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, $Ker\vartheta^* \neq 1$. Тогда $K\vartheta^* \subseteq K^G$.*

Лемма 3.5. *Пусть $g, h \in G, |g|, |h| \geq 1, \sigma_t(g) \neq 0, \sigma_t(h) = 0$. Пусть также $|gh| = |g| + |h|$. Тогда не существует элемента $k \in K$ такого, что $gh = khg$.*

Лемма 3.6. *Если $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, $K\vartheta^* \subseteq K^G$, то $AB\vartheta^* \subseteq gKg^{-1}$ для подходящего $g \in G$.*

Следствие. *Если $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, $K\vartheta^* \subseteq K^G$, и $K = I(AB)$, то $K\vartheta^* \subseteq gKg^{-1}$ для подходящего $g \in G$.*

Лемма 3.7. *Если $K/AB \ncong Z$, то для любого $\vartheta^* \in$Sur G, такого, что $Ker\vartheta^* \neq 1$, необходимо $K\vartheta^* \subseteq gKg^{-1}$ для подходящего $g \in G$.*

Лемма 3.8. *Пусть F — подгруппа группы $K, g \in G, \sigma_t(g) \neq 0$. Тогда $(F, g) \cap K \subseteq \widehat{F}$.*

Предложение 3.9. *Пусть $\vartheta^* \in \operatorname{End} G$, $K\vartheta^* \subseteq K, \sigma_t(t\vartheta^*) = 1$. Тогда $\vartheta = \vartheta^*|_K \in \operatorname{End} K$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) подгруппы A и B допустимы относительно ϑ, т. е. $A\vartheta \subseteq A$ и $B\vartheta \subseteq B$;

2) ограничение ϑ на подгруппу A перестановочно с изоморфизмом φ, т. е. для любого $a \in A$ $a(\vartheta\varphi) = a(\varphi\vartheta)$;

Если $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, то для ϑ имеет место также
3) (A, B, φ) — замыкание $K\vartheta$ в K совпадает с K, т. е. $\widehat{K\vartheta} = K$.

Доказательство. Обозначим $v = t\vartheta^*$. Соотношение t^{-1}at= $a\varphi$ переходит в соотношение $v^{-1}a\vartheta v = a\varphi\vartheta$. По лемме 2.1 $a\vartheta \in K \cap K_{\underline{s}(v)} \cap K_{\overline{s}(v)}$, при этом $v^{-1}a\vartheta v = a\vartheta\varphi$. Так как $\sigma_t(v) = 1$, то $\bar{s}(v) \geq 1$ и $a\vartheta \in A$. Но a — произвольный элемент из A, и $A\vartheta \subseteq A$. Аналогично $B\vartheta \subseteq B$. Если $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, то необходимо $(K\vartheta, v) \cap K = K$ и поэтому $\widehat{K\vartheta} = K$.

Заметим, что если $\vartheta \in \operatorname{End} K$ удовлетворяет условиям 1)-3) предложения, то легко видеть, что отображение $k \mapsto k\vartheta, t \mapsto t$ продолжаемо до эндоморфизма группы G, причем соответствующий энодоморфизм будет сюрьективным.

Лемма 3.10. *Пусть K — абелева группа, $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, причем ϑ^* — тождественный на K. Тогда $Ker\vartheta^* = 1$, т. е. $\vartheta^* \in \operatorname{Aut} G$.*

Лемма 3.11. *Пусть $\vartheta^* \in \operatorname{Aut} G$, $K\vartheta^* \subseteq K$, $A \neq K, B \neq K$. Тогда $K\vartheta^* = K$.*

Предложение 3.12. *Пусть $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, $K\vartheta^* \subseteq K$, $A \neq K, B \neq K$. Тогда $Ker\vartheta^* \neq 1 \Leftrightarrow K\vartheta^* \neq K$.*

Доказательство. Без ограничения общности $\sigma_t(t\vartheta^*) = 1$. Если $K\vartheta^* = K$, то отображение τ, для которого $t\tau = t, \tau|_K = (\vartheta^*|_K)^{-1}$, продолжаемо до сюрьективного эндоморфизма $\tau \in \operatorname{Sur} G$, при этом ограничение $\vartheta^*\tau$ на K является тождественным отображением. По лемме 3.10 $Ker\vartheta^* = 1$.

Лемма 3.13. *Пусть $K = AB \times Z$, где Z — бесконечная циклическая группа. Пусть также $\vartheta^* \in \operatorname{Sur} G$, $AB\vartheta^* \subseteq K$, $\sigma_t(t\vartheta^*) = 1$. Тогда для $\vartheta = \vartheta^*|_{AB}$ выполняются условия:*
1) $A\vartheta \subseteq A$, $B\vartheta \subseteq B$;
2) $\forall a \in A$ $a(\vartheta\varphi) = a(\varphi\vartheta)$;
3) (A, B, φ) — замыкание $AB\vartheta$ в AB совпадает с AB;

Лемма 3.14. *При тех же условиях, что и в лемме 3.11, если $Ker\vartheta^* \neq 1$, то $AB\vartheta \neq AB$.*

Теорема. *Пусть K - конечно порожденная абелева группа, A и B — подгруппы группы K и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, причем $A \neq K, B \neq K$. Пусть также $G =< K, t; t^{-1}at = a\varphi, a \in A >$ есть HNN-расширение группы K со связанными подгруппами A и B относительно изоморфизма φ. Тогда группа G нехопфова тогда и только тогда, когда существует эндоморфизм ϑ группы K, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) подгруппы A *и* B *допустимы относительно* ϑ*, т. е.* $A\vartheta \subseteq A$ *и* $B\vartheta \subseteq B$*;*

2) ограничение ϑ *на подгруппу* A *перестановочно с изоморфизмом* φ*, т. е. для любого* $a \in A$ $a(\vartheta\varphi) = a(\varphi\vartheta)$*;*

3) (A, B, φ) *— замыкание* $K\vartheta$ *в* K *совпадает с* K*, т. е.* $\widehat{K\vartheta} = K$*.*

4) $K\vartheta \neq K$*.*

Достаточность. Легко видеть, что отображение $k \mapsto k\vartheta, t \mapsto t$ продолжаемо до эндоморфизма группы G. Сюрьективность этого эндоморфизма следует из условия 3 и предложения 3.9. Нетривиальность ядра следует из условия 4 и предложения 3.11.

Необходимость. Пусть $\vartheta^* \in \mathrm{Sur}\, G$, $Ker\vartheta^* \neq 1$. Если $K/AB \not\cong Z$, то по лемме 3.7 без ограничения общности можно считать, что $K\vartheta^* \subseteq K$, $\sigma_t(t\vartheta^*) = 1$. Пусть $\vartheta = \vartheta^*|_K$. Тогда условия 1-3 следуют из предложения 3.9, а условие 4 из предложения 3.11.

Пусть $K = AB \times Z$. Тогда по предложению 3.4 $K\vartheta^* \subseteq K^G$, и по лемме 3.6 можем считать $AB\vartheta^* \subseteq K$. Без ограничения общности $\sigma_t(t\vartheta^*) = 1$. Определим $\vartheta \in \mathrm{End}\, K$ следующим образом: $\vartheta|_{AB} = \vartheta^*|_{AB}$, $z\vartheta = z$. Используя леммы 3.13 и 3.14, легко убедиться в выполнении всех условий.

Список использованной литературы

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. 1980. 445 с.
2. *Молдаванский Д. И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. т. VIII, № 6. С. 1370 – 1384.
3. *Недзельский М. М.* О хопфовости *HNN*-расширений групп. Алгебраические системы. Иваново, 1991. С. 61 – 63.
4. Нерешенные проблемы теории групп. Новосибирск, 1992.
5. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* A characterization of residually finitely generated abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50. P. 495 – 501.
6. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Hopficity of certain HNN-extensions // Communs of Algebra. 1992. Vol 20, № 5. P. 1511 – 1533.
7. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residuall finiteness and hopficity of certain HNN-extensions // Arch. Math. 1986. Vol. 47. P. 1 – 5.