ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 1 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 512.543

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. В. Розов (г. Иваново)

Аннотация

Получен критерий почти аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами.

1 Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Примером таких ограничений может служить конечность подгрупп H и K, их цикличность, конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B, а также их нормальность в группах A и B соответственно. Г. Баумслаг в [1] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенные подгруппы H и K конечны, то группа G финитно аппроксимируема. В той же работе был получен следующий результат.

Теорема 1. *Свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Приведенный ниже пример показывает, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для такого свободного произведения ранее нами был получен следующий результат.

Теорема 2. *([2]). Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K,* *не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K финитно аппроксимируемы.*

Условие финитной аппроксимируемости фактор-групп A/H и B/K из теоремы 2 равносильно тому, что подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. Хорошо известно, что полициклические группы финитно аппроксимируемы и в них все подгруппы финитно отделимы. Поэтому доказанная Баумслагом теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 2.

Заметим теперь, что свободное произведение G двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами H и K не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B абелевы. Действительно, существуют финитно аппроксимируемые абелевы группы конечного ранга, в которых не все подгруппы финитно отделимы. Примером такого рода может служить аддитивная группа Q_p p-ичных дробей, где p — простое число. В этой группе подгруппа Z целых чисел не является финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух экземпляров группы Q_p с объединенной подгруппой Z не будет финитно аппроксимируемой группой. В [3, п. 11.1.4] построен пример конечно порожденной финитно аппроксимируемой разрешимой группы конечного ранга, в которой существует нормальная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой. Поэтому свободное произведение финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B конечно порождены.

Заметим еще, что теорема 2 не может быть распространена с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, поскольку даже свободное произведение двух конечных p-групп с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Для свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами нами был получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы.*

В работе [4] было доказано, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. В частности, этим свойством обладает любая конечно порожденная нильпотентная группа. Поэтому в качестве следствия из теоремы 3 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p.*

Доказательство теоремы 3 приведено ниже. Для полноты изложения будет приведено также и доказательство ранее опубликованной теоремы 2.

2 Вспомогательные утверждения

Пусть $G = (A * B, H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой ($\mathcal{F}_p$-отделимой), если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу (конечную p-группу) такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно, что если подгруппа H нормальна в G, то она финитно отделима ($\mathcal{F}_p$-отделима) в G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H финитно аппроксимируема ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируема).

Лемма 1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группа G финитно аппроксимируема. Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству (и, в частности, если группы A и B разрешимы), то подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Это утверждение доказано в работе [5].

Лемма 2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы.*

Доказательство. Пусть группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Тогда в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа P конечного индекса. Введем следующие обозначения: $A_1 = A \cap P$, $H_1 = H \cap P$. Заметим, что подгруппа H_1 нормальна в группе A_1, и что группа $A_1/H_1 \cong A_1H/H$ вложима в группу A/H. Так как $[A/H : A_1H/H] = [A : A_1H] \leq [A : A_1] \leq [G : P] < \infty$ и

$A_1/H_1 \cong A_1H/H$, то для доказательства почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы A/H достаточно доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы A_1/H_1 или, что равносильно, $\mathcal{F}_p$-отделимость подгруппы H_1 в группе A_1.

Предположим противное: существует элемент a группы A_1, не принадлежащий H_1, и такой, что для любого гомоморфизма ψ группы A_1 на конечную p-группу $a\psi \in H_1\psi$. Так как группа B нильпотентна, то существует такое натуральное n, что для произвольного простого коммутатора веса n, составленного из элементов группы B, выполняется равенство

$$[x_1, [x_2, [\ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]]] = 1. \tag{1}$$

Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий H. Рассмотрим в группе G простой коммутатор веса n следующего вида: $c = [a, [a, [\ldots, [a, b] \ldots]]]$. Так как $a \in P$ и P — нормальная подгруппа группы G, то $c \in P$. Кроме того, элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 2^n, и поэтому $c \neq 1$. Отсюда и из того, что группа P $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема следует, что в P существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса, не содержащая c.

Пусть $L = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Nx$. Нетрудно понять, что подгруппа L нормальна в группе G и имеет конечный p-индекс в группе P. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/L$. Тогда $A_1\varepsilon = A_1L/L$. Так как $A_1L/L \leq P/L$ и P/L — конечная p-группа, то и A_1L/L — конечная p-группа.

Обозначим через ψ ограничение на подгруппу A_1 гомоморфизма ε. Тогда ψ — гомоморфизм группы A_1 на конечную p-группу A_1L/L. Следовательно, $a\psi \in H_1\psi$, то есть существует элемент $h \in H_1$ такой, что $a\psi = h\psi$ или, что то же самое, $a\varepsilon = h\varepsilon$. Тогда $c\varepsilon = [a\varepsilon, [a\varepsilon, [\ldots, [a\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] = [h\varepsilon, [h\varepsilon, [\ldots, [h\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] = [h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]]\varepsilon$, причем $[h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]] = 1$, так как $h \in B, b \in B$ и в группе B выполняется тождество (1). Следовательно, $c\varepsilon = 1$. Но, с другой стороны, $c \notin N$, и поэтому $c \notin Ker\varepsilon = L$. Получили противоречие. Следовательно, фактор-группа A/H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. То же самое можно сказать и о фактор-группе B/H. Лемма доказана.

Леммы 1 и 2 обеспечивают необходимость в теоремах 2 и 3 соответственно.

Напомним, что элемент a группы G называется полным, если для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными. Следуя Д. Робинсону и Дж. Ленноксу [3], группу G будем называть редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп.

Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована. Для разрешимых групп конечного ранга имеет место и обратное утверждение.

Лемма 3. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Эта лемма, даже в более общем виде, доказана в [3, п. 5.3.2].

Лемма 4. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группы, то группа G финитно аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема).*

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — ее конечная нормальная подгруппа, и фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. Покажем, что G финитно аппроксимируема. Для этого достаточно доказать, что она редуцирована.

Пусть A — полная подгруппа группы G. Тогда и подгруппа AH/H группы G/H является полной. Так как G/H редуцирована по лемме 3, то $AH/H = 1$, и, следовательно, группа A конечна. Отсюда и из того, что подгруппа A полная, следует, что $A = 1$. Таким образом, G — разрешимая редуцированная группа конечного ранга. Поэтому в силу леммы 3 группа G финитно аппроксимируема.

Пусть теперь фактор-группа G/H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Тогда она финитно аппроксимируема и из первой части леммы следует, что группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что подгруппа H конечна следует, что в группе G существует подгруппа F конечного индекса такая, что $F \cap H = 1$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/H$. Очевидно, что его ограничение на подгруппу F инъективно. Поэтому группа F с точностью до изоморфизма является подгруппой в G/H и, следовательно, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что подгруппа F имеет конечный индекс в G следует, что и группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. И пусть L — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в группе H и имеющая в ней конечный индекс. Если фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы), то фактор-группа G/L финитно аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема).*

Доказательство. Пусть фактор-группа A/H финитно аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема). Так как группа A/L с точностью до изоморфизма является расширением конечной группы H/L с помощью финитно аппроксимируемой (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группы A/H, то по лемме 4 она сама финитно аппроксимируема (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема). То же самое можно сказать и о группе B/L. Таким образом, группа G/L является свободным произведением финитно аппроксимируемых (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп A/L и B/L с конечной объединенной подгруппой H/L. Поэтому финитная аппроксимируемость (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость) группы G/L вытекает из следующего утверждения, доказанного в работах [1] и [6]. Свободное произведение двух финитно аппроксимируемых (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп с конечными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой (почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой) группой. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — группа конечного ранга. Тогда любая нормальная подгруппа H конечного индекса (конечного p-индекса) группы G содержит некоторую характеристическую подгруппу N группы G конечного индекса (конечного p-индекса).*

Доказательство. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы G, индекс которых совпадает с $[G : H]$. Число таких подгрупп конечно (см. [7] и [8]), и поэтому N является искомой подгруппой. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть H — нильпотентная группа, L_0 — ее характеристическая подгруппа конечного индекса и p — простое число. Тогда в группе H существует характеристическая подгруппа L такая, что $L_0 \subseteq L$, индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p.*

Доказательство. По условию леммы H/L_0 — конечная нильпотентная группа. Хорошо известно (см., напр., [9, п. 17.1.4]), что любая конечная нильпотентная группа раскладывается в прямое произведение своих силовских p-подгрупп. Поэтому

$$H/L_0 = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n, \tag{2}$$

где H_i — силовские p_i-подгруппы для каждого $i = 1, \ldots, n$. При этом все p_i — простые попарно различные числа. Если среди p_i нет числа p, то в качестве L, очевидно, можно взять L_0.

В противном случае, пусть, для определенности, H_1 — силовская p-подгруппа. Так как H_1 — подгруппа фактор-группы H/L_0, то в группе H существует подгруппа L такая, что $H_1 = L/L_0$. Очевидно, что L/L_0 характеристична в H/L_0. Отсюда и из того, что L_0 — характеристическая подгруппа группы H, непосредственно следует, что и подгруппа L характеристична в H. Так как $L/L_0 = H_1$ — p-подгруппа группы H/L_0 и $[H : L] = [H/L_0 : L/L_0]$, то в силу разложения (2) следует, что индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Таким образом, L — искомая подгруппа. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K, M и N — нормальные подгруппы групп A и B соответственно. И пусть $(M \cap H)\varphi = N \cap K$. Тогда отображение φ_{MN}, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Пусть*

$$G_{MN} = (A/M * B/N; HM/M = KN/N, \varphi_{MN})$$

— свободное произведение групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$.

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [1]).

Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа. Через $Aut_G(H)$ будем обозначать множество ограничений на подгруппу H всех внутренних автоморфизмов группы G. Иными словами, $Aut_G(H) = \{\widehat{x}|_H : x \in G\}$, где $\widehat{x}$ — внутренний автоморфизм группы G, действующий по правилу: $g\widehat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G.

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

Лемма 9. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. Если группы A и $Aut_G(A)$ являются конечными p-группами, а группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то группа G также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $\theta : B \to Aut_G(A)$ — сопровождающий гомоморфизм, то есть отображение, сопоставляющее каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\widehat{b}$ группы G. И пусть $H = Ker\theta$. Так как $Aut_G(A)$ — конечная p-группа, то H — нормальная подгруппа группы B конечного p-индекса. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. Поэтому H — подгруппа конечного p-индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку содержится в группе B, и нормальна в группе G, поскольку поэлементно перестановочна с группой A и нормальна в группе B.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы H с помощью конечной p-группы G/H. Отсюда следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема (см. [10]). Лемма доказана.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. И если A — подгруппа группы G, то через $[A, G]$ будем обозначать взаимный коммутант A и G.

Лемма 10. *Если A — конечная p-группа, то группа Γ_A всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [11, с. 562]).

Лемма 11. . *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть A — конечная p-группа, а группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $[A, G] \subseteq A'A^p$, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как $[A, G] \subseteq A'A^p$, то все автоморфизмы группы $Aut_G(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Поэтому согласно лемме 10 $Aut_G(A)$ является p-группой. Применяя лемму 9, получаем, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Лемма доказана.

3 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2. Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга. Докажем, что группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. Необходимость для этого утверждения обеспечивается леммой 1, поэтому остается доказать достаточность.

Пусть фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Пусть $g \in G$ и $g \neq 1$. Построим гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий g в элемент отличный от единицы.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Фактор-группа $G/H = A/H*B/H$ представляет собой свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп. Следовательно, G/H финитно аппроксимируема (см. [10]). Пусть ε — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H. Тогда $g\varepsilon \neq 1$, и поэтому существует гомоморфизм ρ группы G/H на некоторую конечную группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Гомоморфизм $\varepsilon\rho$ является искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как группа H финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа M конечного индекса, не содержащая g. Отсюда и из конечности ранга группы H в силу леммы 6 следует, что в H существует характеристическая подгруппа L конечного индекса, содержащаяся в M. Подгруппа H, в свою очередь, нормальна в группе G. Поэтому и подгруппа L нормальна в группе G. Используя лемму 5, получаем, что фактор-группа G/L финитно аппроксимируема. Так как gL — неединичный элемент группы G/L, то существует гомоморфизм ρ группы G/L на некоторую конечную группу, переводящий gL в отличный от едининицы элемент. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/L. Тогда гомоморфизм $\varepsilon\rho$ является искомым. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга. Докажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Необходимость для этого утверждения обеспечивается леммой 2, поэтому остается доказать достаточность.

Пусть группы A, B, A/H, B/H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Так как подгруппа H содержится в A, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то есть в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа H_0 конечного индекса. Тогда по лемме 6 в группе H существует характеристическая подгруппа L_0 конечного индекса, содержащаяся в H_0. Заметим, что L_0, являясь подгруппой в H_0, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

По лемме 7 в группе H существует характеристическая подгруппа L, содержащая L_0 и такая, что индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Так как группа L является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы L_0 с помощью конечной p-группы, то она сама $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема (см. [10]). Так как L характеристична в H, и H нормальна в G, то L нормальна в G. По лемме 5 группа G/L почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Поэтому в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа U/L конечного индекса. Таким образом, в группе G мы получаем нормальный ряд $1 \leq L \leq U \leq G$, где G/U — конечная группа, U/L — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа.

Теперь рассмотрим отображение $\psi : G \to AutL/L'L^p$, сопоставляющее каждому элементу x группы G ограничение на подгруппу $L/L'L^p$ внутреннего автоморфизма $\widehat{xL'L^p}$ группы $G/L'L^p$. Таким образом, для каждого элемента $aL'L^p$ из $L/L'L^p$

$$x\psi : aL'L^p \longmapsto (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p = (x^{-1}ax)L'L^p. \tag{3}$$

Очевидно, что ψ — гомоморфизм. Обозначим через V ядро гомоморфизма ψ. Тогда из (3) следует, что для каждого элемента x из V и для каждого элемента a из L

$$aL'L^p = (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p. \tag{4}$$

Заметим, что подгруппа L группы A имеет конечный ранг, и поэтому фактор-группа $L/L'L^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа G/V вложима в группу $AutL/L'L^p$ следует, что V — подгруппа конечного индекса группы G. Так как фактор-группа $L/L'L^p$ абелева, то $L \subseteq V$. Таким образом, в группе G получили нормальный ряд $1 \leq L \leq V \leq G$, где G/V — конечная группа, и для произвольных элементов $x \in V$ и $a \in L$ выполняется равенство (4).

Рассмотрим теперь подгруппу $W = U \cap V$. Очевидно, что W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая L. Покажем, что группа W $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Для этого каждому неединичному элементу a из W сопоставим гомоморфизм группы W на некоторую конечную p-группу, образ a относительно которого отличен от единицы.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin L$. Пусть $\varepsilon : W \to W/L$ — естественный гомоморфизм. Тогда образ aL элемента a относительно ε отличен от единицы. При этом группа W/L $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы U/L. Поэтому существует гомоморфизм θ группы W/L на некоторую конечную p-группу, переводящий aL в элемент, отличный от единицы. Таким образом, гомоморфизм $\varepsilon\theta$ является искомым.

Пусть теперь $a \in L$. Так как группа L имеет конечный ранг и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то по лемме 6 в ней существует характеристическая подгруппа R конечного p-индекса, не содержащая элемент a. Очевидно, что подгруппа R, как и L, нормальна в группе G. Очевидно также, что фактор-группа G/R является свободным произведением подгрупп A/R и B/R с объединенной подгруппой

H/R. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_1 : G \to G/R$ и введем следующие обозначения: $G\psi_1 = G/R = G_1$, $A\psi_1 = A/R = A_1$, $B\psi_1 = B/R = B_1$, $H\psi_1 = H/R = H_1$, $L\psi_1 = L/R = L_1$, $W\psi_1 = W/R = W_1$, $a\psi_1 = aR = a_1$. Тогда $G_1 = (A_1 * B_1, H_1)$. Заметим, что H_1 — конечная нильпотентная группа, $L_1 \subseteq H_1$ и $a_1 \neq 1$.

Так как H_1 — конечная нильпотентная группа, то она раскладывается в прямое произведение $H_1 = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$, где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — силовские подгруппы группы H_1, соответствующие попарно различным простым числам $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (см. [9, п. 17.1.4]). Так как L_1 — p-подгруппа группы H_1 и $L_1 \neq 1$ (поскольку $a_1 \in L_1$ и $a_1 \neq 1$), то одна из подгрупп Q_i является p-группой. Пусть для определенности Q_1 — p-группа. Тогда $L_1 \subseteq Q_1$. Поэтому индекс $[Q_1 : L_1]$ делит индекс $[H_1 : L_1] = [H : L]$ и, следовательно, взаимно прост с p. С другой стороны, индекс $[Q_1 : L_1]$ является степенью числа p, поскольку Q_1 — конечная p-группа. Из последних двух обстоятельств следует, что $[Q_1 : L_1] = 1$, то есть $L_1 = Q_1$. Очевидно, что элемент a_1 не принадлежит подгруппе $Q = Q_2 \times \ldots \times Q_n$. Заметим, что Q является характеристической подгруппой группы H_1, так как все Q_i характеристичны в H_1. Следовательно, подгруппа Q, как и подгруппа H_1, нормальна в G_1. Факторизуя G_1 по Q, получим свободное произведение групп A_1/Q и B_1/Q с объединенной подгруппой H_1/Q.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_2 : G_1 \to G_1/Q$ и введем следующие обозначения: $G_1\psi_2 = G_1/Q = G_2$, $A_1\psi_2 = A_1/Q = A_2$, $B_1\psi_2 = B_1/Q = B_2$, $H_1\psi_2 = H_1/Q = H_2$, $L_1\psi_2 = L_1Q/Q = L_2$, $W_1\psi_2 = W_1Q/Q = W_2$, $a_1\psi_2 = a_1Q = a_2$. Тогда $G_2 = (A_2 * B_2, H_2)$. Заметим, что $L_2 = L_1Q/Q = Q_1Q/Q = H_1/Q = H_2$ — конечная p-группа, изоморфная Q_1. Заметим еще, что $a_2 \neq 1$, поскольку $a_1 \notin Q$.

Так как A_2 — нильпотентная группа конечного ранга, H_2 — ее конечная нормальная подгруппа и фактор-группа $A_2/H_2 \cong A/H$ финитно аппроксимируема, то по лемме 4 группа A_2 финитно аппроксимируема. Поэтому в группе A_2 существует нормальная подгруппа M конечного индекса такая, что $M \cap H_2 = 1$. Поскольку H_2 — конечная p-группа и фактор-группа A_2/M раскладывается в прямое произведение силовских подгрупп, то без потери общности можно считать, что индекс $[A_2 : M]$ является степенью числа p. Аналогично, в группе B_2 существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса такая, что $N \cap H_2 = 1$. Согласно лемме 8, можно рассмотреть свободное произведение G_3 групп A_2/M и B_2/N с объединенной подгруппой $H_3 = H_2M/M = H_2N/N$ и гомоморфизм $\psi_3 : G_2 \to G_3$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_2 \to A_2/M$ и $B_2 \to B_2/N$. Введем следующие обозначения: $A_2\psi_3 = A_3$, $B_2\psi_3 = B_3$, $W_2\psi_3 = W_3$, $L_2\psi_3 = L_3 = H_3$, $a_2\psi_3 = a_3$. Тогда $G_3 = (A_3 * B_3, H_3)$, где A_3, B_3 — конечные p-группы. Заметим, что $a_3 \neq 1$, так как $a_3 = a_2M$ и при этом $a_2 \notin M$, поскольку $a_2 \in H_2 \setminus 1$ и $H_2 \cap M = 1$.

Теперь рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_4 : G_3 \to G_3/H_3$. Вводя обозначения $G_3\psi_4 = G_3/H_3 = G_4$, $A_3\psi_4 = A_3/H_3 = A_4$, $B_3\psi_4 = B_3/H_3 = B_4$, получим свободное произведение $G_4 = A_4 * B_4$, где A_4 и B_4 — конечные p-

группы. Так как $L \subseteq W$, то $L_3 \subseteq W_3$, и поскольку $L_3 = H_3$, то $H_3 \subseteq W_3$. Поэтому $W_3\psi_4 = W_3/H_3$. Обозначим подгруппу W_3/H_3 через W_4.

Пусть D — декартова подгруппа группы G_4, то есть ядро гомоморфизма группы G_4 на прямое произведение $A_4 \times B_4$, действующего тождественно на подгруппах A_4 и B_4. Очевидно, что $G_4/D_4 \cong A_4 \times B_4$. Обозначим через F_4 пересечение групп D_4 и W_4. Тогда F_4 — нормальная свободная подгруппа конечного p-индекса группы W_4 и при этом существует подгруппа $F_3 \in L(W_3, H_3)$ такая, что $F_4 = F_3/H_3$. Таким образом, группа F_3 является расширением группы H_3 с помощью свободной группы F_4. Такое расширение, очевидно, является расщепляемым. Заметим, что группа F_4 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку она свободна.

Согласно (4), для взаимного коммутанта подгрупп L и V имеет место включение $[L, V] \subseteq L'L^p$. Кроме того, $W \subseteq V$. Поэтому $[L, W] \subseteq L'L^p$. Отсюда и из того, что $W\psi_1\psi_2\psi_3 = W_3$, $L\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3 = H_3$, $L'L^p\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3'L_3^p = H_3'H_3^p$ следует, что $[H_3, W_3] \subseteq H_3'H_3^p$. Поскольку $F_3 \subseteq W_3$, имеем $[H_3, F_3] \subseteq H_3'H_3^p$.

Мы видим, таким образом, что группа F_3 является расщепляемым расширением конечной p-группы H_3 с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы и при этом $[H_3, F_3] \subseteq H_3'H_3^p$. Поэтому в силу леммы 11 группа F_3 является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, F_3 — нормальная подгруппа в W_3 и $W_3/F_3 \cong W_4/F_4$ — конечная p-группа. Из последних двух обстоятельств следует, что группа W_3 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $a_3 \in W_3 \setminus 1$ следует, что существует гомоморфизм ψ_5 группы W_3 на некоторую конечную p-группу W_5, образ элемента a_3 относительно которого отличен от единицы. Тогда гомоморфизм $\psi_1|_W \cdot \psi_2|_{W_1} \cdot \psi_3|_{W_2} \cdot \psi_5$ группы W на конечную p-группу W_5 отображает элемент a в элемент $a_3\psi_5$, отличный от единицы, и является искомым. Теорема 3 доказана.

Автор благодарен Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Baumslag G. On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193-209.

[2] Азаров Д. Н., Розов А. В. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 98-103.

[3] Lennox J., Robinson D. The theory of infinite soluble groups. Oxford.: Clarendon press. 2004.

[4] Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. ж. 1968. Том 9. С. 234-235.

[5] Shirvani M. A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104. №3. P. 703-706.

[6] Азаров Д. Н., Гольцов Д. В. Почти аппроксимируемость конечными p-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 94-97.

[7] Азаров Д. Н. О группах конечного общего ранга // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 100-103.

[8] Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. Тула, 2010. Том 11. Вып. 3(35). С. 11-21.

[9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

[10] Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29-62.

[11] Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.

Ивановский государственный университет.
Получено 14.05.2012