МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 512.543

А. В. Розов

Об аппроксимируемости конечными π -группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами

Пусть π – множество простых чисел, F_π – класс всех конечных π-групп. И пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с собственными центральными объединенными подгруппами H и K. Доказано, что группа G тогда и только тогда F_π-аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K F_π-аппроксимируемы.

Ключевые слова: нильпотентная группа конечного ранга, центр группы, обобщенное свободное произведение групп, аппроксимируемость конечными π -группами.

A. V. Rozov

On the Residual π -Finiteness of Free Products of Nilpotent Groups of the Finite Rank with Central Amalgamated Subgroups

Let F_π be a class of all finite π-groups, where π is a set of primes. And let A and B be residually π-finite nilpotent groups of the finite rank and G be a free product of groups A and B with amalgamated subgroups H and K, where H and K are proper central subgroups of groups A and B. We proved that G is residually π-finite if and only if groups A/H and B/K are residually π-finite.

Keywords: a nilpotent group of finite rank, a group center, a generalized free product of groups, residually a finite π -group.

1. Введение

Пусть K – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или короче – K-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса K, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если F обозначает класс всех конечных групп, то понятие F-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью, изучается также свойство F_π-аппроксимируемости, где π – некоторое множество простых чисел, F_π – класс всех конечных π-групп. Напомним, что конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка принадлежат множеству π.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B – произвольные группы, H и K – подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости (F_π-аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость (F_π-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что этих условий недостаточно.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости (F_π-аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости (F_π-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Г. Баумслаг в [5] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами финитно аппроксимируемо.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Ранее в работе [1] нами было получено следующее обобщение указанного выше результата Баумслага.

Теорема 1. *Пусть G – свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K финитно аппроксимируемы.*

Заметим, что теорема 1 не может быть распространена с финитной аппроксимируемости на F_π-аппроксимируемость, поскольку даже в случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, свободное произведение двух конечных π-групп с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть F_π-аппроксимируемой группой. Тем не менее, требуя дополнительно от объединяемых подгрупп H и K, чтобы они содержались в центрах групп A и B, мы докажем здесь следующее утверждение для обобщенного свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга.

Теорема 2. *Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда F_π-аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K F_π-аппроксимируемы.*

Заметим, что необходимость в этой теореме имеет место даже в более общей ситуации: из F_π-

аппроксимируемости свободного произведения G произвольных групп A и B с собственными центральными объединенными подгруппами H и K следует F_π-аппроксимируемость групп A/H и B/K.

Хорошо известно и легко проверяется, что конечно порожденная нильпотентная группа F_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее конечная часть $\tau(G)$ является π-группой (см. [6]). Поэтому в качестве следствия из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, то группа G тогда и только тогда F_π-аппроксимируема, когда группы A/H и B/K F_π-аппроксимируемы, тогда и только тогда, когда конечные части групп A/H и B/K являются π-группами.*

Частным случаем этого утверждения является теорема 4.10 из [7], доказанная для множества π, состоящего из одного простого числа p.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

В работе [1, лемма 4] нами был получен следующий результат.

Лемма 1. *Пусть G – нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то группа G финитно аппроксимируема.*

Верно будет и аналогичное утверждение для F_π-аппроксимируемости группы G.

Лемма 2. *Пусть G – нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной π-группы с помощью F_π-аппроксимируемой группы, то группа G F_π-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть H – конечная нормальная π-подгруппа группы G и фактор-группа G/H F_π-аппроксимируема. Покажем, что группа G F_π-аппроксимирума. Для этого рассмотрим произвольный неединичный элемент g из G и укажем для него гомоморфизм группы G на конечную π-группу, переводящий g в элемент, отличный от 1.

Предположим сначала, что $g \notin H$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H$ – естественный гомоморфизм. Тогда $g\varepsilon \neq 1$. Отсюда и из того, что G/H F_π-аппроксимируема следует, что существует гомоморфизм ρ группы G/H на конечную π-группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Поэтому $\varepsilon\rho$ – искомый гомоморфизм.

Теперь предположим, что $g \in H$. В силу леммы 1 группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H, конечна следует, что существует гомоморфизм ρ группы G на некоторую конечную группу F, инъективный на H. Хорошо известно (см., напр., [2, п. 17.1.4]), что любая конечная нильпотентная группа раскладывается в прямое произведение своих силовских p-подгрупп. Поэтому F раскладывается в прямое произведение вида

$$F = P \times T,$$

где P – наибольшая π-подгруппа группы F. Очевидно, что $H\rho \subseteq P$. Рассмотрим проекцию σ группы F на ее подгруппу P. Тогда $\rho\sigma$ – гомоморфизм группы G на конечную π-группу P, инъективный на H. Поэтому $g\rho\sigma \neq 1$. Таким образом, $\rho\sigma$ – искомый гомоморфизм. Лемма доказана.

Пусть G – свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому можно считать, что A и B – подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее в некоторых случаях для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B; H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Лемма 3. *Пусть* $G = (A * B; H)$ *и* F *– подгруппа группы* G*, тривиально пересекающая все подгруппы группы* G*, сопряженные с* H*. Тогда* F *раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и подгрупп вида* $x^{-1}Ax \cap F$ *и* $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$*. В частности, если подгруппа* F *тривиально пересекает все подгруппы группы* G*, сопряженные с* A *и* B*, то она свободна.*

Доказательство этого утверждения, принадлежащего Х. Нейман, можно найти в [3, предл. 11.22].

Лемма 4. *Пусть* $G = (A * B; H)$*,* M *и* N *– нормальные подгруппы групп* A *и* B *соответственно такие, что* $M \cap H = N \cap H$*. Тогда естественные гомоморфизмы* $A \to A/M$ *и* $B \to B/N$ *могут быть продолжены до гомоморфизма* ρ_{MN} *группы* G *на свободное произведение* G_{MN} *групп* A/M *и* B/N *с объединенной подгруппой* $H_{MN} = HM/M = HN/N$.

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [5]).

Лемма 5. *Произвольная свободная группа* F_π*-аппроксимируема для любого множества* π *простых чисел.*

Этот результат непосредственно следует из F_p-аппроксимируемости свободных групп для любых простых p (см. [3, предл. 4.8]).

Лемма 6. *Пусть* π *– множество простых чисел. Свободное произведение любого семейства* F_π*-аппроксимируемых групп является* F_π*-аппроксимируемой группой.*

Данное утверждение доказано в работе [6] (см. также [4, с. 429]).

Лемма 7. *Пусть* G *– свободное произведение конечных* π*-групп* A *и* B *с объединенными относительно изоморфизма* φ *подгруппами* H *и* K*. Если* H *и* K *центральны в группах* A *и* B *соответственно, то группа* G F_π*-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как подгруппы H и K центральны в группах A и B соответственно, то можно рассмотреть обобщенное прямое произведение $\overline{G}$ групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Напомним, что группа $\overline{G}$ представляет собой фактор-группу прямого произведения $A \times B$ по его подгруппе, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Очевидно, что $\overline{G}$ – конечная π-группа и что тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\rho : G \to \overline{G}$. Из построения ρ видно, что его ядро F тривиально пересекает подгруппы A и B, а также все сопряжения к ним в группе G, откуда в силу леммы 3 получаем, что F – свободная группа.

Таким образом, группа G является расширением F_π-аппроксимируемой группы F (см. лемму 5) с помощью конечной π-группы $\overline{G}$. Хорошо известно и легко проверяется, что такое расширение F_π-аппроксимируемо. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Если H центральна в группах A и B, то группа G F_π-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группа A F_π-аппроксимируема и ее подгруппа H конечна, то в A существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса такая, что $M \cap H = 1$. Аналогично, в группе B существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса такая, что $N \cap H = 1$. По лемме 4 естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ можно продолжить до гомоморфизма $\rho_{MN} : G \to G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN})$. Очевидно, что ρ_{MN} инъективен на H.

В силу леммы 7 группа G_{MN} F_π-аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H_{MN} конечна следует, что существует гомоморфизм ψ группы G_{MN} на конечную π-группу $\overline{G}$, инъективный на H_{MN}. Тогда гомоморфизм $\rho_{MN}\psi$ инъективен на подгруппе H, и поэтому его ядро R пересекается с H тривиально. В силу леммы 3 группа R раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы F и семейства подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap R$ и $x^{-1}Bx \cap R$, где $x \in G$. Заметим, что подгруппа F F_π-аппроксимируема по лемме 5, а остальные свободные сомножители из разложения группы R F_π-аппроксимируемы вследствие F_π-аппроксимируемости групп A и B. Поэтому из леммы 6 следует, что и группа R F_π-аппроксимируема.

Таким образом, группа G является расширением F_π-аппроксимируемой группы R с помощью конечной π-группы $\overline{G}$. Поэтому G сама F_π-аппроксимируема. Лемма доказана.

Напомним, что подгруппа H группы G называется F_π-отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известна и легко проверяется следующая связь между понятиями F_π-аппроксимируемой группы и F_π-отделимой подгруппы.

Лемма 9. *Пусть G – группа, H – ее нормальная подгруппа. Подгруппа H F_π-отделима в группе G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H F_π-аппроксимируема.*

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть A и B – нильпотентные группы конечного ранга. Докажем, что группа G F_{π}-аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H F_{π}-аппроксимируемы.

Пусть фактор-группы A/H и B/H F_{π}-аппроксимируемы. Докажем, что группа G F_{π}-аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g из G указать гомоморфизм группы G на F_{π}-аппроксимируемую группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H$ – естественный гомоморфизм. Тогда $g\varepsilon \neq 1$. При этом фактор-группа G/H является свободным произведением F_{π}-аппроксимируемых групп A/H и B/H, и поэтому сама F_{π}-аппроксимируема. Таким образом, ε – искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как группа H F_{π}-аппроксимируема, то в ней существует подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая элемент g. При этом N нормальна в группе G, поскольку содержится в ее центре. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/N = (A/N * B/N; H/N).$$

Заметим, что группы A/N и B/N являются расширениями конечной π-группы H/N с помощью F_{π}-аппроксимируемых групп A/H и B/H соответственно. Отсюда и из того, что A/N и B/N – нильпотентные группы конечного ранга, по лемме 2 следует, что они F_{π}-аппроксимируемы. Таким образом, группа G/N является свободным произведением F_{π}-аппроксимируемых групп A/N и B/N с конечной центральной объединенной подгруппой H/N. Поэтому из леммы 8 получаем, что группа G/N F_{π}-аппроксимируема. Остается отметить, что $g\varepsilon \neq 1$ и что ε – искомый гомоморфизм.

Докажем теперь необходимость в теореме 2. Пусть группа G F_{π}-аппроксимируема. Покажем, что группы A/H и B/H F_{π}-аппроксимируемы. В силу леммы 9 для этого достаточно доказать F_{π}-отделимость подгруппы H в группах A и B.

Предположим, что подгруппа H не F_{π}-отделима в группе A. Тогда в группе A существует элемент a, не принадлежащий H и такой, что для каждого гомоморфизма φ группы A на конечную π-группу $a\varphi \in H\varphi$. Зафиксируем элемент b группы B, не принадлежащий H, и рассмотрим коммутатор c элементов a и b, то есть элемент вида

$$c = [a,b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 4 и поэтому отличен от 1. Отсюда и из того, что G F_{π}-аппроксимируема, следует, что существует гомоморфизм ψ группы G на конечную π-группу такой, что $c\psi \neq 1$. Из сделанного выше предположения заключаем, что $a\psi \in H\psi$, то есть $a\psi = h\psi$ для некоторого элемента h группы H. Используя центральность подгруппы H в группе B, получаем:

$$c\psi = [a,b]\psi = [a\psi, b\psi] = [h\psi, b\psi] = [h,b]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако выше было сказано, что $c\psi \neq 1$. Таким образом, подгруппа H F_{π}-отделима в группе A. Аналогично доказывается F_{π}-отделимость подгруппы H в группе B. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

Библиографический список

1. Азаров, Д. Н., Розов, А. В. О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами [Текст] / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // Вестн. Иван. гос. ун-та. – 2011. – Вып. 2. – С. 98–103.
2. Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. Основы теории групп [Текст] / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1977. – 240 с.
3. Линдон, Р., Шупп, П. Комбинаторная теория групп [Текст] / Р. Линдон, П. Шупп. – М. : Мир, 1980. – 447 с.
4. Магнус, В. Комбинаторная теория групп [Текст] / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
5. Baumslag, G. On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups / G. Baumslag // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 193–209.
6. Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // Proc. London Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 29–62.
7. Kim, G. Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups / G. Kim, Y. Lee, J. McCarron // Kyungpook Math. J. – 2008. – Vol. 48, № 3. – P. 495–502.

Bibliograficheskij spisok

1. Azarov, D. N., Rozov, A. V. O finitnoj approksimiruemosti svobodnogo proizvedeniya razreshimykh grupp konechnogo ranga s normal'nymi ob"edinennymi podgruppami [Tekst] / D. N. Azarov, A. V. Rozov // Vestn. Ivan. gos. un-ta. – 2011. – Vyp. 2. – S. 98–103.
2. Kargapolov, M. I., Merzlyakov, YU. I. Osnovy teorii grupp [Tekst] / M. I. Kargapolov, YU. I. Merzlyakov. – M. : Nauka, 1977. – 240 s.
3. Lindon, R., SHupp, P. Kombinatornaya teoriya grupp [Tekst] / R. Lindon, P. SHupp. – M. : Mir, 1980. – 447 s.
4. Magnus, V. Kombinatornaya teoriya grupp [Tekst] / V. Magnus, A. Karras, D. Solitehr. – M. : Nauka, 1974. – 456 s.
5. Baumslag, G. On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups / G. Baumslag // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 193–209.
6. Gruenberg, K. W. Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // Proc. London Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 29–62.
7. Kim, G. Residual -finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups / G. Kim, Y. Lee, J. McCarron // Kyungpook Math. J. – 2008. – Vol. 48, № 3. – P. 495–502.