На правах рукописи

РОЗОВ Алексей Вячеславович

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Ивановский государственный университет»

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент **Азаров Дмитрий Николаевич**

Официальные оппоненты: **Безверхний Владимир Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Академия гражданской защиты МЧС России», профессор кафедры высшей математики

Куликова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана», доцент кафедры ФН-12 «Математическое моделирование»

Ведущая организация — **ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»**

Защита состоится 20 декабря 2013 г. в 13.30 на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова» по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, д. 144, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова».

Автореферат разослан «____» ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Яблокова Светлана Ивановна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Тематика данной диссертации относится к комбинаторной теории групп, к тому ее разделу, в котором рассматриваются вопросы аппроксимируемости группами некоторого класса (по преимуществу, состоящего из конечных групп) свободных конструкций групп и, в частности, свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Эти вопросы активно разрабатывались в течение последних пяти десятилетий в нашей стране и за рубежом, причем полученные здесь многочисленные результаты относятся, как правило, к свойству финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с объединенной подгруппой. Помимо финитной аппроксимируемости интерес вызывают и некоторые более тонкие аппроксимационные свойства свободных произведений с объединенной подгруппой.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$–аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$–аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучаются также свойства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости, где p — простое число, π — какое-либо множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p–групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π–групп. Будем рассматривать также свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Напомним, что группа G обладает некоторым свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса, обладающую этим свойством.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Финитная аппроксимируемость полициклических групп была доказана К. Гиршем в работе [19]. Более того, любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. Этот результат, ставший уже классическим, был получен А. Л. Шмелькиным [12]. Вопрос об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости полициклических групп исследован только для некоторых частных случаев, например, для конечно порожденных нильпотентных групп (см. [16]) и для сверхразрешимых групп (см. [2]).

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного специального ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (в другой терминологии — группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами (наименьшее такое r будем называть рангом группы). Это понятие, а также термин "конечный специальный ранг" введено А. И. Мальцевым в статье [8]. Будем в дальнейшем использовать термин "конечный ранг" вместо терминов "конечный специальный ранг" и "конечный ранг Прюфера". Примерами разрешимых групп конечного ранга являются все полициклические группы, а также группы Баумслага-Солитэра вида $G_n = \langle a, b; b^{-1}ab = a^n \rangle$, где n — произвольное целое число, отличное от 0.

Д. Робинсон [22, п. 5.3.2] доказал, что разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована. Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит неединичных полных подгрупп. Группа G называется полной, если для каждого элемента a группы G и для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Очевидно, что любая полициклическая группа редуцирована. Поэтому частным случаем сформулированного выше результата Робинсона является результат Гирша о финитной аппроксимируемости полициклических групп.

Наряду со свойством финитной аппроксимируемости групп изучается также свойство финитной отделимости. Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H.

В работе [9] исследуется вопрос о финитной отделимости подгрупп в разрешимых группах и доказано, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы. Напомним, что разрешимая группа называется ограниченной, если в ней существует конечный ряд подгрупп, каждый предыдущий член которого является нормальной подгруппой следующего его члена, и факторы которого являются ограниченными абелевыми группами. Абелева группа A называется ограниченной, если все примарные компоненты ее периодической части $\tau(A)$ конечны, фактор-группа $A/\tau(A)$ имеет конечный ранг и никакая фактор-группа группы $A/\tau(A)$ не содержит квазициклических подгрупп. Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой, и поэтому все подгруппы полициклических групп финитно отделимы.

Заметим, что условие финитной отделимости всех подгрупп данной группы является весьма жестким ограничением. Более естественным ограничением является финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп группы G. Если в группе G финитно отделима любая ее конечно порожденная подгруппа, то G называется LERF-группой. Исследование LERF-групп было начато М. Холлом в 1949 г. Он доказал, что все конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы [17].

Большой интерес представляют исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп — обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Мы остановимся более подробно на обобщенных свободных произведениях, т. е. на свободных произведениях групп с объединенными подгруппами. Частным случаем этого понятия является понятие обычного свободного произведения групп.

Для свободных произведений групп все перечисленные выше аппроксимационные свойства исследованы в полной мере. Так, было установлено, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых) групп финитно аппроксимируемо ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо) (см. [6, 16]). В [10] было доказано, что свободное произведение LERF-групп является LERF-группой.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$. Заметим, что если H и K — единичные подгруппы, то группа G представляет собой обычное свободное произведение групп A и B. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому можно считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$.

Далее в некоторых случаях для группы G будем использовать более компактное обозначение

$$G = (A * B, H)$$

и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Укажем некоторые направления исследования аппроксимационных свойств таких обобщенных свободных произведений, а также приведем несколько результатов, полученных в этих направлениях и необходимых для дальнейшего изложения.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Такой подход к изучению аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп был применен Г. Баумслагом, который в 60-е годы прошлого века начал систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. В его статье [14] 1963 года был получен целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении, а также был намечен маршрут для дальнейших исследований аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Сначала Баумслаг доказывает, что если A и B конечны, то группа G финитно аппроксимируема. Заметим, что свободное произведение двух конечных p–групп с объединенной подгруппой быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой уже не обязано. Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для такого свободного произведения был получен Г. Хигманом [18]. Из этого критерия уже следует $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость свободных произведений конечных p–групп с циклической или центральной объединенной подгруппой.

Следующий шаг, сделанный Г. Баумслагом, состоял в том, что требование конечности свободных множителей A и B было ослаблено до требования конечности объединенной подгруппы H. Баумслаг доказал [14], что свободное произведение G финитно аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H является финитно аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость. Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой получен в [1]. С другой стороны, в работе [6] доказано, что свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости групп A и B наследуется группой G при условии, что подгруппа H конечна. В частности, свободное произведение двух полициклических групп с конечной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо для каждого простого p. Аналогичный результат будет справедлив и для LERF-групп (см. [13]): свободное произведение двух LERF-групп с конечной объединенной подгруппой является LERF-группой.

Приведем теперь несколько результатов, касающихся аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп, полученных при дополнительном предположении о цикличности объединенной подгруппы. Существуют примеры, показывающие, что свободное произведение финитно аппроксимируемых групп с циклической объединенной подгруппой не всегда финитно аппроксимируемо. Однако Баумслаг [14] показал, что если A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, а объединенная подгруппа H циклическая, то группа G финитно аппроксимируема. Позже этот результат был обобщен Д. Дайер [15] на случай, когда A и B — полициклические группы.

Выше говорилось, что понятие разрешимой группы конечного ранга является обобщением понятия полициклической группы. Другим обобщением этого понятия служит понятие конечно порожденной группы конечного ранга. В работе Д. Н. Азарова [7] исследуется финитная аппроксимируемость обобщенных свободных произведений конечно порожденных групп конечного ранга. Результаты этой работы будут сформулированы ниже, и они тесно связаны со следующим результатом, доказанным М. Ширвани [25]. Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $H \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная отделимость подгруппы H в группах A и B. В [23] доказано, что все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга являются конечными расширениями разрешимых групп и, следовательно, удовлетворяют нетривиальному тождеству. Поэтому если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, $H \neq A$ и $H \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная отделимость подгруппы H в группах A и B. С другой стороны, в работе [7] приводится пример, показывающий, что свободное произведение двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга с финитно отделимой объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, там же доказывается, что если A и B — финитно аппроксимируемые конечно порожденные группы конечного ранга, а подгруппа H циклическая, то ее финитная отделимость в группах A и B является и достаточным условием финитной аппроксимируемости группы G. Частным случаем этого результата является упоминавшееся выше утверждение Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения полициклических групп с циклической объединенной подгруппой.

Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с циклической объединенной подгруппой был получен в работе [3].

В работе [20] рассмотрена ситуация, когда группы A и B $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы, а подгруппа H циклична. Показано, что в случае, когда H конечна, группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Также здесь доказывается, что в случае бесконечной H для $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G достаточно, чтобы подгруппа H была $\mathcal{F}_p$–отделимой в группах A и B.

Рассмотрим теперь случай, когда объединенная подгруппа H имеет в группах A и B конечный индекс. Если A и B — полициклические группы, то группа G может и не быть финитно аппроксимируемой. Демонстрирующий это пример можно найти в [7]. Критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с объединенной подгруппой конечного индекса был получен в работе Д. Н. Азарова [5]. Там же доказано, что для такого свободного произведения условие финитной аппроксимируемости равносильно условию почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для всех простых p. Далее в работе [7] эти результаты были распространены на случай, когда свободные сомножители являются конечно порожденными финитно аппроксимируемыми группами конечного ранга.

Еще одним естественным ограничением, накладываемым на подгруппу H, является ее нормальность в группах A и B. В [13] было доказано, что если группы A и B являются полициклическими, а подгруппа H нормальна в группах A и B, то G является LERF-группой. В качестве частного случая этого утверждения можно рассматривать полученный ранее результат Баумслага. В [14] он доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой финитно аппроксимируемо. Рассматривая более общий случай, когда группы A и B являются конечно порожденными финитно аппроксимируемыми группами конечного ранга, и предполагая, что $A \neq H \neq B$, Д. Н. Азаров в [7] доказал, что финитная аппроксимируемость группы G равносильна финитной отделимости подгруппы H в группах A и B. Частным случаем этой теоремы является упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Заметим еще, что этот результат Баумслага не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми группами и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой.

В статье [18] Хигман доказал, что свободное произведение G конечных p–групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда подгруппа группы автоморфизмов группы H, состоящая из всех ограничений на H внутренних автоморфизмов группы G, является p–группой. Для свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп с нормальным объединенением в работах [11] и [21] были получены достаточные условия $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости. Однако в целом случай нормальной объединенной подгруппы исследован в меньшей степени по сравнению со случаем циклической объединенной подгруппы. Настоящая диссертация посвящена исследованию аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп в случае, когда объединенная подгруппа нормальна.

Еще более жестким требованием является центральность объединенной подгруппы H в свободных множителях A и B. При этом условии было получено несколько результатов об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G. Из упомянутого выше результата Хигмана [18] следует, что свободное произведение двух конечных p–групп с центральной объединенной подгруппой $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо. В статье [21] был получен критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G в случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, а объединенная подгруппа H содержится в центрах A и B.

Степень разработанности темы исследования. Во второй половине двадцатого века исследования аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп выделились в самостоятельное интенсивно развивающееся научное направление. Одной из первых и наиболее значимых в этом направлении работ стала уже упоминавшаяся выше статья Г. Баумслага [14]. В ней автор, изучая свойство финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп, по сути разработал методологию для дальнейших исследований. Кроме того, позже выяснилось, что эта методология подходит и для исследования других аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп. Многие дальнейшие результаты в этом напрявлении в той или иной степени являются развитием идей Баумслага.

Основу данной диссертационной работы составляют исследования свойств финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений групп. Из перечисленных выше результатов видно, что свойство финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений изучено уже достаточно хорошо. Однако при переходе от него к $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости возникает много трудностей. Более слабое свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости исследовано еще в меньшей степени. Недостаточно исследовано и более специфическое по сравнению с финитной аппроксимируемостью свойство LERF.

В качестве центрального объекта для изучения в данной работе выбраны свободные произведения групп с нормальными объединениями. Из имеющихся на данный момент результатов (см. [7, 11, 13, 14, 18]) можно сделать вывод, что исследования аппроксимационных свойств таких обобщенных свободных произведений еще далеки от завершения, и поэтому могут быть продолжены в различных направлениях.

Цели и задачи исследования. Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Выше говорилось, что аппроксимационные свойства группы G изучаются при различных ограничениях, накладываемых на подгруппы A, B и H.

Именно такой подход был использован при получении всех указанных ранее результатов о различных аппроксимационных свойствах группы G.

Целью данной работы является изучение различных аппроксимационных свойств группы G при некоторых конкретных ограничениях на подгруппы A, B и H. Наибольшее внимание уделяется случаю, когда объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, а свободные сомножители A и B являются разрешимыми группами конечного ранга.

Для достижения цели в ходе работы решаются **задачи** по исследованию в отдельности свойств финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и LERF для свободного произведения G групп A и B с нормальным объединением. В ходе этих исследований для группы G строятся необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и LERF.

Научная новизна. Для свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами в работе был получен ряд новых результатов, касающихся свойства финитной аппроксимируемости, а также некоторых более тонких аппроксимационных свойств. Перечислим основные из них.

- Получен критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой. Для такого обобщенного свободного произведения групп было получено еще и достаточное условие финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп.

- Доказано, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальным объединением почти аппроксимируемо конечными p–группами для всех простых чисел p.

- Для свободного произведения почти аппроксимируемых конечными p–группами нильпотентных групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой получен критерий почти аппроксимируемости конечными p–группами.

- Получен критерий аппроксимируемости конечными p–группами для свободного произведения аппроксимируемых конечными p–группами нильпотентных групп конечного ранга с центральной объединенной подгруппой.

Теоретическая и практическая значимость работы. Данная диссертационная работа носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты относятся к направлению теории групп, занимающемуся изучением аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп. Многие из них являются обобщениями и усилениями известных результатов. Все результаты данной работы, а также методы их доказательства могут быть использованы при дальнейших исследованиях в данной области.

Методология и методы исследования. В ходе проведенных исследований аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп используется методология, предложенная Г. Баумслагом в его работе [14]. В оригинале она была использована для изучения свойства финитной аппроксимируемости, однако ее идеи в действительности могут быть использованы и в исследованиях других аппроксимационных свойств свободных произведений групп с объединенными подгруппами.

Кроме того, в работе используются некоторые хорошо известные свойства обобщенных свободных произведений групп, связанные с понятием несократимой записи элемента (см., напр., [24]).

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся все основные результаты, полученные в данной диссертации, и в частности, теоремы 1, 2, 3, 4 из раздела "Основное содержание работы" данного автореферата.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные положения, результаты и выводы, содержащиеся в диссертации, докладывались на алгебраическом семинаре под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского и А. А. Клячко (МГУ, 2013 г.), на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (ИвГУ, 2011–2013 гг.), на IX Международной научной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 2012 г.), на IX Международной школе-конференции по теории групп (Владикавказ, 2012 г.) и на Научных конференциях фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука в классическом университете" (ИвГУ, 2011–2013 гг.).

Все основные результаты диссертационного исследования отражены в 13 научных работах ([26 – 38]), в том числе в 7 статьях, из которых 2 статьи опубликованы в журналах, принадлежащих списку ВАК, одной главе коллективной монографии и 5 тезисах докладов на международных и региональных конференциях.

Объем и структура работы. Работа содержит 88 страниц печатного текста и состоит из введения, четырех глав с результатами работы и заключения. Список литературы состоит из 39 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертационного исследования, описана ее степень разработанности, сформулированы цели и задачи исследования, определена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, указана применявшаяся методология исследования, приведены сведения об апробации работы, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации полностью исследован вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением, а также рассматривается вопрос о финитной отделимости конечно порожденных подгрупп в таких свободных произведениях.

Еще в 1963 г. Г. Баумслаг [14] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой.

Как уже отмечалось выше, одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. В первой главе диссертации приводится пример, показывающий, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Основным результатом, доказанным в первой главе является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

2. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.

В связи с первым пунктом данной теоремы заметим следующее. Необходимость в этом утверждении имеет место даже без предположения о конечности ранга групп A и B (см. [25]). Однако достаточность в этом утверждении уже не может быть доказана без предположения о конечности ранга групп A и B. Соответствующий пример построен в первой главе диссертационной работы.

Так как почти полициклические группы финитно аппроксимируемы, и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [22, п. 1.3.10]), то непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат Р. Олленби и Р. Грегорака [13].

Следствие 1.1. *Пусть G — свободное произведение почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B, то все конечно порожденные подгруппы группы G финитно отделимы, и в частности группа G финитно аппроксимируема.*

Частным случаем этого утверждения является упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением.

Так как конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга почти разрешимы (см. [23]), то еще одним следствием теоремы 1 является следующее утверждение, доказанное ранее в статье Д. Н. Азарова [7].

Следствие 1.2. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Помимо полициклических групп существует много других разрешимых групп конечного ранга, в которых все подгруппы финитно отделимы. Примеры такого рода можно найти в классе ограниченных разрешимых групп. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [9], где доказывается, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы. Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой группой. Поэтому следующее утверждение, доказанное в первой главе диссертации, является обобщением указанного выше результата Олленби и Грегорака.

Пусть G — свободное произведение почти ограниченных разрешимых групп A и B с объединенной подгруппой H. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в группах A и B, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

В действительности это утверждение является также и обобщением пункта 2 теоремы 1, поскольку любая разрешимая группа конечного ранга, в которой все подгруппы финитно отделимы, является ограниченной разрешимой группой. Доказательство этого факта приводится в первой главе диссертации.

Рассмотрим теперь другие аппроксимационные свойства свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Прежде всего заметим, что упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости такого свободного произведения не может быть распространен на аппроксимируемость конечными p–группами. Иными словами если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми группами, и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. Соответствующий пример приведен во второй главе диссертации. Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Основным результатом, полученным во **второй главе**, является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.*

Нетривиальное доказательство этой теоремы основано на использовании некоторых весьма тонких свойств полициклических групп, которые доказаны во второй главе и представляют собой усиления упомянутого выше результата А. Л. Шмелькина [12]. Простым частным случаем теоремы 2 является результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением.

В третьей главе рассматриваются свободные произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением. Так как нильпотентные группы являются разрешимыми, то в силу пункта 1 теоремы 1 свободное произведение G двух финитно аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B, финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и

B/H финитно аппроксимируемы. В третьей главе диссертации доказывается аналогичный результат для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.*

Заметим, что для $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости подобный результат уже не имеет места, поскольку даже свободное произведение двух конечных p–групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой. Соответствующий пример приведен в четвертой главе диссертации.

В работе [12] было доказано, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. В частности, этим свойством обладает любая конечно порожденная нильпотентная группа. Поэтому в качестве следствия из теоремы 3 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.*

Заметим, что это утверждение является также и следствием теоремы 2.

Пока остается нерешенным следующий вопрос: можно ли обобщить теорему 3 (и одновременно теорему 2), если в ней ослабить условие нильпотентности групп A и B до условия разрешимости групп A и B.

В четвертой главе диссертации сохраняется требование нильпотентности и конечности ранга для групп A и B, а условие нормальности подгруппы H в группах A и B заменяется более жестким условием, которое состоит в том, что H содержится в центрах групп A и B. При этих более жестких ограничениях удается получить критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G, и даже критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G, где π — произвольное множество простых чисел. Этот критерий, доказанный в четвертой главе, формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующее утверждение. Свободное произведение двух конечных p–групп с центральным объединением $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо. Как уже отмечалось, это утверждение является также и следствием упомянутого выше критерия Хигмана $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости обобщенного свободного произведения конечных p–групп [18].

Хорошо известно и легко проверяется, что конечно порожденная нильпотентная группа A $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(A)$ является π–группой (см. [16]). Поэтому еще одним следствием из теоремы 4 является следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы, тогда и только тогда, когда периодические части групп A/H и B/H являются π–группами.*

Частным случаем этого утверждения является теорема 4.10 из [21], доказанная для множества π, состоящего из одного простого числа p.

Ранее говорилось, что необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) обобщенного свободного произведения групп является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость) его свободных сомножителей. Выясним теперь, при каких обстоятельствах свободные сомножители обобщенных свободных произведений, рассматриваемых в перечисленных выше основных результатах диссертации, являются финитно аппроксимируемыми ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми) группами.

Для разрешимых групп конечного ранга критерий финитной аппроксимируемости был получен в работе Д. Робинсона [22]. Этот результат был сформулирован выше. Для нильпотентных групп конечного ранга известен еще и критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости [4], который формулируется следующим образом. Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов отличных от 1, т. е. таких элементов $a \neq 1$, что уравнение $x^{p^n} = a$ разрешимо при всех целых положительных n. В третьей главе диссертации доказан аналогичный критерий для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости. Приведем формулировку этого результата.

Нильпотентная группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов бесконечного порядка и ее периодическая часть конечна.

В четвертой главе диссертации доказан еще и критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости для нильпотентной группы конечного ранга, где π — произвольное множество простых чисел. Этот критерий формулируется следующим образом.

Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π–полных элементов отличных от 1.

Элемент a группы G мы называем π–полным, если для любого π–числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G.

В заключении подводятся итоги диссертационного исследования, а также указываются некоторые нерешенные вопросы и возможные пути дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 1997. — Т. 38, № 1. — С. 3–13.
2. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p–группами / Д. Н. Азаров, Д. И. Молдаванский // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 1999. — № 2. — С. 8–9.
3. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства свободных произведений групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2008. — № 2. — С. 56–63.

4. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нильпотентных групп / Д. Н. Азаров, И. Г. Васькова // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2008. — № 18. — С. 9–16.
5. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2010. — Т. 11, № 3(35). — С. 11–21.
6. *Азаров, Д. Н.* Почти аппроксимируемость конечными p–группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2011. — № 2. — С. 94–97.
7. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 485–497.
8. *Мальцев, А. И.* О группах конечного ранга / А. И. Мальцев // *Мат. сб.* — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 351–352.
9. *Мальцев, А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // *Ученые зап. Иван. гос. пед. ин-та.* — 1958. — Т. 18. — С. 49–60.
10. *Романовский, Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения / Н. С. Романовский // *Изв. АН СССР. Сер. Математика.* — 1969. — Т. 33, № 6. — С. 1324–1329.
11. *Соколов, Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p–группами свободных произведений групп с нормальным объединением / Е. В. Соколов // *Мат. заметки.* — 2005. — Т. 78, № 1. — С. 125–131.
12. *Шмелькин, А. Л.* О полициклических группах / А. Л. Шмелькин // *Сиб. мат. журн.* — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 234–235.
13. *Allenby, R. B. J. T.* On locally extended residually finite groups / R. B. J. T. Allenby, R. J. Gregorac // *Lecture Notes Math.* — 1973. — V. 319. — P. 9–17.
14. *Baumslag, G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1963. — V. 106. — P. 193–209.
15. *Dyer, J.* On the residual finiteness of generalized free products / J. Dyer // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1968. — V. 133, № 1. — P. 131–143.
16. *Gruenberg, K. W.* Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // *Proc. London Math. Soc.* — 1957. — V. 7. — P. 29–62.

17. *Hall, M.* Coset representations of free groups / M. Hall // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1949. — V. 67. — P. 431–451.
18. *Higman, G.* Amalgams of p–groups / G. Higman // *J. Algebra.* — 1964. — № 1. — P. 301–305.
19. *Hirsh, K. A.* On infinite soluble groups / K. A. Hirsh // *J. London Math. Soc.* — 1952. — V. 27. — P. 81–85.
20. *Kim, G.* On amalgamated free products of residually p–finite groups / G. Kim, J. McCarron // *J. Algebra.* — 1993. — V. 162. — P. 1–11.
21. *Kim, G.* Residual p–finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups / G. Kim, Y. Lee, J. McCarron // *Kyungpook Math. J.* — 2008. — V. 48, № 3. — P. 495–502.
22. *Lennox, J.* The theory of infinite soluble groups / J. Lennox, D. Robinson. — Oxford.: Clarendon press, 2004. — 344 P.
23. *Lubotzky, A.* Residually finite groups of finite rank / A. Lubotzky, A. Mann // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 1989. — V. 106, № 3. — P. 185–188.
24. *Neumann, B.* An essau on free products of groups with amalgamations / B. Neumann // *Philos. Transactions of the Royal Soc. of London.* — 1954. — V. 246. — P. 503–554.
25. *Shirvani, M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag / M. Shirvani // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1988. — V. 104, № 3. — P. 703–706.

РАБОТЫ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

26. *Розов, А. В.* О финитной аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений разрешимых групп конечного ранга / А. В. Розов // *Моделирование и анализ информационных систем.* – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 124–132.
27. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными π–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Ярославский пед. вестн. Естеств. науки.* – 2013. – Т. 3, № 2. – С. 7–13.

Другие публикации:

28. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2011. – Вып. 2. – С. 98–103.
29. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободного произведения разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 25–29 апреля 2011 г.: в 7 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2011. – Ч. 1. – С. 104–105.
30. *Розов, А. В.* О финитной отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения ограниченных разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Математика и ее приложения: журнал Иван. мат. общества.* – 2011. – Вып. 1(8). – С. 95–100.
31. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2012. – Вып. 2. – С. 131–138.
32. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Теория групп и ее приложения: тез. IX Междунар. школы-конф. по теории групп, Владикавказ, 9–15 июля 2012 г. – Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2012. – С. 102–104.
33. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 23–27 апреля 2012 г.: в 8 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2012. – Ч. 8 – С. 10–11.
34. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Чебышевский сборник.* – 2012. – Т. 13, вып. 1(41). – С. 130–142.

35. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // Аппроксиамационные свойства групп. Записки семинара по комбинаторной теории групп : монография / Ред.: Молдаванский Д. И., Яцкин Н. И. – Изд-во: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – Глава 29. – С. 243–249.
36. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными π–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральным объединением / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 22–26 апреля 2013 г.: в 7 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2013. – Ч. 1. – С. 108.
37. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными p–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2013. – Вып. 2. – С. 88–93.
38. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой / А. В. Розов // Междунар. конференция "Мальцевские чтения": тез. докладов, Новосибирск, 12–15 ноября 2013 г. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, НГУ, 2013.