ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.543

ОБ ОДНОМ АППРОКСИМАЦИОННОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

А. В. Розов (г. Иваново)

Аннотация

Мы обобщаем результат А. Л. Шмелькина, устанавливающий почти аппроксимируемость конечными p–группами полициклических групп.

Ключевые слова: полициклическая группа, аппроксимируемость конечными p-группами, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

ON THE RESIDUAL PROPERTY OF POLYCYCLIC GROUPS

A. V. Rozov (Ivanovo)

Abstract

We generalize the result of A. L. Shmelkin which establishes the fact that polycyclic groups are virtually residually p–finite for any prime p.

Keywords: polycyclic group, residually a finite p-group, virtually residually a finite p-group.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$–аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$–аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p–групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Финитная аппроксимируемость полициклических групп была доказана К. Гиршем в работе [1]. Вопрос об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости полициклических групп исследован только для некоторых частных случаев, например, для конечно порожденных нильпотентных групп (см. [2]) и для сверхразрешимых групп (см. [3]). В общем же случае аппроксимируемость конечными p–группами полициклических групп не исследована.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. А. Л. Шмелькин доказал, что произвольная полициклическая группа является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой для любого простого числа p. Доказательство этого факта было приведено в работе [4]. Мы обобщаем результат А. Л. Шмелькина следующим образом.

Теорема 1. . *Пусть группа G содержит конечно порожденную нормальную подгруппу H такую, что фактор-группа G/H является полициклической. И пусть p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в H, из того, что группа H/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема следует, что группа S/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

При $H = 1$ данная теорема совпадает с результатом А. Л. Шмелькина. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. Если A — конечная p–группа, то ее подгруппа $A'A^p$ очевидно совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A. Очевидно, что фактор-группа $A/A'A^p$ является периодической абелевой группой. Поэтому если группа A конечно порождена, то ее фактор-группа $A/A'A^p$ конечна.

Лемма 1. . *Пусть A — конечная p–группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы A. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Γ является p–группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [5, с. 562]).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$. Очевидно, что $G/A \cong B$, и что если A — конечная группа, то $[G : B] = |A|$.

Некоторые достаточные условия аппроксимируемости конечными p–группами расщепляемых расширений будут доказаны ниже в леммах 2 и 3. Эти леммы принадлежат Д. Н. Азарову и не опубликованы. Мы приводим эти результаты с подробными доказательствами.

Лемма 2. . *Пусть G — расщепляемое расширение конечной p–группы A с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы B. И пусть взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Для каждого элемента x из G через $\widehat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы G, действующий по правилу: $g\widehat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G. И пусть

$$Aut_B(A) = \{\widehat{x}|_A : x \in B\}$$

— множество ограничений на подгруппу A всех внутренних автоморфизмов группы G, производимых элементами из B. Это множество является подгруппой в группе всех автоморфизмов группы A. Так как $[B, A] \subseteq A'A^p$, то все автоморфизмы из $Aut_B(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Следовательно, в силу леммы 1 $Aut_B(A)$ — конечная p–группа.

Пусть

$$\theta : B \to Aut_B(A)$$

— гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\widehat{b}$ группы G. И пусть $H = Ker\theta$. Так как $Aut_B(A)$ — конечная p–группа, то H — нормальная подгруппа конечного p–индекса группы B. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. Из последних двух обстоятельств получаем, что H — подгруппа конечного p–индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, поскольку содержится в группе B. Заметим еще, что подгруппа H нормальна в группе G, поскольку она поэлементно перестановочна с подгруппой A и нормальна в подгруппе B.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы H с помощью конечной p–группы G/H. Отсюда следует (см., напр., [2, лемма 1.5]), что группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 3. . *Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы A с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы B. И пусть $[B, A] \subseteq A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Для доказательства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать нормальную подгруппу N группы G, не содержащую элемент g и такую, что фактор-группа G/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Если $g \notin A$, то в качестве N можно взять A, так как $G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая группа. Если же $g \in A$, то из $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы A следует существование в ней нормальной подгруппы M конечного p–индекса, не содержащей g. Пусть N — пересечение всех подгрупп M^x группы G, сопряженных с M $(x \in G)$. Очевидно, что подгруппа

N нормальна в группе G и $g \notin N$. Кроме того, N имеет конечный p–индекс в группе A. Действительно, все подгруппы M^x нормальны в группе A и имеют в ней индексы, совпадающие с индексом $[A : M]$. Поэтому в силу теоремы М. Холла (см., напр., [6, с. 250]) число различных подгрупп M^x конечно. Отсюда и из теоремы Ремака [7, п. 4.3.9] следует, что N — подгруппа конечного p–индекса группы A.

Заметим, что группа G/N является расщепляемым расширением конечной p–группы A/N с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы $BN/N \cong B$, причем поскольку

$$[B, A] \subseteq A'A^p,$$

то

$$[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^p.$$

Отсюда по лемме 2 следует, что группа G/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Лемма доказана.

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть H — конечно порожденная нормальная подгруппа группы G, и фактор-группа G/H является полициклической. Тогда существует последовательность подгрупп

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$$

такая, что для каждого $i = 1, \ldots, r$ подгруппа G_{i-1} нормальна в G_i, и фактор-группа G_i/G_{i-1} является циклической. Пусть p — простое число. Индукцией по r покажем, что в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в H, из того, что группа H/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема следует, что группа S/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Если $r = 0$, то $G = H$, и в качестве искомой подгруппы S можно взять H.

Пусть теперь $r > 0$. По индуктивному предположению в группе G_{r-1} существует нормальная подгруппа F конечного индекса, содержащая H и такая, что для любой нормальной подгруппы N группы G_{r-1}, содержащейся в H, из того, что H/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема следует, что F/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. В частности, это верно для любой нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в H. Пусть Q — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с F. Тогда очевидно, что Q — нормальная подгруппа группы G, содержащая H. Поскольку группа G_{r-1} является расширением конечно порожденной группы H с помощью полициклической группы, то она сама конечно порождена. Отсюда следует, что индекс подгруппы Q в группе G_{r-1} конечен. Кроме того, для любой нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в H, фактор-группа Q/N содержится в F/N, и поэтому из $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости H/N следует $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость Q/N.

Если G/G_{r-1} — конечная циклическая группа, то Q имеет конечный индекс в G, и мы можем в этом случае в качестве искомой подгруппы S взять Q.

Будем теперь предполагать, что G/G_{r-1} — бесконечная циклическая группа. Тогда G/Q представляет собой расширение конечной группы G_{r-1}/Q с помощью бесконечной циклической группы G/G_{r-1}. Хорошо известно и легко проверяется, что такое расширение является расщепляемым, и поэтому G/Q содержит бесконечную циклическую подгруппу T/Q конечного индекса. Тогда T — подгруппа конечного индекса группы G, и T представляет собой расщепляемое расширение группы Q с помощью бесконечной циклической группы $X = (x)$.

Так как группа Q представляет собой расширение конечно порожденной группы H с помощью полициклической группы, то она сама конечно порождена. Поэтому ее фактор-группа $Q/Q'Q^p$ конечна. Обозначим через n порядок группы $Aut(Q/Q'Q^p)$. Тогда сопряжение элементом x^n на подгруппе Q действует тождественно по модулю $Q'Q^p$. Поэтому

$$[X^n, Q] \subseteq Q'Q^p. \qquad (*)$$

Пусть $U = QX^n$. Так как индексы $[X : X^n]$ и $[G : T]$ конечны, то подгруппа U имеет конечный индекс в группе G. Кроме того, U — расщепляемое расширение группы Q с помощью X^n. Пусть теперь N — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и такая, что фактор-группа H/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Тогда Q/N также $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Следовательно, фактор-группа U/N представляет собой расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы Q/N с помощью бесконечной циклической группы $X^nN/N \cong X^n$, причем из $(*)$ следует, что

$$[X^nN/N, Q/N] \subseteq (Q/N)'(Q/N)^p.$$

Поэтому в силу леммы 3 группа U/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Пусть S — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с U. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H. Если теперь N — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и такая, что H/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то U/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. А поскольку $S/N \leq U/N$, то и S/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hirsh K. A. On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.

2. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.

3. Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. труды ИвГУ. Математика. 1999. Вып. 2. С. 8—9.

4. Шмелькин А. Л. Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.

5. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.

6. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.

7. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

Ивановский государственный университет.
Поступило 7.09.2013