ФГБОУ ВПО "ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

УДК 512.543

РОЗОВ Алексей Вячеславович

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Азаров Д.Н.

Иваново – 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Актуальность темы

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$–аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{K}$–аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{K}$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$–аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучаются также свойства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости, где p — простое число, π — какое-либо множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p–групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π–групп. Будем рассматривать также свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью.

Хорошо известно, что все свободные группы финитно аппроксимируемы и даже $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы для каждого простого числа p (см. [31]). Другим примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Финитная аппроксимируемость полициклических групп была доказана К. Гиршем в работе [30]. Более того, любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. Этот результат, ставший уже классическим, был получен А. Л. Шмелькиным [21]. Вопрос об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости полициклических групп исследован только для некоторых частных случаев, например, для конечно порожденных нильпотентных групп (см. [27]) и для сверхразрешимых групп (см. [3]).

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного специального ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (в другой терминологии — группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами (наименьшее такое r будем называть рангом группы). Это понятие, а также термин "конечный специальный ранг" введено А. И. Мальцевым в статье [16]. Будем в дальнейшем использовать термин "конечный ранг" вместо терминов "конечный специальный ранг" и "конечный ранг Прюфера". Примерами разрешимых групп конечного ранга являются все полициклические группы, а также группы Баумслага-Солитэра вида $G_n = \langle a, b; b^{-1}ab = a^n \rangle$, где n — произвольное целое число, отличное от 0.

Д. Робинсон [36, п. 5.3.2] доказал, что разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована. Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит неединичных полных подгрупп. Группа G называется полной, если для каждого элемента a группы G и для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Очевидно, что любая полициклическая группа редуцирована. Поэтому частным случаем сформулированного выше результата Робинсона является результат Гирша о финитной аппроксимируемости полициклических групп.

Наряду со свойством финитной аппроксимируемости групп изучается также свойство финитной отделимости. Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H.

В работе [17] исследуется вопрос о финитной отделимости подгрупп в разрешимых группах и доказано, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы. Напомним (см. [17]), что разрешимая группа называется ограниченной, если в ней существует конечный ряд подгрупп, каждый предыдущий член которого является нормальной подгруппой следующего его члена, и факторы которого являются ограниченными абелевыми группами. Абелева группа A называется ограниченной, если все примарные компоненты ее периодической части $\tau(A)$ конечны, фактор-группа $A/\tau(A)$ имеет конечный ранг и никакая фактор-группа группы $A/\tau(A)$ не содержит квазициклических подгрупп. Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой, и поэтому все подгруппы полициклических групп финитно отделимы.

Заметим, что условие финитной отделимости всех подгрупп данной группы является весьма жестким ограничением. Более естественным ограничением является финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп группы G. Если в группе G финитно отделима любая ее конечно порожденная подгруппа, то G называется LERF-группой. Исследование LERF-групп было начато М. Холлом в 1949 г. Он доказал, что все конечно порожденные подгруппы свободной группы финитно отделимы [28].

Большой интерес представляют исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп — обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Мы остановимся более подробно на обобщенных свободных произведениях, т. е. на свободных произведениях групп с объединенными подгруппами. Частным случаем этого понятия является понятие обычного свободного произведения групп.

Для свободных произведений групп все перечисленные выше аппроксимационные свойства исследованы в полной мере. Так, было установлено, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых) групп финитно аппроксимируемо ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо) (см. [9, 27]). В [19] было доказано, что свободное произведение LERF-групп является LERF-группой.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$. Заметим, что если H и K — единичные подгруппы, то группа G представляет собой обычное свободное произведение групп A и B. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому можно считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее в некоторых случаях для группы G будем использовать более компактное обозначение

$$G = (A * B, H)$$

и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Укажем некоторые направления исследования аппроксимационных свойств таких обобщенных свободных произведений, а также приведем несколько результатов, полученных в этих направлениях и необходимых для дальнейшего изложения.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Такой подход к изучению аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп был применен Г. Баумслагом, который в 60-е годы прошлого века начал систематическое изучение финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп. В его статье [23] 1963 года был получен целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении, а также был намечен маршрут для дальнейших исследований аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Сначала Баумслаг доказывает, что если A и B конечны, то группа G финитно аппроксимируема. Заметим, что свободное произведение двух конечных p–групп с объединенной подгруппой быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой уже не обязано. Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для такого свободного произведения был получен Г. Хигманом [29]. Из этого критерия уже следует $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость свободных произведений конечных p–групп с циклической или центральной объединенной подгруппой.

Следующий шаг, сделанный Г. Баумслагом, состоял в том, что требование конечности свободных множителей A и B было ослаблено до требования конечности объединенной подгруппы H. Баумслаг [23] доказал, что свободное произведение G финитно аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H является финитно аппроксимируемой группой. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость. Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой получен в [1]. С другой стороны, в работе [9] доказано, что свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости групп A и B наследуется группой G при условии, что подгруппа H конечна. В частности, свободное произведение двух полициклических групп с конечной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо для каждого простого p. Аналогичный результат будет справедлив и для LERF-групп (см. [22]): свободное произведение двух LERF-групп с конечной объединенной подгруппой является LERF-группой.

Приведем теперь несколько результатов, касающихся аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп, полученных при дополнительном предположении о цикличности объединенной подгруппы. Существуют примеры, показывающие, что свободное произведение финитно аппроксимируемых групп с циклической объединенной подгруппой не всегда финитно аппроксимируемо. Однако Баумслаг [23] показал, что если A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, а объединенная подгруппа H циклическая, то группа G финитно аппроксимируема. Позже этот результат был обобщен Д. Дайер [25] на случай, когда A и B — полициклические группы.

Выше говорилось, что понятие разрешимой группы конечного ранга является обобщением понятия полициклической группы. Другим обобщением этого понятия служит понятие конечно порожденной группы конечного ранга. В работе Д. Н. Азарова [10] исследуется финитная аппроксимируемость обобщенных свободных произведений конечно порожденных групп конечного ранга. Результаты этой работы будут сформулированы ниже, и они тесно связаны со следующим результатом, доказанным М. Ширвани [39]. Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $H \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная отделимость подгруппы H в группах A и B. В [37] доказано, что все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга являются конечными расширениями разрешимых групп и, следовательно, удовлетворяют нетривиальному тождеству. Поэтому если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, $H \neq A$ и $H \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная отделимость подгруппы H в группах A и B. С другой стороны, в работе [10] приводится пример, показывающий, что свободное произведение двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга с финитно отделимой объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Тем не менее, там же доказывается, что если A и B — финитно аппроксимируемые конечно порожденные группы конечного ранга, а подгруппа H циклическая, то ее финитная отделимость в группах A и B является и достаточным условием финитной аппроксимируемости группы G. Частным случаем этого результата является упоминавшееся выше утверждение Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения полициклических групп с циклической объединенной подгруппой.

Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с циклической объединенной подгруппой был получен в работе [6].

В предположении, что A и B — свободные группы, а объединенная подгруппа H циклична, в [23] доказывается, что группа G финитно аппроксимируема. Более того, группа G в этом случае является еще и LERF-группой (см. [24]). Однако быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой она уже не обязана. Достаточное условие $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости такого свободного произведения было получено в работе [26]. Критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения свободных групп с циклической объединенной подгруппой был получен независимо в статьях [2] и [34].

В работе [32] рассмотрена ситуация, когда группы A и B $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы, а подгруппа H циклична. Показано, что в случае, когда H конечна, группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Также здесь доказывается, что в случае бесконечной H для $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G достаточно, чтобы подгруппа H была $\mathcal{F}_p$–отделимой в группах A и B.

Рассмотрим теперь случай, когда объединенная подгруппа H имеет в группах A и B конечный индекс. Если A и B — полициклические группы, то группа G может и не быть финитно аппроксимируемой. Демонстрирующий это пример можно найти в [10]. Критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с объединенной подгруппой конечного индекса был получен в работе Д. Н. Азарова [8]. Там же доказано, что для такого свободного произведения условие финитной аппроксимируемости равносильно условию почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для всех простых p. Далее в работе [10] эти результаты были распространены на случай, когда свободные сомножители являются конечно порожденными финитно аппроксимируемыми группами конечного ранга.

Еще одним естественным ограничением, накладываемым на подгруппу H, является ее нормальность в группах A и B. В [22] было доказано, что если группы A и B являются полициклическими, а подгруппа H нормальна в группах A и B, то G является LERF-группой. В качестве частного случая этого утверждения можно рассматривать полученный ранее результат Баумслага. В [23] он доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой финитно аппроксимируемо. Рассматривая более общий случай, когда группы A и B являются конечно порожденными финитно аппроксимируемыми группами конечного ранга, и предполагая, что $A \neq H \neq B$, Д. Н. Азаров в [10] доказал, что финитная аппроксимируемость группы G равносильна финитной отделимости подгруппы H в группах A и B. Частным случаем этой теоремы является упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Заметим еще, что этот результат Баумслага не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми группами и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой.

В статье [29] Хигман доказал, что свободное произведение G конечных p–групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда подгруппа группы автоморфизмов группы H, состоящая из всех ограничений на H внутренних автоморфизмов группы G, является p–группой. Для свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп с нормальным объединенением в работах [20] и [35] были получены достаточные условия $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости. Однако в целом случай нормальной объединенной подгруппы исследован в меньшей степени по сравнению со случаем циклической объединенной подгруппы. Настоящая диссертация посвящена исследованию аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп в случае, когда объединенная подгруппа нормальна.

Еще более жестким требованием является центральность объединенной подгруппы H в свободных множителях A и B. При этом условии было получено несколько результатов об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G. Из упомянутого выше результата Хигмана [29] следует, что свободное произведение двух конечных p–групп с центральной объединенной подгруппой $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо. В статье [35] был получен критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G в случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, а объединенная подгруппа H содержится в центрах A и B.

Степень разработанности темы исследования

Во второй половине двадцатого века исследования аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп выделились в самостоятельное интенсивно развивающееся научное направление. Одной из первых и наиболее значимых в этом направлении работ стала уже упоминавшаяся выше статья Г. Баумслага [23]. В ней автор, изучая свойство финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп, по сути разработал методологию для дальнейших исследований. Кроме того, позже выяснилось, что эта методология подходит и для исследования других аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп. Многие дальнейшие результаты в этом напрявлении в той или иной степени являются развитием идей Баумслага.

Основу данной диссертационной работы составляют исследования свойств финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений групп. Из перечисленных выше результатов видно, что свойство финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений изучено уже достаточно хорошо. Однако при переходе от него к $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости возникает много трудностей. Более слабое свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости исследовано еще в меньшей степени. Недостаточно исследовано и более специфическое по сравнению с финитной аппроксимируемостью свойство LERF.

В качестве центрального объекта для изучения в данной работе выбраны свободные произведения групп с нормальными объединениями. Из имеющихся на данный момент результатов (см. [10, 20, 22, 23, 29]) можно сделать вывод, что исследования аппроксимационных свойств таких обобщенных свободных произведений еще далеки от завершения, и поэтому могут быть продолжены в различных направлениях.

Цели и задачи

Пусть, как и выше,

$$G = (A * B, H)$$

— свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Выше говорилось, что аппроксимационные свойства группы G изучаются при различных ограничениях, накладываемых на подгруппы A, B и H. Именно такой подход был использован при получении всех указанных ранее результатов о различных аппроксимационных свойствах группы G.

Целью данной работы является изучение различных аппроксимационных свойств группы G при некоторых конкретных ограничениях на подгруппы A, B и H. Наибольшее внимание уделяется случаю, когда объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, а свободные сомножители A и B являются разрешимыми группами конечного ранга.

Для достижения цели в ходе работы решаются задачи по исследованию в отдельности свойств финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и LERF для свободного произведения G групп A и B с нормальным объединением. В ходе этих исследований для группы G строятся необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и LERF.

Научная новизна

В первой главе диссертации полностью исследован вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением, а также рассматривается вопрос о финитной отделимости конечно порожденных подгрупп в таких свободных произведениях.

Еще в 1963 г. Г. Баумслаг [23] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой.

Как уже отмечалось выше, одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. В первой главе диссертации приводится пример, показывающий, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Основным результатом, доказанным в первой главе является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

2. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.

В связи с первым пунктом данной теоремы заметим следующее. Необходимость в этом утверждении имеет место даже без предположения о конечности ранга групп A и B (см. [39]). Однако достаточность в этом утверждении уже не может быть доказана без предположения о конечности ранга групп A и B. Соответствующий пример построен в разделе 1.5 первой главы данной работы.

Так как почти полициклические группы финитно аппроксимируемы, и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [36, п. 1.3.10]), то непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат Р. Олленби и Р. Грегорака [22].

Следствие 1.1. *Пусть G — свободное произведение почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B, то все конечно порож-*

денные подгруппы группы G финитно отделимы, и в частности группа G финитно аппроксимируема.

Частным случаем этого утверждения является упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением.

Так как конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга почти разрешимы (см. [37]), то еще одним следствием теоремы 1 является следующее утверждение, доказанное ранее в статье Д. Н. Азарова [10].

Следствие 1.2. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Помимо полициклических групп существует много других разрешимых групп конечного ранга, в которых все подгруппы финитно отделимы. Примеры такого рода можно найти в классе ограниченных разрешимых групп. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [17], где доказывается, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы. Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой группой. Поэтому следующее утверждение, доказанное в первой главе диссертации, является обобщением указанного выше результата Олленби и Грегорака.

Пусть G — свободное произведение почти ограниченных разрешимых групп A и B с объединенной подгруппой H. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в группах A и B, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

В действительности это утверждение является также и обобщением пункта 2 теоремы 1, поскольку любая разрешимая группа конечного ранга, в которой все подгруппы финитно отделимы, является ограниченной разрешимой группой. Доказательство этого факта приводится в разделе 1.4 настоящей работы.

Рассмотрим теперь другие аппроксимационные свойства свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением. Прежде всего заметим, что упомянутый выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости такого свободного произведения не может быть распространен на аппроксимируемость конечными p–группами. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми группами, и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. Соответствующий пример приведен в разделе 2.1 второй главы диссертации. Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Во второй главе диссертации доказывается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.*

Нетривиальное доказательство этой теоремы основано на использовании некоторых весьма тонких свойств полициклических групп, которые доказаны во второй главе и представляют собой усиления упомянутого выше результата А. Л. Шмелькина [21]. Простым частным случаем теоремы 2 является результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением.

В третьей главе рассматриваются свободные произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением. Так как нильпотентные группы являются разрешимыми, то в силу пункта 1 теоремы 1 свободное произведение G двух финитно аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с A и B, финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. В третьей главе диссертации доказывается аналогичный результат для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.*

Заметим, что для $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости подобный результат уже не имеет места, поскольку даже свободное произведение двух конечных p–групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой. Соответствующий пример приведен в разделе 4.1 четвертой главы диссертации.

В работе [21] было доказано, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. В частности, этим свойством обладает любая конечно порожденная нильпотентная группа. Поэтому в качестве следствия из теоремы 3 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.*

Заметим, что это утверждение является также и следствием теоремы 2.

Пока остается нерешенным следующий вопрос: можно ли обобщить теорему 3 (и одновременно теорему 2), если в ней ослабить условие нильпотентности групп A и B до условия разрешимости групп A и B.

В четвертой главе диссертации сохраняется требование нильпотентности и конечности ранга для групп A и B, а условие нормальности подгруппы H в группах A и B заменяется более жестким условием, которое состоит в том, что H содержится в центрах групп A и B. При этих более жестких ограничениях удается получить критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G, и даже критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G, где π — произвольное множество простых чисел. Этот критерий, доказанный в четвертой главе, формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующее утверждение. Свободное произведение двух конечных p–групп с центральным объединением $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо. Как уже отмечалось, это утверждение является также и следствием упомянутого выше критерия Хигмана $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости обобщенного свободного произведения конечных p–групп [29].

Хорошо известно и легко проверяется, что конечно порожденная нильпотентная группа A $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(A)$ является π–группой (см. [27]). Поэтому еще одним следствием из теоремы 4 является следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы, тогда и только тогда, когда периодические части групп A/H и B/H являются π–группами.*

Частным случаем этого утверждения является теорема 4.10 из [35], доказанная для множества π, состоящего из одного простого числа p.

Еще одним частным случаем следствия 4.1 является следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть группа G имеет представление $\langle a, b; a^m = b^n\rangle$, где m и n — целые числа такие, что $|m|, |n| > 1$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда m и n являются π–числами.*

Частным случаем этого утверждения является теорема 1.1 из [33], доказанная для множества π, состоящего из одного простого числа p.

Ранее говорилось, что необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) обобщенного свободного произведения групп является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость) его свободных сомножителей. Выясним теперь, при каких обстоятельствах свободные сомножители обобщенных свободных произведений, рассматриваемых в перечисленных выше основных результатах диссертации, являются финитно аппроксимируемыми ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми) группами.

Для разрешимых групп конечного ранга критерий финитной аппроксимируемости был получен в работе Д. Робинсона [36]. Этот результат был сформулирован выше. Для нильпотентных групп конечного ранга известен еще и критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости [7], который формулируется следующим образом. Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов отличных от 1, т. е. таких элементов $a \neq 1$, что уравнение $x^{p^n} = a$ разрешимо при всех целых положительных n. В третьей главе диссертации доказан аналогичный критерий для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости. Приведем формулировку этого результата.

Нильпотентная группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов бесконечного порядка и ее периодическая часть конечна.

В четвертой главе настоящей работы доказан еще и критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости для нильпотентной группы конечного ранга, где π — произвольное множество простых чисел. Этот критерий формулируется следующим образом.

Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π–полных элементов отличных от 1.

Элемент a группы G мы называем π–полным, если для любого π–числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G.

Все перечисленные основные результаты данной диссертационной работы являются новыми и опубликованы в статьях [40] – [53].

Теоретическая и практическая значимость работы

Данная диссертационная работа является полностью теоретической. Все полученные в ней результаты относятся к направлению теории групп, занимающемуся изучением аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп. Многие из них являются обобщениями и усилениями известных результатов. Все результаты данной работы также могут быть использованы при дальнейших исследованиях в данной области.

Методология и методы исследования

В ходе проведенных исследований аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп используется методология, предложенная Г. Баумслагом в его работе [23]. В оригинале она была использована для изучения свойства финитной аппроксимируемости, однако в действительности может быть использована и в исследованиях других аппроксимационных свойств свободных произведений групп с объединенными подгруппами.

Кроме того, в работе используются некоторые хорошо известные свойства обобщенных свободных произведений групп, связанные с понятием несократимой записи элемента (см., напр., [38]).

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся все основные результаты, полученные в данной диссертации, и в частности, сформулированные выше теоремы 1, 2, 3, 4.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты работы докладывались на алгебраическом семинаре под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского и А. А. Клячко (МГУ, 2013 г.), на семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (ИвГУ, 2011–2013 гг.), на IX Международной научной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 2012 г.), на IX Международной школе-конференции по теории групп (Владикавказ, 2012 г.) и на Научных конференциях фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука в классическом университете" (Иваново, ИвГУ, 2011–2013 гг.).

ГЛАВА 1

О финитной аппроксимируемости и финитной отделимости подгрупп свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой

1.1. Основные результаты первой главы

В этой главе будет исследован вопрос о финитной аппроксимируемости свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением. Кроме того, здесь рассматривается свойство финитной отделимости конечно порожденных подгрупп для некоторых обобщенных свободных произведений разрешимых групп.

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для нее выполняются следующие равносильные условия.

1. Для каждого неединичного элемента a из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

2. Пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

3. Для каждого неединичного элемента a из G в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, не содержащая a.

Подгруппа H группы G называется финитно отделимой, если выполняется хотя бы одно из следующих условий.

1. Для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H.

2. Пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G, содержащих H, совпадает с подгруппой H.

3. Для каждого элемента a группы G, не принадлежащего H, в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что a не принадлежит подгруппе HN.

Несложно проверить, что в действительности все эти три условия равносильны между собой. Очевидно также, что если H — нормальная подгруппа группы G, то ее финитная отделимость в G равносильна финитной аппроксимируемости фактор-группы G/H.

Перейдем теперь к обобщенным свободным произведениям групп. Пусть

$$G = (A * B, H)$$

— свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы G является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости, накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения как правило накладываются и на объединенную подгруппу H. Примерами таких ограничений могут служить конечность подгруппы H, ее нормальность в группах A и B, а также конечность индекса подгруппы H в A и B. Так, Г. Баумслаг [23] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппа H конечна, то группа G финитно аппроксимируема.

Много примеров финитно аппроксимируемых групп существует среди разрешимых групп. Классическими примерами такого рода являются все полициклические группы. Их финитная аппроксимируемость была установлена К. Гиршем [30].

В работе [23] Г. Баумслаг получил следующий результат.

Теорема 1.1. *Свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой.*

В работах [5, 8, 22] доказаны другие свойства обобщенных свободных произведений полициклических групп, сформулированные в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Пусть G — свободное произведение двух почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B.*

1. Если H — подгруппа конечного индекса в A и B, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B.

2. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если в ней существует подгруппа конечного индекса, обладающая этим свойством.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного специального ранга (в другой терминологии — группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами (наименьшее такое r будем называть рангом группы). Это понятие, а также термин "конечный специальный ранг" введено в статье [16] А. И. Мальцева. Здесь мы используем термин "конечный ранг" вместо терминов "конечный специальный ранг" и "конечный ранг Прюфера".

Легко видеть, что класс всех групп конечного ранга замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений.

Приведенные ниже примеры показывают, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для такого свободного произведения нами был получен следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в A и B. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

2. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.

В связи с пунктом 1 теоремы 1.3 заметим следующее. Необходимость в этом утверждении имеет место даже без предположения о конечности ранга групп A и B (см. [39]). Однако достаточность в этом утверждении уже не может быть доказана без предположения о конечности ранга групп A и B. Соответствующий пример построен в разделе 1.5.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в разделе 1.3. Хорошо известно, что полициклические группы финитно аппроксимируемы, и в них все подгруппы финитно отделимы (см., напр., [36, п. 1.3.10]). Поэтому теорема 1.1 и пункт 2 теоремы 1.2 являются непосредственными следствиями теоремы 1.3.

Помимо полициклических групп существует много других разрешимых групп конечного ранга, в которых все подгруппы финитно отделимы. Примеры такого рода можно найти в классе ограниченных разрешимых групп. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [17], где доказывается, что в ограниченных разрешимых группах все подгруппы финитно отделимы.

Напомним, что разрешимая группа называется ограниченной, если в ней существует субнормальный ряд (т. е. конечный ряд подгрупп, каждый предыдущий член которого нормален в следующем его члене) с факторами, являющимися ограниченными абелевыми группами. Абелева группа A называется ограниченной, если все примарные компоненты ее периодической части $\tau(A)$ конечны, фактор-группа $A/\tau(A)$ имеет конечный ранг и никакая фактор-группа группы $A/\tau(A)$ не содержит квазициклических подгрупп. В этой главе будет доказано, что в свободном произведении двух ограниченных разрешимых групп с нормальной объединенной подгруппой все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. В действительности нами доказан даже более общий результат.

Теорема 1.4. *Пусть G — свободное произведение почти ограниченных разрешимых групп A и B с объединенной подгруппой H. Если в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в группах A и B, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Очевидно, что любая полициклическая группа является ограниченной разрешимой группой. Поэтому теорема 1.1 и пункт 2 теоремы 1.2 также являются непосредственными следствиями теоремы 1.4.

Существуют примеры, показывающие, что ни один из классов разрешимых групп конечного ранга и ограниченных разрешимых групп полностью не входит в другой. Однако если требовать от разрешимой группы конечного ранга, чтобы все ее подгруппы были финитно отделимыми, то такая группа уже будет ограниченной разрешимой. Поэтому второе утверждение теоремы 1.3 является частным случаем теоремы 1.4. Доказательство этого факта, а также доказательство теоремы 1.4 будут приведены в разделе 1.4.

Заметим теперь, что свободное произведение G двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B абелевы. Действительно, существуют финитно аппроксимируемые абелевы группы конечного ранга, в которых не все подгруппы финитно отделимы. Примером такого рода может служить аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$ p–ичных дробей, где p — простое число. В этой группе подгруппа $\mathbb{Z}$ целых чисел не является финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Q}_p$ с объединенной подгруппой $\mathbb{Z}$ не будет финитно аппроксимируемой группой. В [36, п. 11.1.4] построен пример конечно порожденной финитно аппроксимируемой разрешимой группы конечного ранга, в которой существует нормальная подгруппа, не являющаяся финитно отделимой. Поэтому свободное произведение финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой не обязано быть финитно аппроксимируемой группой даже в случае, когда A и B конечно порождены.

В связи с этим замечанием напомним один из результатов работы [10].

Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Этот результат Д. Н. Азарова является частным случаем пункта 1 теоремы 1.3, так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима [37].

1.2. Вспомогательные утверждения

Предложение 1.1. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть* *группа G финитно аппроксимируема. Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, то подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Это утверждение даже в более сильном виде доказано в работе [39, теор. 1].

Напомним, что элемент a группы G называется полным, если для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется полной, если все ее элементы являются полными.

Следуя Д. Робинсону и Дж. Ленноксу [36], группу G будем называть редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа не содержит полных элементов отличных от 1, и поэтому редуцирована. Для разрешимых групп конечного ранга имеет место и обратное утверждение.

Предложение 1.2. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Это предложение, даже в более общем виде, доказано в [36, п. 5.3.2].

Аналогичное утверждение будет верно и для почти разрешимых групп конечного ранга.

Предложение 1.3. *Почти разрешимая группа G конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Доказательство. Необходимость в этом предложении очевидна. Докажем достаточность. Пусть группа G редуцирована. Обозначим через S разрешимую подгруппу группы G конечного индекса. Тогда S — редуцированная разрешимая группа конечного ранга. Поэтому согласно предложению 1.2 она финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что индекс $[G : S]$ конечен следует, что группа G финитно аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 1.4. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть H — конечная нормальная подгруппа группы G и фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. В силу предложения 1.3

для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно установить ее редуцированность, т. е. что любая ее полная подгруппа R является единичной.

Подгруппа RH/H группы G/H является полной. Так как по предложению 1.3 группа G/H редуцирована, то $RH/H = 1$. Поэтому $R \subseteq H$ и, следовательно, R конечна. Таким образом, R — конечная полная группа и, значит, $R = 1$. Предложение доказано.

Аппроксимантом группы G будем называть ее подгруппу $\sigma(G)$, совпадающую с пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Очевидно, что $\sigma(G)$ — нормальная подгруппа группы G, и что она совпадает с пересечением всех подгрупп конечного индекса группы G.

Предложение 1.5. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — ее конечная подгруппа. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней финитно отделима подгруппа H.*

Доказательство. Очевидно, что в финитно аппроксимируемой группе любое конечное подмножество финитно отделимо. Поэтому в доказательстве нуждается только достаточность.

Пусть подгруппа H финитно отделима в G. Тогда она совпадает с пересечением всех подгрупп конечного индекса группы G, содержащих H. Поэтому аппроксимант $\sigma(G)$ содержится в H и, значит, является конечной группой. Кроме того, легко видеть, что фактор-группа $G/\sigma(G)$ финитно аппроксимируема, поскольку подгруппа $\sigma(G)$ финитно отделима в группе G. Таким образом, G является расширением конечной группы $\sigma(G)$ с помощью финитно аппроксимируемой группы. В силу предложения 1.4 отсюда следует, что группа G финитно аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 1.6. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — ее подгруппа, и W — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G. Подгруппа H финитно отделима в группе G тогда и только тогда, когда подгруппа W финитно отделима в группе G.*

Доказательство. Пусть H финитно отделима в G. Очевидно, что это равносильно финитной отделимости подгруппы H/W в фактор-группе G/W. Согласно предложению 1.5, последний факт имеет место тогда и только тогда, когда фактор-группа G/W финитно аппроксимируема, т. е. когда подгруппа W финитно отделима в группе G. Предложение доказано.

Предложение 1.7. *Пусть G — периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены числом n. Если ранг r группы G конечен, то она сама конечна. Более того, $|G| \leq n^r$.*

Доказательство. Пусть M — конечное подмножество группы G. Тогда подгруппа H группы G, порожденная подмножеством M, порождается не более, чем r элементами. Так как H — периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены числом n, и H порождается не более чем r элементами, то

$$|H| \leq n^r,$$

и поэтому число элементов множества M не превосходит n^r. Таким образом, любое конечное подмножество группы G содержит не более чем n^r элементов. Следовательно, G — конечная группа и

$$|G| \leq n^r.$$

Предложение доказано.

Предложение 1.8. *Пусть G — периодическая почти разрешимая группа конечного ранга, порядки элементов которой ограничены. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Обозначим через S разрешимую подгруппу конечного индекса группы G. И пусть $\mathcal{R}$ — субнормальный ряд группы S с абелевыми факторами. Очевидно, что эти факторы являются периодическими абелевыми группами конечного ранга, и порядки их элементов ограничены. Поэтому в силу предложения 1.7 все эти факторы являются конечными группами и, следовательно, группа S конечна. Отсюда и из того, что S имеет конечный индекс в G вытекает, что и группа G конечна. Предложение доказано.

Очевидным следствием из этого предложения является следующее утверждение.

Предложение 1.9. *Пусть G^n — степенная подгруппа группы G, т. е. подгруппа, порожденная n–ми степенями всех элементов из G, где n — фик-*

сированное целое положительное число. Если G почти разрешимая группа конечного ранга, то фактор-группа G/G^n конечна.

Предложение 1.10. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Если в группах A и B финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы, то и в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [22, лемма 3].

1.3. Доказательство теоремы 1.3

Предложение 1.11. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H, отличной от A и B. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в G. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.*

Доказательство. Так как группа A почти разрешима, то в ней существует нормальная разрешимая подгруппа S конечного индекса. Пусть $[A:S]=m$. Тогда $A^m \subseteq S$. Так как S разрешима, то для некоторого натурального n она удовлетворяет коммутаторному тождеству

$$\delta_n(x_1,\, \ldots, x_{2^n}) = 1$$

(см. [11, с. 168]), где

$$\delta_0(x) = x,\ \delta_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2,$$

$$\delta_{n+1}(x_1,\, \ldots, x_{2^{n+1}}) = [\delta_n(x_1,\, \ldots, x_{2^n}),\, \delta_n(x_{2^n+1},\, \ldots, x_{2^{n+1}})].$$

Следовательно, группа A удовлетворяет тождеству

$$\delta_n(x_1^m,\, \ldots, x_{2^n}^m) = 1.$$

То же самое можно сказать и о группе B. Поэтому необходимость в доказываемом предложении обеспечивается предложением 1.1.

Докажем теперь достаточность. Пусть подгруппа H финитно отделима в группах A и B. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g из G указать гомоморфизм группы G на конечную группу, образ g относительно которого отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin W$. Так как подгруппа W нормальна в G и содержится в H, то фактор-группа G/W будет являться свободным произведением групп A/W и B/W с объединенной подгруппой H/W. Так как H финитно отделима в A и B, и W — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в A и B, то в силу предложения 1.6 подгруппа W финитно отделима в A и B, т. е. группы A/W и B/W финитно аппроксимируемы. Таким образом, G/W — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/W и B/W с конечной объединенной подгруппой H/W. Поэтому группа G/W финитно аппроксимируема. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/W.$$

Так как $g \notin W$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент группы G/W. Поскольку группа G/W финитно аппроксимируема, существует гомоморфизм ρ группы G/W на конечную группу такой, что образ $g\varepsilon$ относительно ρ отличен от 1. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in W$. Так как W — подгруппа финитно аппроксимируемой почти разрешимой группы A конечного ранга, то она сама является финитно аппроксимируемой почти разрешимой группой конечного ранга. Из финитной аппроксимируемости группы W следует существование в ней нормальной подгруппы N конечного индекса, не содержащей элемент g. Пусть $[W : N] = n$. Тогда $W^n \subseteq N$ и, значит, $g \notin W^n$. По предложению 1.9 подгруппа W^n имеет конечный индекс в W, а значит и в H. При этом подгруппа W^n нормальна в G, поскольку она характеристична в группе W, а W нормальна в группе G.

Рассмотрим фактор-группу G/W^n. Она является свободным произведением фактор-групп A/W^n и B/W^n с объединенной подгруппой H/W^n. Так как W^n — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в A и B, и H финитно отделима в A и B, то согласно передложению 1.6 подгруппа W^n финитно отделима в A и B, т. е. группы A/W^n и B/W^n финитно аппроксимируемы. Таким образом, G/W^n — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/W^n и B/W^n с конечной объединенной подгруппой H/W^n. Поэтому группа G/W^n финитно аппроксимируема. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/W^n.$$

Так как $g \notin W^n$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент группы G/W^n. Поэтому в силу финитной аппроксимируемости группы G/W^n следует, что существует гомоморфизм ρ группы G/W^n на конечную группу, образ элемента $g\varepsilon$ относительно которого отличен от 1. Таким образом, гомоморфизм $\varepsilon\rho$ является искомым гомоморфизмом. Предложение доказано.

Предложение 1.12. *Пусть G — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H. И пусть в группе H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в G. Если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы, то в группе G финитно отделимы все конечно порожденные подгруппы.*

Доказательство. Пусть в группах A и B все подгруппы финитно отделимы. И пусть X — конечно порожденная подгруппа группы G, g — элемент группы G, не принадлежащий X. Построим гомоморфизм группы G на конечную группу, образ элемента g относительно которого не принадлежит образу подгруппы X.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin XW$. Пусть

$$\varepsilon : G \to G/W$$

— естественный гомоморфизм. Тогда образ gW элемента g относительно ε не принадлежит образу XW/W подгруппы X относительно ε. Заметим, что фактор-группа G/W является свободным произведением групп A/W и B/W с конечной объединенной подгруппой H/W. Легко видеть, что в группах A/W и B/W все подгруппы финитно отделимы, поскольку финитно отделимы все подгруппы в группах A и B. Отсюда и из того, что подгруппа H/W конечна по предложению 1.10 следует, что в группе G/W все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Следовательно, так как XW/W — конечно порожденная подгруппа группы G/W и $gW \notin XW/W$, то существует гомоморфизм ρ группы G/W на конечную группу такой, что $(gW)\rho \notin (XW/W)\rho$. Тогда $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in XW$. В этом случае g можно записать в виде

$$g = xw, \tag{1.1}$$

где $x \in X$, $w \in W \setminus W \cap X$. Так как в группе A все подгруппы финитно отделимы, то и в ее подгруппе W все подгруппы, и в частности $W \cap X$, финитно отделимы. Поэтому для элемента w группы W, не принадлежащего $W \cap X$, в группе W существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $w \notin (W \cap X) \cdot N$. Пусть $[W : N] = n$. Тогда очевидно, что $W^n \subseteq N$ и

$$w \notin (W \cap X) \cdot W^n. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что $g \notin XW^n$. Действительно, допустим противное. Тогда элемент g представим в виде

$$g = x_1 w_1, \tag{1.3}$$

где $x_1 \in X$, $w_1 \in W^n$. Из (1.1) и (1.3) получаем:

$$xw = x_1 w_1,$$

откуда

$$x_1^{-1} x = w_1 w^{-1}.$$

Заметим, что левая часть последнего равенства принадлежит подгруппе X, а правая — подгруппе W. Поэтому обе они принадлежат подгруппе $W \cap X$. Обозначим элемент $w_1 w^{-1}$ подгруппы $W \cap X$ через a. Тогда

$$w = a^{-1} w_1.$$

Так как $a^{-1} \in W \cap X$, а $w_1 \in W^n$, то $w \in (W \cap X) \cdot W^n$. Получили противоречие с условием (1.2).

Таким образом, $g \notin XW^n$. Заметим, что подгруппа W^n имеет конечный индекс в группе W по предложению 1.9, и что W^n нормальна в группе G, поскольку она характеристична в W. Рассмотрим фактор-группу G/W^n. Она является свободным произведением групп A/W^n и B/W^n с конечной объединенной подгруппой H/W^n. Так как в группах A и B все подгруппы финитно отделимы, то и в фактор-группах A/W^n и B/W^n все подгруппы финитно отделимы. Поэтому согласно предложению 1.10 в группе G/W^n все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. При этом очевидно, что XW^n/W^n — конечно порожденная подгруппа группы G/W^n и $gW^n \notin XW^n/W^n$. Из последних двух обстоятельств получаем, что существует гомоморфизм ρ группы G/W^n на конечную группу, образ элемента gW^n относительно которого не принадлежит образу подгруппы XW^n/W^n.

Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/W^n.$$

Тогда $g\varepsilon = gW^n$, $X\varepsilon = XW^n/W^n$, и, следовательно, $g\varepsilon\rho \notin X\varepsilon\rho$. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм. Предложение доказано.

Справедливость теоремы 1.3 теперь следует из предложений 1.11 и 1.12.

1.4. Доказательство теоремы 1.4

Прежде чем доказывать теорему 1.4, приведем еще одно вспомогательное утверждение. А. И. Мальцев в упоминавшейся ранее работе [17, пункт 5] последовательно доказывает, что подгруппа ограниченной разрешимой группы сама ограниченная разрешимая, что степенная подгруппа ограниченной разрешимой группы имеет в ней конечный индекс, а также что все подгруппы ограниченной разрешимой группы финитно отделимы в ней. В действительности эти свойства имеют место и для произвольной почти ограниченной разрешимой группы.

Предложение 1.13. *Пусть G — почти ограниченная разрешимая группа. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Любая подгруппа группы G является почти ограниченной разрешимой группой.

2. Пусть G^n — степенная подгруппа группы G, где n — целое неотрицательное число. Тогда фактор-группа G/G^n конечна.

3. Все подгруппы группы G финитно отделимы.

Доказательство. Обозначим через S нормальную подгруппу конечного индекса группы G, являющуюся ограниченной разрешимой группой.

1. Пусть H — подгруппа группы G. Поскольку фактор-группа $H/H \cap S$ вложима в конечную группу G/S, то $H \cap S$ — нормальная подгруппа конечного

индекса группы H. При этом $H \cap S$ является ограниченной разрешимой группой как подгруппа группы S.

2. Так как S — ограниченная разрешимая группа, то S^n — ее подгруппа конечного индекса. Отсюда и из того, что индекс $[G : S]$ конечен следует, что подгруппа S^n является подгруппой конечного индекса группы G. А поскольку $S^n \leq G^n$, то индекс $[G : G^n]$ также конечен.

3. Финитная отделимость всех подгрупп группы G устанавливается с помощью следующего легко проверяемого утверждения. Если в группе все подгруппы финитно отделимы, то в любом ее конечном расширении все подгруппы финитно отделимы.

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть G — свободное произведение почти ограниченных разрешимых групп A и B с объединенной подгруппой H. И пусть в H существует подгруппа W конечного индекса, нормальная в группах A и B. Нам необходимо доказать, что произвольная конечно порожденная подгруппа X группы G финитно отделима в G.

Доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 1.12. Действительно, так как A и B — почти ограниченные разрешимые группы, то в них все подгруппы финитно отделимы. Поэтому все рассуждения из доказательства предложения 1.12 будут справедливы и в условиях теоремы 1.4. Отличаться будет только обоснование того факта, что степенная подгруппа W^n имеет конечный индекс в группе W. В данном случае это следует из пункта 2 предложения 1.13, поскольку в силу пункта 1 предложения 1.13 подгруппа W группы A является почти ограниченной разрешимой группой. Теорема доказана.

Теперь докажем, что второе утверждение теоремы 1.3 является частным случаем теоремы 1.4. Это будет следовать из предложения 1.15. Но прежде рассмотрим еще один вспомогательный результат.

Предложение 1.14. *Пусть A — финитно аппроксимируемая абелева p–группа конечного ранга. Тогда группа A конечна.*

Доказательство. Для каждого целого положительного числа k через A_k будем обозначать множество всех элементов a группы A таких, что $a^{p^k} = 1$. Тогда в силу предложения 1.7 A_k — конечная группа. Поэтому группа A не более чем счетна. Так как A финитно аппроксимируема, то в ней нет элементов бесконечной p–высоты отличных от единицы, т. е. таких неединичных элементов a, из которых в группе A извлекается корень степени p^k для любого целого положительного k. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера (см., напр., [11, с. 87]) следует, что группа A раскладывается в прямое произведение циклических p–групп. Отсюда и из конечности ранга группы A следует, что группа A конечна. Предложение доказано.

Предложение 1.15. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга. Если в группе G все подгруппы финитно отделимы, то она является ограниченной разрешимой.*

Доказательство. Рассмотрим в группе G нормальный ряд $\mathcal{R}$ (т. е. такой конечный ряд подгрупп, каждая из которых нормальна в G) с абелевыми факторами. Так как группа G имеет конечный ранг, и все ее подгруппы финитно отделимы, то все члены ряда $\mathcal{R}$ обладают этими же свойствами, и поэтому произвольный фактор A ряда $\mathcal{R}$ является финитно аппроксимируемой абелевой группой конечного ранга. Покажем, что A — ограниченная абелева группа.

Очевидно, что периодическая часть $\tau(A)$ группы A является финитно аппроксимируемой абелевой группой конечного ранга. Поэтому в силу предложения 1.14 все ее примарные компоненты конечны. Поскольку A — группа конечного ранга, то и ее фактор-группа $A/\tau(A)$ является группой конечного ранга. Так как в группе G все подгруппы финитно отделимы, то и в группе A, а значит и в группе $A/\tau(A)$, все подгруппы финитно отделимы. Поэтому все фактор-группы группы $A/\tau(A)$ финитно аппроксимируемы. Отсюда и из того, что квазициклическая группа не является финитно аппроксимируемой следует, что никакая фактор-группа группы $A/\tau(A)$ не содержит квазициклических подгрупп. Предложение доказано.

Заметим наконец, что область применения теоремы 1.4 шире, чем область применения пункта 2 теоремы 1.3, так как ограниченная разрешимая группа может не быть группой конечного ранга. Пример такой группы может быть построен следующим образом. Рассмотрим множество всех простых чисел $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Для каждого натурального числа k обозначим через A_k прямое произведение k экземпляров циклической группы порядка p_k. И пусть A — прямое произведение всех A_k. Тогда A — ограниченная абелева группа бесконечного ранга.

1.5. О существенности требования конечности ранга в теореме 1.3

В этом разделе покажем, что требование конечности ранга, накладываемое на группы A и B в первом пункте теоремы 1.3, существенно. А именно, покажем, что свободное произведение двух финитно аппроксимируемых разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами может не быть финитно аппроксимируемой группой даже в том случае, когда объединенные подгруппы финитно отделимы в соответствующих свободных сомножителях.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, а π' — его дополнение, причем π и π' не являются пустыми. И пусть

$$M = \{m_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

— множество всех π–чисел,

$$M' = \{n_j \mid j \in \mathcal{J}\}$$

— множество всех π'–чисел. Рассмотрим абелевы группы

$$A = \langle a_i \ \ (i \in I); \ a_i a_l = a_l a_i, \ a_i^{m_i} = a_l^{m_l} \ \ (i, l \in I)\rangle$$

и

$$B = \langle b_j \ \ (j \in J); \ b_j b_l = b_l b_j, \ b_j^{n_j} = b_l^{n_l} \ \ (j, l \in J)\rangle.$$

Обозначим через h и k элементы групп A и B, совпадающие с каждым из элементов $a_i^{m_i}$ и $b_j^{n_j}$ соответственно. Тогда для любого π–числа m и для любого π'– числа n уравнения

$$x^m = h \tag{1.4}$$

и

$$y^n = k \tag{1.5}$$

разрешимы в группах A и B соответственно.

Рассмотрим в группах A и B циклические подгруппы $H = (h)$ и $K = (k)$. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ, продолжающего отображение $h \mapsto k$. Покажем, что группы A и B финитно аппроксимируемы, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно, но группа G при этом не является финитно аппроксимируемой.

Очевидно, что фактор-группа A/H имеет представление

$$A/H = \langle a_i \ \ (i \in I); \ a_i a_l = a_l a_i, \ a_i^{m_i} = 1 \ \ (i, l \in I) \rangle, \tag{1.6}$$

и поэтому может быть представлена как прямое произведение всевозможных циклических π–групп. Хорошо известно и легко проверяется, что прямое произведение любого семейства финитно аппроксимируемых групп финитно аппроксимируемо. Из последних двух предложений следует, что фактор-группа A/H финитно аппроксимируема или, что равносильно, подгруппа H финитно отделима в группе A. Аналогичным образом может быть установлен тот факт, что подгруппа K финитно отделима в группе B.

Покажем, что группа A финитно аппроксимируема. Для этого построим для каждого неединичного элемента a из A гомоморфизм группы A на конечную группу, при котором образ a будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin H$. Пусть

$$\varepsilon : A \to A/H$$

— естественный гомоморфизм. Тогда образ элемента a относительно ε отличен от 1. Выше было показано, что фактор-группа A/H финитно аппроксимируема. Поэтому существует такой гомоморфизм ψ группы A/H на некоторую конечную группу, что $a\varepsilon\psi \neq 1$. Очевидно, что $\varepsilon\psi$ — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $a \in H$. Пусть q — некоторое π'–число. Так как a — неединичный элемент бесконечной циклической группы H, то существует такое целое положительное число r, что a не принадлежит подгруппе $L = H^{q^r}$ группы H. Очевидно, что H/L — конечная q–группа. Так как группа A/H периодическая, а группа H/L конечна, то группа A/L также является периодической. Кроме того, подгруппа H/L совпадает q–компонентой группы A/L. Действительно, пусть xL — q–элемент группы A/L. Тогда элемент xH является q–элементом группы A/H. Отсюда и из того, что A/H — π–группа (см. (1.6)), а q — π'–число следует, что $xH = 1$, т. е. $xL \in H/L$. Таким образом, q–компонента группы A/L содержится в H/L. А поскольку обратное включение очевидно (так как H/L — q–группа), то H/L совпадает с q–компонентой группы A/L.

Хорошо известно (см., напр., [11, п. 10.1.2]), что любая периодическая абелева группа раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому H/L выделяется в A/L прямым множителем, т. е.

$$A/L = H/L \times V/L.$$

Пусть

$$\sigma : A/L \to H/L$$

— проекция группы A/L на ее q–компоненту H/L. Так как aL — неединичный элемент группы H/L, то $(aL)\sigma \neq 1$. Рассмотрим теперь естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : A \to A/L.$$

Тогда гомоморфизм $\varepsilon\sigma$ отображает группу A на конечную группу H/L и

$$a\varepsilon\sigma = (aL)\sigma \neq 1.$$

Поэтому $\varepsilon\sigma$ — искомый гомоморфизм.

Таким образом, группа A финитно аппроксимируема. Аналогичными рассуждениями может быть доказана финитная аппроксимируемость группы B.

Покажем теперь, что группа G не является финитно аппроксимируемой. Пусть ψ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную группу P. И пусть s — порядок группы P. Тогда s можно записать в виде

$$s = m \cdot n,$$

где m — π–число, n — π'–число. Так как в группе G выполняется равенство $h = k$, и так как в группе G разрешимы уравнения (1.4) и (1.5), то $a^m = h = b^n$ для подходящих элементов a и b группы G. При этом выполняются равенства

$$(h\psi)^m = (b^n\psi)^m = (b\psi)^s = 1$$

и

$$(h\psi)^n = (a^m\psi)^n = (a\psi)^s = 1.$$

Отсюда и из того, что числа m и n взаимно просты следует, что $h\psi = 1$. Поэтому группа G не является финитно аппроксимируемой.

ГЛАВА 2

О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой

2.1. Основные результаты второй главы

В первой главе мы рассмотрели свойство финитной аппроксимируемости групп. Рассмотрим теперь свойство аппроксимируемости конечными p–группами. Пусть p — простое число. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой конечными p–группами (или, короче, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой), если для нее выполняются следующие равносильные условия.

1. Для каждого неединичного элемента a из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную p–группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

2. Пересечение всех нормальных подгрупп конечного p–индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

3. Для каждого неединичного элемента a из G в группе G существует нормальная подгруппа N конечного p–индекса, не содержащая a.

В этой главе рассмотрим свойство почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Более того, А. Л. Шмелькин [21] доказал, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. Однако быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой такая группа уже не обязана.

Пусть

$$G = (A * B, H)$$

— свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными. Ранее во введении упоминалось, что при исследованиях перечисленных выше аппроксимационных свойств группы G на группы A, B и H накладываются различные дополнительные ограничения.

В рамках данной работы мы продолжаем рассматривать свободные произведения групп с нормальным объединением. Г. Баумслаг в [23] доказал, что если группы A и B являются полициклическими, а подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G финитно аппроксимируема. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми группами, и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. Соответствующий пример будет приведен ниже.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью. Нами был получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Свободное произведение G полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой для любого простого числа p.*

Доказательство этой теоремы приведено в пункте 2.3.

Хорошо известно, что произвольная конечно порожденная нильпотентная группа является полициклической. Поэтому непосредственным следствием теоремы 2.1 является следующее утверждение.

Следствие. *Свободное произведение G конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой для любого простого числа p.*

Это следствие является частным случаем доказанного в третьей главе критерия почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения двух нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением.

Заметим теперь, что свободное произведение двух полициклических $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой даже в случае, когда его свободные сомножители циклические. Действительно, пусть $A = \langle a \rangle$ и $B = \langle b \rangle$ — циклические группы, $H = \langle a^m \rangle$ и $K = \langle b^n \rangle$ — их подгруппы (m и n — ненулевые целые числа), и φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, продолжающий отображение $a^m \to b^n$. И пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K. В работе [33, теор. 1.1] было доказано, что группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда $|m| = 1$ или $|n| = 1$, или числа $|m|$ и $|n|$ являются степенями числа p. Этот факт также будет следовать и из результатов четвертой главы данной диссертации.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в пункте 2.3. Но сначала нам потребуется ряд предварительных утверждений, которые изложены в пункте 2.2.

2.2. Предварительные утверждения

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобятся некоторые специфические свойства полициклических групп, которые будут сформулированы в предложениях 2.5 и 2.6. Отметим, что предложение 2.5 обобщает упоминавшийся выше результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости полициклических групп и представляет самостоятельный интерес. Прежде, чем перейти к этим результатам, рассмотрим еще несколько вспомогательных утверждений.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. Если A — конечная p–группа, то ее подгруппа $A'A^p$ очевидно совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A. Очевидно, что фактор-группа $A/A'A^p$ является периодической абелевой группой. Поэтому если группа A конечно порождена (например, когда A полициклическая), то ее фактор-группа $A/A'A^p$ конечна.

Предложение 2.1. *Пусть A — конечная p–группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы A. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Γ является p–группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [18, с. 562]).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы G, B —

подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$. Очевидно, что $G/A \cong B$, и что если A — конечная группа, то $[G : B] = |A|$.

Некоторые достаточные условия аппроксимируемости конечными p–группами расщепляемых расширений будут доказаны ниже в предложениях 2.2 и 2.4. Эти предложения принадлежат Д. Н. Азарову и не опубликованы. Мы приводим эти результаты с подробными доказательствами.

Предложение 2.2. *Пусть G — расщепляемое расширение конечной p–группы A с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы B. И пусть взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Для каждого элемента x из G через $\widehat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы G, действующий по правилу: $g\widehat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G. И пусть

$$\mathrm{Aut}_{B}(A) = \{\widehat{x}|_{A} : x \in B\}$$

— множество ограничений на подгруппу A всех внутренних автоморфизмов группы G, производимых элементами из B. Это множество является подгруппой в группе всех автоморфизмов группы A. Так как $[B, A] \subseteq A'A^p$, то все автоморфизмы из $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Следовательно, в силу предложения 2.1 $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ — конечная p–группа.

Пусть

$$\theta : B \to \mathrm{Aut}_{B}(A)$$

— гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\widehat{b}$ группы G. И пусть $H = \mathrm{Ker}\theta$. Так как $\mathrm{Aut}_{B}(A)$ — конечная p–группа, то H — нормальная подгруппа группы B конечного p–индекса. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. Из последних двух обстоятельств получаем, что H — подгруппа конечного p–индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, поскольку содержится в группе B. Заметим еще, что подгруппа H нормальна в группе G, поскольку она поэлементно перестановочна с подгруппой A и нормальна в подгруппе B.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы H с помощью конечной p–группы G/H. Отсюда следует (см., напр., [27, лемма 1.5]), что группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 2.3. *Пусть G — группа, F — ее нормальная конечно порожденная подгруппа, M — нормальная подгруппа конечного индекса (конечного p–индекса) группы F. И пусть N — пересечение всех подгрупп M^g группы G, сопряженных с M $(g \in G)$. Тогда подгруппа N имеет конечный индекс (конечный p–индекс) в группе F и нормальна в группе G.*

Доказательство. Очевидно, что подгруппа N нормальна в группе G. Так как подгруппа M содержится в группе F, а F нормальна в группе G, то все подгруппы M^g (а значит и подгруппа N) содержатся в группе F. Более того, нетрудно понять, что все M^g нормальны в F и имеют в ней индексы, совпадающие с $[F : M]$. Заметим, что поскольку группа F конечно порождена, то в силу теоремы М. Холла (см., напр., [13, с. 250]) число различных подгрупп M^g конечно. Отсюда и из теоремы Пуанкаре [13, с. 53] (теоремы Ремака [11, п. 4.3.9]) следует, что N — подгруппа конечного индекса (конечного p–индекса) группы F. Предложение доказано.

Предложение 2.4. *Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы A с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы B. И пусть $[B, A] \subseteq A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Для доказательства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать нормальную подгруппу N группы G, не содержащую элемент g и такую, что фактор–группа G/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Если $g \notin A$, то в качестве N можно взять A, так как $G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая группа. Если же $g \in A$, то из $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы A следует существование в ней нормальной подгруппы M конечного p–индекса, не содержащей g. Пусть N — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с M. Тогда в силу предложения 2.3 подгруппа N имеет конечный p–индекс в группе A и нормальна в группе G. Очевидно, что $g \notin N$. Заметим, что группа G/N является расщепляемым расширением конечной p–группы A/N с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы $BN/N \cong B$, причем поскольку

$$[B, A] \subseteq A'A^p,$$

то

$$[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^p.$$

Отсюда по предложению 2.2 следует, что группа G/N $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 2.5. *Пусть G — полициклическая группа, H — ее нормальная подгруппа. И пусть p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любого целого неотрицательного числа k фактор-группа S/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группа G является полициклической, и H — ее нормальная подгруппа, то существует последовательность подгрупп

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$$

такая, что для каждого $i = 1, \ldots, r$ подгруппа G_{i-1} нормальна в G_i, и фактор-группа G_i/G_{i-1} является циклической. Докажем предложение индукцией по r.

Если $r = 0$, то $G = H$, и в качестве искомой подгруппы S можно взять H. Действительно, при таком выборе S индекс подгруппы S в группе G равен единице, и $S/H^{p^k} = H/H^{p^k}$ — полициклическая p–группа для любого $k \geq 0$, которая, очевидно, конечна.

Пусть теперь $r > 0$. По индуктивному предположению в группе G_{r-1} существует нормальная подгруппа F конечного индекса, содержащая H и такая, что для любого $k \geq 0$ группа F/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Пусть Q — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с F. Тогда по предложению 2.3 Q — подгруппа конечного индекса группы G_{r-1}, нормальная в G. При этом Q содержит H, так как подгруппа H нормальна в G и содержится в F. Кроме того, для любого $k \geq 0$ подгруппа Q/H^{p^k} содержится в F/H^{p^k}, и поэтому $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Если G/G_{r-1} — конечная циклическая группа, то Q имеет конечный индекс в G, и мы можем в этом случае в качестве искомой подгруппы S взять Q.

Будем теперь предполагать, что G/G_{r-1} — бесконечная циклическая группа. Тогда G/Q представляет собой расширение конечной группы G_{r-1}/Q с помощью бесконечной циклической группы G/G_{r-1}. Хорошо известно и легко проверяется, что такое расширение является расщепляемым, и поэтому G/Q содержит бесконечную циклическую подгруппу T/Q конечного индекса. Тогда T — подгруппа конечного индекса группы G, и T представляет собой расщепляемое расширение группы Q с помощью бесконечной циклической группы $X = (x)$.

Так как группа Q полициклическая, то ее фактор-группа $Q/Q'Q^p$ конечна. Обозначим через n порядок группы $\mathrm{Aut}(Q/Q'Q^p)$. Тогда сопряжение элементом x^n на подгруппе Q действует тождественно по модулю $Q'Q^p$. Поэтому

$$[X^n, Q] \subseteq Q'Q^p. \tag{2.1}$$

Пусть $U = QX^n$. Так как индексы $[X : X^n]$ и $[G : T]$ конечны, то подгруппа U имеет конечный индекс в группе G. Кроме того, U — расщепляемое расширение Q с помощью X^n. Следовательно, фактор-группа U/H^{p^k} представляет собой расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы Q/H^{p^k} с помощью бесконечной циклической группы $X^nH^{p^k}/H^{p^k} \cong X^n$, причем из (2.1) следует, что

$$[X^nH^{p^k}/H^{p^k}, Q/H^{p^k}] \subseteq (Q/H^{p^k})'(Q/H^{p^k})^p.$$

Поэтому в силу предложения 2.4 группа U/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Пусть S — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с U. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, и для любого $k \geq 0$ подгруппа S/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы U/H^{p^k}. Предложение доказано.

Заметим, что результат А. Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости полициклических групп непосредственно следует из предложения 2.5, если в качестве H взять единичную подгруппу.

Предложение 2.6. *Пусть G — полициклическая группа, H — ее нормальная подгруппа, и H_1 — подгруппа конечного индекса в H, нормальная в G. И пусть p — простое число. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. В группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, удовлетворяющая равенству $S \cap H = H_1$ и такая, что для любого целого неотрицательного числа k группа $S/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

2. Пусть S такая же, как в утверждении 1. Тогда для любого $k \geq 0$ существует подгруппа N конечного p–индекса группы S нормальная в G и такая, что $N \cap H_1 = H_1^{p^k} = N \cap H$.

Доказательство. 1. Так как H/H_1 — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/H_1, то в G/H_1 существует нормальная подгруппа F/H_1 конечного индекса такая, что $F/H_1 \cap H/H_1 = 1$. Тогда F — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $F \cap H = H_1$. По предложению 2.5 существует нормальная подгруппа S_0 конечного индекса группы G, содержащая H_1 и такая, что для любого $k \geq 0$ группа $S_0/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Пусть $S = F \cap S_0$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, $S \cap H = S_0 \cap F \cap H = S_0 \cap H_1 = H_1$, и для любого $k \geq 0$ группа $S/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы $S_0/H_1^{p^k}$.

2. Предположим, что S удовлетворяет условию 1. Для любого $k \geq 0$ группа $H_1/H_1^{p^k}$ конечна, так как она полициклическая и периодическая. Отсюда и из того, что она содержится в $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группе $S/H_1^{p^k}$, следует что в $S/H_1^{p^k}$ существует нормальная подгруппа $M/H_1^{p^k}$ конечного p–индекса такая, что $M/H_1^{p^k} \cap H_1/H_1^{p^k} = 1$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного p–индекса группы S, и $M \cap H_1 = H_1^{p^k}$.

Пусть N — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с M. Тогда по предложению 2.3 N — подгруппа конечного p–индекса в S, нормальная в G. Очевидно, что $N \cap H_1 = H_1^{p^k}$, и поэтому $N \cap H = N \cap S \cap H = N \cap H_1 = H_1^{p^k}$. Предложение доказано.

Предложение 2.7. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. И пусть M и N — нормальные подгруппы групп A и B соответственно такие, что $M \cap H = N \cap H$. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы G на свободное произведение G_{MN} групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$.*

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [23]).

Также хорошо известно и следующее утверждение о строении подгрупп обобщенных свободных произведений групп, доказательство которого принадлежит Х. Нейман (см., напр., [14, предл. 11.22]).

Предложение 2.8. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, и F — подгруппа группы G, тривиально пересекающая все подгруппы группы G, сопряженные с H. Тогда F раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и подгрупп вида $x^{-1}Ax \cap F$ и $x^{-1}Bx \cap F$ $(x \in G)$. В частности, если подгруппа F тривиально пересекает все подгруппы группы G, сопряженные с A и B, то она свободна.*

Предложение 2.9. *Пусть G — свободная группа, и p — простое число. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Это утверждение, даже в более сильном виде, доказано в [14, с. 47].

С помощью предложения 2.9 легко доказывается следующее утверждение (см., напр., [27, теор. 4.1] или [15, с. 429]).

Предложение 2.10. *Пусть p — простое число. Свободное произведение любого семейства $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой.*

Предложение 2.11. *Пусть G — группа, A и B — ее подгруппы, и $C = A \cap B$. И пусть φ — некоторый сюрьективный гомоморфизм группы G на некоторую группу такой, что $Ker\varphi \subseteq A$. Тогда $A\varphi \cap B\varphi = C\varphi$.*

Доказательство. Включение

$$C\varphi \subseteq A\varphi \cap B\varphi$$

очевидно, поэтому докажем только обратное включение. Пусть

$$x\varphi \in A\varphi \cap B\varphi.$$

Тогда найдутся такие элементы a и b групп A и B соответственно, что $a\varphi = x\varphi = b\varphi$. Очевидно, что $a^{-1}b \in \mathrm{Ker}\varphi \subseteq A$. Поэтому элемент b принадлежит также подгруппе A, а значит, и подгруппе C. Отсюда и из того, что $b\varphi = x\varphi$ следует, что $x\varphi \in C\varphi$. Предложение доказано.

2.3. Доказательство теоремы 2.1

Пусть G — свободное произведение полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. И пусть p — простое число. Покажем, что в группе G существует $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа конечного индекса.

Так как группа H полициклическая, то она почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, т. е. в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа конечного индекса r. Пусть $H_1 = H^r$. Тогда H_1 — $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G. В силу предложения 2.6 в группах A и B существуют нормальные подгруппы S и T конечных индексов такие, что

$$S \cap H = H_1 = T \cap H,$$

и выполняются следующие два условия.

1°. Для любого целого неотрицательного числа k группы $S/H_1^{p^k}$ и $T/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы. В частности, группы S/H_1 и T/H_1 $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.

2°. Для любого $k \geq 0$ в группах S и T существуют подгруппы M и N конечных p–индексов нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H_1 = H_1^{p^k} = M \cap H$ и $N \cap H_1 = H_1^{p^k} = N \cap H$.

Используя предложение 2.7, построим группу

$$G_{ST} = (A/S * B/T; H_{ST})$$

и гомоморфизм $\rho_{ST} : G \to G_{ST}$. Так как группы A/S и B/T конечны, то группа G_{ST} финитно аппроксимируема, и поэтому существует гомоморфизм τ группы G_{ST} на конечную группу инъективный на A/S и B/T. Пусть

$$U = \mathrm{Ker}\rho_{ST}\tau.$$

Очевидно, что H_1 содержится в U, и U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Кроме того, $U \cap A = S$ и $U \cap B = T$. Действительно, так как $S \subseteq A$ и $S \subseteq \mathrm{Ker}\rho_{ST} \subseteq U$, то $S \subseteq U \cap A$. Пусть теперь $x \in U \cap A$. Тогда

$$x\rho_{ST}\tau = (xS)\tau = 1.$$

Отсюда и из того, что гомоморфизм τ инъективен на A/S следует, что $xS = 1$ или, что равносильно, $x \in S$. Аналогичным образом устанавливается и равенство $U \cap B = T$. Таким образом,

$$U \cap A = S,\ U \cap B = T,\ U \cap H = U \cap A \cap H = S \cap H = H_1. \qquad (2.2)$$

Так как группа H_1 полициклическая, то ее фактор-группа $H_1/H_1'H_1^p$ конечна. Рассмотрим гомоморфизм

$$\omega : G \to \mathrm{Aut}(H_1/H_1'H_1^p),$$

сопоставляющий каждому элементу g группы G автоморфизм $\widehat{g}$ группы $H_1/H_1'H_1^p$, действующий по правилу: $(xH_1'H_1^p)\widehat{g} = g^{-1}xgH_1'H_1^p$ для любого элемента $xH_1'H_1^p$ группы $H_1/H_1'H_1^p$. Пусть

$$V = \mathrm{Ker}\omega.$$

Очевидно, что H_1 содержится в V, так как $H_1/H_1'H_1^p$ — абелева группа. Кроме того, V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $[V, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$.

Пусть $W = U \cap V$. Тогда H_1 содержится в W, и W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Покажем, что группа W $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Для этого возьмем неединичный элемент w из W и построим гомоморфизм группы W на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую группу, отображающий w в неединичный элемент.

Сначала рассмотрим случай, когда $w \notin H_1$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H_1$ — естественный гомоморфизм. Заметим, что

$$G/H_1 = (A/H_1 * B/H_1; H/H_1)$$

— свободное произведение групп A/H_1 и B/H_1 с объединенной подгруппой H/H_1. Так как $H_1 \subseteq U$, то из (2.2) по предложению 2.11 получаем, что

$$U/H_1 \cap A/H_1 = S/H_1, U/H_1 \cap B/H_1 = T/H_1, U/H_1 \cap H/H_1 = 1.$$

Отсюда и из того, что подгруппа U/H_1 нормальна в группе G/H_1, в силу предложения 2.8 следует, что U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и семейства подгрупп группы G/H_1, сопряженных с

S/H_1 и T/H_1. Следовательно, так как группы S/H_1 и T/H_1 по условию 1° $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы, а свободная группа $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема по предложению 2.9, то группа U/H_1, а значит, и ее подгруппа W/H_1, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема в силу предложения 2.10. Поэтому так как $w\varepsilon \neq 1$, то ограничение гомоморфизма ε на подгруппу W будет искомым гомоморфизмом.

Теперь рассмотрим случай, когда $w \in H_1$. Так как H_1 $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то найдется такое целое положительное число k, что $w \notin H_1^{p^k}$. Действительно, в H_1 существует нормальная подгруппа X конечного p–индекса, не содержащая w. Пусть $[H_1 : X] = p^k$. Тогда $H_1^{p^k} \subseteq X$, и поэтому $w \notin H_1^{p^k}$. Так как подгруппы S и T удовлетворяют условию 2°, то в них существуют подгруппы M и N конечных p–индексов нормальные в A и B соответственно и такие, что

$$M \cap H_1 = M \cap H = H_1^{p^k} = N \cap H = N \cap H_1.$$

Заметим, что $w \notin M$ и $w \notin N$.

Используя предложение 2.7, построим группу G_{MN} и гомоморфизм ρ_{MN} : $G \to G_{MN}$, продолжающий естественные отображения $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Введем следующие обозначения: $G_{MN} = \overline{G}$, $A\rho_{MN} = A/M = \overline{A}$, $B\rho_{MN} = B/N = \overline{B}$, $H\rho_{MN} = \overline{H}$, $H_1\rho_{MN} = \overline{H}_1$, $S\rho_{MN} = S/M = \overline{S}$, $T\rho_{MN} = T/N = \overline{T}$, $U\rho_{MN} = \overline{U}$, $W\rho_{MN} = \overline{W}$, $w\rho_{MN} = \overline{w}$. Тогда

$$\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{H})$$

и $\overline{w} \neq 1$.

Покажем, что $\mathrm{Ker}\rho_{MN} \leq U$. Так как $M \leq S$ и $N \leq T$, то можно рассмотреть гомоморфизмы $\alpha : A/M \to A/S$ и $\beta : B/N \to B/T$, действующие по правилу $(aM)\alpha = aS$, $(bN)\beta = bT$. Очевидно, что существует гомоморфизм $\sigma : G_{MN} \to G_{ST}$, продолжающий гомоморфизмы α и β, и что $\rho_{MN}\sigma = \rho_{ST}$. Поэтому $\mathrm{Ker}\rho_{MN} \subseteq \mathrm{Ker}\rho_{ST}$. Кроме того, $\mathrm{Ker}\rho_{ST} \subseteq U$, так как $\mathrm{Ker}\rho_{ST}\tau = U$. Таким образом, из последних двух обстоятельств получаем, что $\mathrm{Ker}\rho_{MN} \leq U$. Отсюда и из (2.2) в силу предложения 2.11 следует, что

$$\overline{U} \cap \overline{A} = \overline{S},\ \overline{U} \cap \overline{B} = \overline{T},\ \overline{U} \cap \overline{H} = \overline{H}_1. \tag{2.3}$$

Рассмотрим фактор-группу

$$\overline{G}/\overline{H}_1 = (\overline{A}/\overline{H}_1 * \overline{B}/\overline{H}_1; \overline{H}/\overline{H}_1).$$

Так как $\overline{H}_1 \subseteq \overline{U}$, то из (2.3) по предложению 2.11 следует, что

$$\overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{A}/\overline{H}_1 = \overline{S}/\overline{H}_1,\ \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{B}/\overline{H}_1 = \overline{T}/\overline{H}_1,\ \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{H}/\overline{H}_1 = 1.$$

Следовательно, по предложению 2.8 нормальная подгруппа $\overline{U}/\overline{H}_1$ группы $\overline{G}/\overline{H}_1$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и семейства подгрупп группы $\overline{G}/\overline{H}_1$, сопряженных с $\overline{S}/\overline{H}_1$ и $\overline{T}/\overline{H}_1$. Заметим, что все эти сопряжения являются конечными p–группами, так как $\overline{S}$ и $\overline{T}$ — конечные p–группы. В силу теоремы Куроша (см. [14, с. 170]) подгруппа $\overline{W}/\overline{H}_1$ имеет такую же структуру, как и $\overline{U}/\overline{H}_1$, т. е. $\overline{W}/\overline{H}_1$ может быть записана в виде

$$\overline{W}/\overline{H}_1 = F * P_1 * P_2 * \ldots * P_m,$$

где F — свободная группа, а все P_i — конечные p–группы. При этом число m конечно, так как группа W имеет конечный индекс в конечно порожденной группе G, а значит сама конечно порождена. Рассмотрим гомоморфизм группы $\overline{W}/\overline{H}_1$ на группу

$$P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_m,$$

продолжающий отображение $F \to 1$ и тождественные отображения $P_i \to P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Его ядро $\overline{K}/\overline{H}_1$ будет нормальной подгруппой конечного p–индекса группы $\overline{W}/\overline{H}_1$. Отсюда и из того, что $\overline{K}/\overline{H}_1$ тривиально пересекает все P_i, в силу теоремы Куроша следует, что группа $\overline{K}/\overline{H}_1$ свободна. Тогда $\overline{K}$ — нормальная подгруппа конечного p–индекса группы $\overline{W}$, и $\overline{K}$ является расширением $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы. Хорошо известно и легко проверяется, что такое расширение является расщепляемым. Покажем, что $\overline{K}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Так как $\overline{S}$ — конечная p–группа, то ее подгруппа $\overline{H}_1$ также является конечной p–группой. Кроме того, так как

$$[W, H_1] \subseteq [V, H_1] \subseteq H_1' H_1^p,$$

то
$$[\overline{W}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p,$$
откуда следует, что
$$[\overline{K}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p.$$
Таким образом, группа $\overline{K}$ является расщепляемым расширением конечной p–группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы $\overline{C}$, и
$$[\overline{C}, \overline{H}_1] \subseteq [\overline{K}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p.$$
По предложению 2.9 группа $\overline{C}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Поэтому в силу предложения 2.2 группа $\overline{K}$ тоже $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Отсюда и из того, что $\overline{K}$ — нормальная подгруппа конечного p–индекса группы $\overline{W}$ следует (см., напр., [27, лемма 1.5]), что $\overline{W}$ $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Таким образом, ограничение гомоморфизма $\rho_{_{MN}}$ на подгруппу W будет искомым гомоморфизмом, поскольку выше говорилось, что $W\rho_{_{MN}} = \overline{W}$ и $w\rho_{_{MN}} \neq 1$.

ГЛАВА 3

О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой

3.1. Основные результаты третьей главы

Пусть, как и прежде,

$$G = (A * B, H)$$

— свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Полагая, что подгруппа H нормальна в группах A и B, в предыдущей главе было установлено, что группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого p, если A и B являются полициклическими группами. В этой главе продолжим изучение свойства почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободных произведений групп с нормальным объединением. Для таких свободных произведений здесь будет получен критерий почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости в случае, когда группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга.

Заметим, что в отличие от полициклической группы, нильпотентная группа конечного ранга не обязана быть почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой даже если она финитно аппроксимируема. Так, например, аддитивная группа p–ичных дробей финитно аппроксимируема, но не является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой, и даже не является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой.

Заметим еще, что свободное произведение двух почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением не обязано быть почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой. С подобной ситуацией мы уже сталкивались в первой главе диссертации. Напомним, что в ней за исходную точку был взят результат Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения G полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Было продемонстрировано, что этот результат не может быть распространен на случай, когда A и B являются финитно аппроксимируемыми разрешимыми группами конечного ранга. Однако для такого обобщенного свободного произведения там же был установлен критерий финитной аппроксимируемости (см. пункт 1 теоремы 1.3). Он состоит в том, что свободное произведение G финитно аппроксимируемых разрешимых групп A и B конечного ранга с собственной нормальной объединенной подгруппой H финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда финитно аппроксимируемы фактор-группы A/H и B/H. Так как класс всех нильпотентных групп конечного ранга содержится в классе всех разрешимых групп конечного ранга, то этот критерий будет иметь место и в том случае, когда A и B являются финитно аппроксимируемыми нильпотентными группами конечного ранга. Аналогичный результат будет справедлив и для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением.

Теорема 3.1. *Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.*

Заметим, что необходимость в этом утверждении имеет место даже без предположения о конечности ранга групп A и B (см. предл. 3.1). Доказательство теоремы 3.1 будет приведено в разделе 3.3. Для ее доказательства нам потребуется ряд дополнительных результатов, отмеченных в разделе 3.2.

В работе [21] было доказано, что любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для каждого простого числа p. В частности, этим свойством обладает любая конечно порожденная нильпотентная группа. Поэтому в качестве следствия из теоремы 3.1 мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p.*

Заметим, что это утверждение является следствием из теоремы 2.1.

Теорема 3.1 представляет собой критерий почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения двух почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением. Выясним теперь, при каких обстоятельствах нильпотентная группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Известно [7], что нильпотентная группа конечного ранга

$\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов отличных от 1, т. е. таких элементов $a \neq 1$, что уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо при всех целых положительных k. В разделе 3.4 будет доказан аналогичный критерий для почти аппроксимируемости конечными p–группами.

Теорема 3.2. *Нильпотентная группа конечного ранга почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов бесконечного порядка и ее периодическая часть конечна.*

Заметим теперь, что свободное произведение двух почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых нильпотентных групп конечного ранга с нормальным объединением не обязано быть почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой даже в том случае, когда его свободные сомножители являются абелевыми группами. Как и в первой главе диссертации, рассмотрим свободное произведение $G = (\mathbb{Q}_q * \mathbb{Q}_q,\ \mathbb{Z})$ двух экземпляров аддитивной группы $\mathbb{Q}_q$ q–ичных дробей (q — простое число, отличное от p) с нормальной объединенной подгруппой $\mathbb{Z}$ целых чисел. В силу теоремы 3.2 группа $\mathbb{Q}_q$ почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. При этом группа G не является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой, поскольку в разделе 1.1 первой главы диссертации было показано, что она не является даже финитно аппроксимируемой.

3.2. Дополнительные утверждения

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}_p$–отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную p–группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно и легко проверяется, что если подгруппа H нормальна в G, то она $\mathcal{F}_p$–отделима в G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Предложение 3.1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.*

Доказательство. Пусть группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Тогда в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа P конечного индекса. Введем следующие обозначения: $A_1 = A \cap P$, $H_1 = H \cap P$. Заметим, что подгруппа H_1 нормальна в группе A_1, и что группа $A_1/H_1 \cong A_1H/H$ вложима в группу A/H. Так как

$$[A/H : A_1H/H] = [A : A_1H] \leq [A : A_1] \leq [G : P] < \infty$$

и

$$A_1/H_1 \cong A_1H/H,$$

то для доказательства почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы A/H достаточно доказать $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемость группы A_1/H_1 или, что равносильно, $\mathcal{F}_p$–отделимость подгруппы H_1 в группе A_1.

Предположим от противного, что существует элемент a группы A_1, не принадлежащий H_1, и такой, что для любого гомоморфизма ψ группы A_1 на конечную p–группу

$$a\psi \in H_1\psi. \tag{3.1}$$

Так как группа B нильпотентна, то существует такое натуральное n, что для произвольного простого коммутатора веса n, составленного из элементов группы B, выполняется равенство

$$[x_1, [x_2, [\ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]]] = 1 \tag{3.2}$$

(см., напр., [13, с. 388]), где для любых элементов x, y группы B

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

— их взаимный коммутатор. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий H. Рассмотрим в группе G простой коммутатор веса n следующего вида:

$$c = [a, [a, [\ldots, [a, b] \ldots]]].$$

Так как $a \in P$ и P — нормальная подгруппа группы G, то $c \in P$. Кроме того, элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 2^n, и поэтому $c \neq 1$. Отсюда и из того, что группа P $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема следует, что в P существует нормальная подгруппа N конечного p–индекса, не содержащая c.

Пусть L — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с N. Так как подгруппа N имеет конечный индекс в группе G, то число сопряженных с ней в G подгрупп конечно. Кроме того, нетрудно понять, что каждая такая сопряженная подгруппа является нормальной подгруппой группы P и имеет в группе P конечный p–индекс, совпадающий с индексом $[P:N]$. Из последних двух обстоятельств в силу теоремы Ремака [11, п. 4.3.9] следует, что подгруппа L имеет конечный p–индекс в группе P. Очевидно также, что L нормальна в G. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/L.$$

Тогда $A_1\varepsilon = A_1L/L$. Так как $A_1L/L \leq P/L$ и P/L — конечная p–группа, то и A_1L/L — конечная p–группа.

Обозначим через ψ ограничение на подгруппу A_1 гомоморфизма ε. Тогда ψ — гомоморфизм группы A_1 на конечную p–группу A_1L/L. Следовательно, согласно (3.1) $a\psi \in H_1\psi$, т. е. существует элемент $h \in H_1$ такой, что $a\psi = h\psi$ или, что то же самое, $a\varepsilon = h\varepsilon$. Тогда

$$c\varepsilon = [a\varepsilon, [a\varepsilon, [\ldots, [a\varepsilon, b\varepsilon]\ldots]]] = \\ = [h\varepsilon, [h\varepsilon, [\ldots, [h\varepsilon, b\varepsilon]\ldots]]] = [h, [h, [\ldots, [h, b]\ldots]]]\varepsilon,$$

причем

$$[h, [h, [\ldots, [h, b]\ldots]]] = 1,$$

так как $h \in B, b \in B$, и в группе B выполняется тождество (3.2). Следовательно, $c\varepsilon = 1$. Но, с другой стороны, $c \notin N$, и поэтому $c \notin \mathrm{Ker}\varepsilon = L \subseteq N$. Получили противоречие. Следовательно, фактор-группа A/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. То же самое можно сказать и о фактор-группе B/H. Предложение доказано.

Заметим, что предложение 3.1 обеспечивает необходимость в теореме 3.1.

Предложение 3.2. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы, то группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть H — конечная нормальная подгруппа группы G, и фактор-группа G/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Тогда группа G/H финитно аппроксимируема, и в силу предложения 1.4 из первой главы диссертации следует, что группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что подгруппа H конечна следует, что в группе G существует подгруппа F конечного индекса такая, что $F \cap H = 1$. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/H.$$

Очевидно, что его ограничение на подгруппу F инъективно. Поэтому F с точностью до изоморфизма является подгруппой в группе G/H и, следовательно, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Отсюда и из того, что подгруппа F имеет конечный индекс в G следует, что и группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 3.3. *Пусть группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, и H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа G/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группа G финитно аппроксимируема, то в ней существует подгруппа F конечного индекса, тривиально пересекающая H. Поэтому естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/H$$

инъективен на F. Так как группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то ее подгруппа F, а значит и изоморфная ей группа $F\varepsilon$, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Таким образом, группа G/H содержит почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую подгруппу $F\varepsilon$ конечного индекса. Следовательно, группа G/H сама является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. Предложение доказано.

Предложение 3.4. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, H — ее нормальная подгруппа, и L — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G. Фактор-группа G/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема фактор-группа G/L.*

Доказательство. Так как H/L — конечная нормальная подгруппа группы G/L, то в силу предложений 3.2 и 3.3 группа G/L почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группа

$$(G/L)/(H/L) \cong G/H$$

почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Предложение доказано.

Предложение 3.5. *Пусть G — группа конечного ранга. Тогда любая нормальная подгруппа H конечного индекса (конечного p–индекса) группы G содержит некоторую характеристическую подгруппу N группы G конечного индекса (конечного p–индекса).*

Доказательство. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы G, индекс которых совпадает с $[G : H]$. Число таких подгрупп конечно (см. [4] и [8]), и поэтому в силу теоремы Пуанкаре [13, с. 53] (теоремы Ремака [11, п. 4.3.9]) N является искомой подгруппой. Предложение доказано.

Предложение 3.6. *Пусть G — конечная нильпотентная группа, $p_1, p_2, \dots, p_s$ — все простые делители порядка группы G. И пусть $H_1, H_2, \dots, H_s$ — силовские подгруппы группы G, соответствующие числам $p_1, p_2, \dots, p_s$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, s$ подгруппа H_i нормальна в G и совпадает с множеством всех p_i–элементов группы G. Более того, группа G раскладывается в прямое произведение подгрупп $H_1, H_2, \dots, H_s$.*

Это свойство конечных нильпотентных групп хорошо известно (см., напр., [11, п. 17.1.4]).

Предложение 3.7. *Пусть H — группа, L_0 — ее характеристическая подгруппа, а L/L_0 — характеристическая подгруппа группы H/L_0. Тогда подгруппа L характеристична в H.*

Доказательство. Пусть φ — некоторый автоморфизм группы H. Рассмотрим произвольный элемент a группы L и обозначим через b его образ относительно φ. Для доказательства предложения достаточно показать, что $b \in L$.

Так как L_0 — характеристическая подгруппа группы H, то можно рассмотреть индуцированный автоморфизм $\overline{\varphi}$ группы H/L_0, сопоставляющий каждому элементу xL_0 группы H/L_0 элемент $x\varphi L_0$. Тогда

$$aL_0\overline{\varphi} = a\varphi L_0 = bL_0.$$

Отсюда следует, что $bL_0 \in L/L_0$, так как $aL_0 \in L/L_0$ и подгруппа L/L_0 характеристична в H/L_0. Это, очевидно, означает, что $b \in L$. Предложение доказано.

Предложение 3.8. *Пусть H — нильпотентная группа, L_0 — ее характеристическая подгруппа конечного индекса и p — простое число. Тогда в группе H существует характеристическая подгруппа L такая, что $L_0 \subseteq L$, индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p.*

Доказательство. По условию предложения H/L_0 — конечная нильпотентная группа. Поэтому в силу предложения 3.6 она раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп, т. е.

$$H/L_0 = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n, \tag{3.3}$$

где H_i — силовские p_i–подгруппы для каждого $i = 1, \ldots, n$. При этом все p_i — простые попарно различные числа. Если среди p_i нет числа p, то в качестве L, очевидно, можно взять L_0.

В противном случае, пусть, для определенности, H_1 — силовская p–подгруппа. Так как H_1 — подгруппа фактор-группы H/L_0, то в группе H существует подгруппа L такая, что $H_1 = L/L_0$. Очевидно, что подгруппа L/L_0 характеристична в группе H/L_0. Отсюда и из того, что L_0 — характеристическая подгруппа группы H, в силу предложения 3.7 следует, что и подгруппа L характеристична в H. Так как $L/L_0 = H_1$ — p–подгруппа группы H/L_0 и $[H : L] = [H/L_0 : L/L_0]$, то в силу разложения (3.3) следует, что индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Таким образом, L — искомая подгруппа. Предложение доказано.

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Пусть G — свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга. Докажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы. Необходимость для этого утверждения обеспечивается предложением 3.1, поэтому остается доказать достаточность.

Пусть группы A, B, A/H, B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Так как подгруппа H содержится в A, то она почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то есть в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа H_0 конечного индекса. Тогда по предложению 3.5 в группе H существует характеристическая подгруппа L_0 конечного индекса, содержащаяся в H_0. Заметим, что L_0, являясь подгруппой в H_0, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

По предложению 3.8 в группе H существует характеристическая подгруппа L, содержащая L_0 и такая, что индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Так как группа L является расширением $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы L_0 с помощью конечной p–группы, то она сама $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема (см. [27]). Так как L характеристична в H, и H нормальна в G, то L нормальна в G. Кроме того, поскольку группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы, то по предложению 3.4 группы A/L и B/L тоже почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы. Заметим теперь, что группа G/L представляет собой свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых групп A/L и B/L с конечной объединенной подгруппой H/L. В работе [9] было доказано, что такое обобщенное свободное произведение само почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо. Поэтому в группе G/L существует нормальная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа U/L конечного индекса. Очевидно, что U является нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Теперь рассмотрим отображение

$$\psi : G \to \mathrm{Aut} L/L'L^p,$$

сопоставляющее каждому элементу x группы G ограничение на подгруппу $L/L'L^p$ внутреннего автоморфизма $\widehat{xL'L^p}$ группы $G/L'L^p$. Таким образом, для каждого элемента $aL'L^p$ из $L/L'L^p$

$$x\psi : aL'L^p \longmapsto (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p = (x^{-1}ax)L'L^p. \tag{3.4}$$

Очевидно, что ψ — гомоморфизм. Обозначим через V ядро гомоморфизма ψ. Тогда из (3.4) следует, что для каждого элемента x из V и для каждого элемента a из L

$$aL'L^p = (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p. \tag{3.5}$$

Заметим, что подгруппа L группы A имеет конечный ранг, и поэтому в силу предложения 1.8 из первой главы диссертации фактор-группа $L/L'L^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа G/V вложима в группу $\mathrm{Aut} L/L'L^p$ следует, что V — подгруппа конечного индекса группы G. При этом так как фактор-группа $L/L'L^p$ абелева, то $L \subseteq V$.

Рассмотрим теперь подгруппу $W = U \cap V$. Очевидно, что W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая L. Покажем, что группа W $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Для этого каждому неединичному элементу a из W сопоставим гомоморфизм группы W на некоторую $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую группу, образ a относительно которого отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin L$. Пусть

$$\varepsilon : W \to W/L$$

— естественный гомоморфизм. Тогда образ aL элемента a относительно ε отличен от единицы. При этом группа W/L $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы U/L, и поэтому гомоморфизм ε является искомым.

Пусть теперь $a \in L$. Так как группа L имеет конечный ранг и $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то по предложению 3.5 в ней существует характеристическая подгруппа R конечного p–индекса, не содержащая элемент a. Очевидно, что подгруппа R, как и L, нормальна в группе G. Очевидно также, что фактор-группа G/R является свободным произведением подгрупп A/R и B/R с объединенной подгруппой H/R. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\psi_1 : G \to G/R$$

и введем следующие обозначения: $G\psi_1 = G/R = G_1$, $A\psi_1 = A/R = A_1$, $B\psi_1 = B/R = B_1$, $H\psi_1 = H/R = H_1$, $L\psi_1 = L/R = L_1$, $W\psi_1 = W/R = W_1$, $a\psi_1 = aR = a_1$. Тогда

$$G_1 = (A_1 * B_1, H_1).$$

Заметим, что H_1 — конечная нильпотентная группа, так как подгруппа R имеет конечный индекс в группе L, а L — в H. Заметим еще, что $L_1 \subseteq H_1$, и поскольку $a \notin R$, то $a_1 \neq 1$.

Так как H_1 — конечная нильпотентная группа, то в силу предложения 3.6 она раскладывается в прямое произведение

$$H_1 = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — силовские подгруппы группы H_1, соответствующие попарно различным простым числам $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Так как L_1 — p–подгруппа группы H_1 и $L_1 \neq 1$ (поскольку $a_1 \in L_1$ и $a_1 \neq 1$), то одна из подгрупп Q_i является p–группой. Пусть для определенности Q_1 — p–группа. Тогда $L_1 \subseteq Q_1$. Поэтому индекс $[Q_1 : L_1]$ делит индекс $[H_1 : L_1] = [H : L]$ и, следовательно, взаимно прост с p. С другой стороны, индекс $[Q_1 : L_1]$ является степенью числа p, поскольку Q_1 — конечная p–группа. Из последних двух обстоятельств следует, что $[Q_1 : L_1] = 1$, то есть $L_1 = Q_1$. Очевидно, что элемент a_1 не принадлежит подгруппе

$$Q = Q_2 \times \ldots \times Q_n.$$

Заметим, что Q является характеристической подгруппой группы H_1, так как все Q_i характеристичны в H_1. Следовательно, подгруппа Q, как и подгруппа H_1, нормальна в G_1. Факторизуя G_1 по Q, получим свободное произведение групп A_1/Q и B_1/Q с объединенной подгруппой H_1/Q.

Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\psi_2 : G_1 \to G_1/Q$$

и введем следующие обозначения: $G_1\psi_2 = G_1/Q = G_2$, $A_1\psi_2 = A_1/Q = A_2$, $B_1\psi_2 = B_1/Q = B_2$, $H_1\psi_2 = H_1/Q = H_2$, $L_1\psi_2 = L_1Q/Q = L_2$, $W_1\psi_2 = W_1Q/Q = W_2$, $a_1\psi_2 = a_1Q = a_2$. Тогда

$$G_2 = (A_2 * B_2, H_2).$$

Заметим, что

$$L_2 = L_1Q/Q = Q_1Q/Q = H_1/Q = H_2$$

— конечная p–группа, изоморфная Q_1. Заметим еще, что $a_2 \neq 1$, поскольку $a_1 \notin Q$.

Так как A_2 — нильпотентная группа конечного ранга, H_2 — ее конечная нормальная p–подгруппа и фактор-группа $A_2/H_2 \cong A/H$ финитно аппроксимируема, то по предложению 1.4 из первой главы группа A_2 финитно аппроксимируема. Поэтому существует инъективный на подгруппе H_2 гомоморфизм ρ группы A_2 на некоторую конечную нильпотентную группу K. По предложению 3.6 группа K раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Заметим, что в этом разложении присутствует нееденичная p–компонента, так как $H_2\rho$ — неединичная p–подгруппа группы K. Пусть π — проекция группы K на свою p–компоненту, и пусть

$$M = \mathrm{Ker}\rho\pi.$$

Очевидно, что M — нормальная подгруппа конечного p–индекса группы A_2, причем $M \cap H_2 = 1$, поскольку гомоморфизм ρ инъективен на H_2, а π — на $H_2\rho$. Аналогичным образом в группе B_2 может быть построена нормальная подгруппа N конечного p–индекса такая, что $N \cap H_2 = 1$.

В силу предложения 2.7 из второй главы диссертации можно рассмотреть свободное произведение G_3 групп A_2/M и B_2/N с объединенной подгруппой $H_3 = H_2M/M = H_2N/N$ и гомоморфизм

$$\psi_3 : G_2 \to G_3,$$

продолжающий естественные гомоморфизмы $A_2 \to A_2/M$ и $B_2 \to B_2/N$. Введем следующие обозначения: $A_2\psi_3 = A_3$, $B_2\psi_3 = B_3$, $W_2\psi_3 = W_3$, $L_2\psi_3 = L_3 = H_3$, $a_2\psi_3 = a_3$. Тогда

$$G_3 = (A_3 * B_3, H_3),$$

где A_3, B_3 — конечные p–группы. Заметим, что $a_3 \neq 1$, так как $a_3 = a_2M$ и при этом $a_2 \notin M$, поскольку $a_2 \in H_2 \setminus 1$ и $H_2 \cap M = 1$.

Теперь рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\psi_4 : G_3 \to G_3/H_3.$$

Вводя обозначения $G_3\psi_4 = G_3/H_3 = G_4$, $A_3\psi_4 = A_3/H_3 = A_4$, $B_3\psi_4 = B_3/H_3 = B_4$, получим свободное произведение

$$G_4 = A_4 * B_4,$$

где A_4 и B_4 — конечные p–группы. Так как $L \subseteq W$, то $L_3 \subseteq W_3$, и поскольку $L_3 = H_3$, то $H_3 \subseteq W_3$. Поэтому $W_3\psi_4 = W_3/H_3$. Обозначим подгруппу W_3/H_3 через W_4.

Пусть D_4 — декартова подгруппа группы G_4, то есть ядро гомоморфизма группы G_4 на прямое произведение $A_4 \times B_4$, действующего тождественно на подгруппах A_4 и B_4. Хорошо известно и легко проверяется, что группа D_4 свободна. Кроме того, так как $G_4/D_4 \cong A_4 \times B_4$, то D_4 — подгруппа конечного p–индекса группы G_4. Обозначим через F_4 пересечение групп D_4 и W_4. Тогда F_4 — нормальная свободная подгруппа конечного p–индекса группы W_4, и при этом в группе W_3 существует нормальная подгруппа F_3, содержащая H_3, и такая, что $F_4 = F_3/H_3$. Таким образом, группа F_3 является расширением группы H_3 с помощью свободной группы F_4. Хорошо известно и легко проверяется, что расширение с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому группа F_3 является расщепляемым расширением подгруппы H_3 с помощью подгруппы $S_3 \cong F_4$. Заметим, что по предложению 2.9 группа S_3 $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, поскольку она свободна.

В силу равенства (3.5), для взаимного коммутанта подгрупп L и V имеет место включение $[L, V] \subseteq L'L^p$. Кроме того, так как $W \subseteq V$, то и $[L, W] \subseteq L'L^p$. Отсюда и из того, что

$$W\psi_1\psi_2\psi_3 = W_3,$$

$$L\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3 = H_3,$$

$$L'L^p\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3'L_3^p = H_3'H_3^p$$

следует, что $[H_3, W_3] \subseteq H_3'H_3^p$. Поскольку $S_3 \subseteq F_3 \subseteq W_3$, имеем

$$[H_3, S_3] \subseteq H_3'H_3^p.$$

Мы видим, таким образом, что группа F_3 является расщепляемым расширением конечной p–группы H_3 с помощью $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы S_3, и при этом $[H_3, S_3] \subseteq H_3'H_3^p$. Поэтому в силу предложения 2.2 второй главы группа F_3 является $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой. С другой стороны, F_3 — нормальная подгруппа в W_3 и $W_3/F_3 \cong W_4/F_4$ — конечная p–группа. Из последних двух обстоятельств следует (см. [27, лемма 1.5]), что группа W_3 $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.

Расмотрим теперь гомоморфизм

$$\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 : G \to G_3.$$

Пусть $\sigma = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3|_W$ — ограничение гомоморфизма $\psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3$ на подгруппу W. Тогда σ — гомоморфизм группы W на $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемую группу W_3. При этом σ отображает элемент a в отличный от единицы элемент a_3. Поэтому σ — искомый гомоморфизм.

3.4. Доказательство теоремы 3.2

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобятся три следующих предложения, первое из которых представляет собой упоминавшийся ранее в разделе 3.1 критерий $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости нильпотентных групп конечного ранга.

Предложение 3.9. *Нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов отличных от 1.*

Это утверждение было доказано в работе [7].

Предложение 3.10. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая p–группа конечного ранга. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Пусть

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_n = G$$

— нормальный ряд группы G (т. е. конечный ряд подгрупп группы G, каждая из которых нормальна в G) с абелевыми факторами. Группа $A = G_1$ является финитно аппроксимируемой абелевой p–группой конечного ранга. Следовательно в силу предложения 1.14 первой главы диссертации группа A конечна. По аналогии с предложением 3.3 легко проверяется, что фактор-группа финитно аппроксимируемой группы по ее конечной нормальной подгруппе сама является финитно аппроксимируемой группой. Поэтому G/A — финитно аппроксимируемая разрешимая p–группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины меньшей n. Поэтому в силу индуктивных соображений группа G/A конечна. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы G. Предложение доказано.

Предложение 3.11. *Пусть G — нильпотентная группа ступени c. Тогда уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G для любого элемента a из G^{n^c} $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [17, лемма 2]

Доказательство теоремы 3.2. Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга. Предположим сначала, что G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Покажем, что в G нет p–полных элементов бесконечного порядка.

Пусть H — нормальная $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G, причем $[G : H] = n$. И пусть a — p–полный элемент группы G. Очевидно, что $a^n \in H$. Более того, a^n — p–полный элемент в группе H. Действительно, для произвольного целого положительного числа k в группе G существует такой элемент b, что

$$a = b^{p^k}.$$

Возводя обе части последнего равенства в n–ую степень, получим равенство

$$a^n = (b^n)^{p^k},$$

из которого в силу того, что $b^n \in H$, следует, что a^n — p–полный элемент группы H. Так как группа H $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема, то по предложению 3.9 в ней нет p–полных элементов отличных от 1. Следовательно, $a^n = 1$, т. е. порядок элемента a конечен.

Покажем, что периодическая часть $\tau(G)$ группы G конечна. Заметим сначала, что подгруппа $\tau(G)$, как и группа G, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Хорошо известно и легко проверяется, что периодическая $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемая группа является p–группой. Поэтому $\tau(G)$ является почти p–группой, т. е. содержит p–подгруппу T конечного индекса. Таким образом, T — финитно аппроксимируемая нильпотентная p–группа конечного ранга. В силу предложения 3.10 это означает, что группа T конечна. Отсюда и из того, что T имеет конечный индекс в группе $\tau(G)$ следует, что группа $\tau(G)$ тоже конечна.

Предположим теперь, что группа G не содержит p–полных элементов бесконечного порядка, а ее периодическая часть $\tau(G)$ конечна, и покажем, что G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Пусть n — порядок группы $\tau(G)$, c — ступень нильпотентности группы G. Тогда степенная подгруппа G^{n^c} не имеет кручения. Действительно, пусть элемент $a \in G^{n^c}$ имеет конечный порядок. В силу предложения 3.11 в группе G существует элемент b такой, что

$$b^n = a. \tag{3.6}$$

Очевидно, что его порядок, как и порядок элемента a, конечен, т. е. $b \in \tau(G)$. Так как порядок группы $\tau(G)$ равен n, то $b^n = 1$. Поэтому в силу равенства (3.6) a — единичный элемент. Таким образом, G^{n^c} — группа без кручения. Отсюда и из того, что в группе G нет p–полных элементов бесконечного порядка следует, что в группе G^{n^c} нет p–полных элементов отличных от 1. По предложению 3.9 это означает, что группа G^{n^c} $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Кроме того, в силу предложения 1.9 из первой главы диссертации следует, что подгруппа G^{n^c} имеет конечный индекс в группе G. Поэтому группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема. Теорема 3.2 доказана.

ГЛАВА 4

Об аппроксимируемости конечными π–группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с центральной объединенной подгруппой

4.1. Основные результаты четвертой главы

В предыдущих главах мы рассматривали вопрос о финитной аппроксимируемости и почти аппроксимируемости конечными p–группами некоторых свободных произведений групп с нормальным объединением. В этой главе остановимся на изучении свойства аппроксимируемости конечными π–группами таких свободных произведений. Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел. Напомним, что конечная группа называется π–группой, если все простые делители ее порядка принадлежат множеству π. Напомним также, что группа G называется аппроксимируемой конечными π–группами (или, короче, $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой), если для нее выполняются следующие равносильные условия.

1. Для каждого неединичного элемента a из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную π–группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

2. Пересечение всех нормальных подгрупп конечного π–индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.

3. Для каждого неединичного элемента a из G в группе G существует нормальная подгруппа N конечного π–индекса, не содержащая a.

Целое неотрицательное число n будем называть π–числом, если все его простые делители принадлежат множеству π. Подгруппу N группы G будем называть подгруппой конечного π–индекса, если ее индекс в группе G конечен и является π–числом.

Заметим, что если множество π состоит из одного простого числа p, то понятие $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы совпадает с рассматривавшимся ранее понятием $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группы. Если же множество π содержит все простые числа, то аппроксимируемость конечными π–группами — это в точности финитная аппроксимируемость.

Рассмотрим свободное произведение

$$G = (A * B, H)$$

групп A и B с объединенной подгруппой H. Будем предполагать, что $H \neq A$ и $H \neq B$. В первой главе диссертации был получен критерий финитной аппроксимируемости такого свободного произведения в случае, когда A и B — финитно аппроксимируемые разрешимые группы конечного ранга, а подгруппа H нормальна в A и B (см. пункт 1 теоремы 1.3). В третьей главе был получен аналогичный критерий для почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с нормальным объединением (см. теорему 3.1). Эти критерии утверждают, что при указанных ограничениях, накладываемых на группы A,B и H, для финитной аппроксимируемости (почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости) группы G необходимо и достаточно, чтобы фактор-группы A/H и B/H были финитно аппроксимируемыми (соответственно, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми).

Заметим, что аналогичное утверждение для $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости уже не имеет места, поскольку даже свободное произведение двух конечных p–групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой. Демонстрирующий это пример будет приведен ниже. Тем не менее, требуя дополнительно от объединяемой подгруппы H, чтобы она содержалась в центрах групп A и B, мы получили следующий результат для группы G.

Теорема 4.1. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Заметим, что необходимость в этом утверждении имеет место даже без предположения о конечности ранга групп A и B, и при более слабом ограничении на подгруппу H, которое состоит в ее нормальности в группах A и B (см. предл. 4.1). Доказательство теоремы 4.1 приведено в разделе 4.3.

Любая конечная p–группа нильпотентна (см., напр., [11, п. 17.1.1]), поэтому очевидным следствием теоремы 4.1 является следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть G — свободное произведение конечных p–групп A и B с объединенной подгруппой H. Если H содержится в центрах групп A и B, то группа G $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема.*

Хорошо известно и легко проверяется, что конечно порожденная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является π–группой (см. [27, теор. 2.1]). Поэтому еще одним следствием из теоремы 4.1 является следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенными подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группы A и B являются конечно порожденными нильпотентными группами, то группа G тогда и только тогда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, когда группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы, тогда и только тогда, когда периодические части групп A/H и B/H являются π–группами.*

Частным случаем этого утверждения является теорема 4.10 из [35], доказанная для множества π, состоящего из одного простого числа p.

Еще одним частным случаем следствия 4.2 является следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Пусть группа G имеет представление $\langle a, b; a^m = b^n \rangle$, где m и n — ненулевые целые числа. Группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или m и n являются π–числами.*

Аналогичный результат для случая, когда множество π состоит из одного простого числа p, был получен в работе [33, теор. 1.1] и уже упоминался в разделе 2.1 второй главы диссертации.

Заметим, что теорема 4.1 представляет собой критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости свободного произведения двух $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых нильпотентных групп конечного ранга с центральным объединением. Выясним теперь, при каких обстоятельствах нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Для случая, когда множество π состоит из одного простого числа p, критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости был получен в работе [7]. Согласно этому критерию, нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p–полных элементов отличных от 1, т. е. таких элементов $a \neq 1$, что уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо при всех целых положительных k. Обобщим этот результат на случай, когда π — произвольное множество простых чисел. Элемент a группы G будем называть π–полным, если для любого π–числа n уравнение

$$x^n = a$$

разрешимо в группе G. Нами получен следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть G — группа, $\omega_\pi(G)$ — множество всех π–полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ — пересечение всех нормальных подгрупп конечного π–индекса группы G. Тогда $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$. Кроме того, если группа G нильпотентна и имеет конечный ранг, то $\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G)$. В частности, нильпотентная группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит π–полных элементов отличных от 1.*

Доказательство теоремы 4.2, как и доказательство теоремы 4.1, приведено в разделе 4.3. В разделе 4.2 рассматриваются вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства этих теорем.

Заметим теперь, что свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами H и K не обязано быть $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группой при условии, что фактор-группы A/H и B/K $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы, даже если A и B являются конечными p–группами. Действительно, пусть группы A и B имеют представления

$$A = \langle a_1,\ a_2,\ x;\ a_1^2 = 1,\ a_2^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ x^2 = 1,$$
$$x^{-1}a_1x = a_2,\ x^{-1}a_2x = a_1,\ x^{-1}a_1a_2x = a_1a_2\rangle \text{ и}$$
$$B = \langle b_1,\ b_2,\ y;\ b_1^2 = 1,\ b_2^2 = 1,\ b_1b_2 = b_2b_1,\ y^2 = 1,$$
$$y^{-1}b_1y = b_1b_2,\ y^{-1}b_1b_2y = b_1,\ y^{-1}b_2y = b_2\rangle.$$

И пусть

$$H = \langle a_1,\ a_2;\ a_1^2 = 1,\ a_2^2 = 1,\ a_1a_2 = a_2a_1\rangle \text{ и}$$

$$K = \langle b_1,\ b_2;\ b_1^2 = 1,\ b_2^2 = 1,\ b_1b_2 = b_2b_1\rangle.$$

Очевидно, что A и B — конечные 2–группы порядка 8, а H и K — их нормальные подгруппы. Рассмотрим свободное произведение

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, продолжающего отображения $a_1 \mapsto b_1$ и $a_2 \mapsto b_2$. Покажем, что группа G не аппроксимируема конечными 2–группами.

Обозначим элемент xy группы G через t. Легко проверяется, что

$$ta_1 \neq a_1 t, \;\; t^3 a_1 = a_1 t^3. \tag{4.1}$$

Пусть σ — гомоморфизм группы G на конечную 2–группу P. Тогда в силу (4.1)

$$(t\sigma)^3 a_1\sigma = a_1\sigma (t\sigma)^3. \tag{4.2}$$

Кроме того, так как P — 2–группа, то для подходящего числа k получаем $(t\sigma)^{2^k} = 1$, и поэтому

$$(t\sigma)^{2^k} a_1\sigma = a_1\sigma (t\sigma)^{2^k}. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$t\sigma \cdot a_1\sigma = a_1\sigma \cdot t\sigma. \tag{4.4}$$

Таким образом, $ta_1 \neq a_1 t$ (см. (4.1)), но при любом гомоморфизме σ группы G на конечную 2–группу верно равенство (4.4). Поэтому группа G не аппроксимируется конечными 2–группами.

4.2. Предварительные замечания

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathcal{F}_\pi$–отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π–группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно и легко проверяется, что если подгруппа H нормальна в G, то она $\mathcal{F}_\pi$–отделима в G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.

Предложение 4.1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, то фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Доказательство. Пусть группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Докажем, что фактор-группа A/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема (доказательство $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости B/H аналогично). Для этого достаточно показать, что подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$–отделима в группе A.

Предположим от противного, что существует элемент a группы A, не принадлежащий H, и такой, что для любого гомоморфизма ψ группы A на конечную π–группу

$$a\psi \in H\psi. \tag{4.5}$$

Так как группа B нильпотентна, то существует такое натуральное n, что для произвольного простого коммутатора веса n, составленного из элементов группы B, выполняется равенство

$$[x_1, [x_2, [\ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]]] = 1 \tag{4.6}$$

(см., напр., [13, с. 388]), где для любых элементов x, y группы B

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

— их взаимный коммутатор. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий H. Рассмотрим в группе G простой коммутатор веса n следующего вида:

$$c = [a, [a, [\ldots, [a, b] \ldots]]].$$

Заметим, что элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 2^n, и поэтому $c \neq 1$. Отсюда и из того, что группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема следует, что в G существует нормальная подгруппа N конечного π–индекса, не содержащая c.

Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/N,$$

и обозначим через ψ его ограничение на подгруппу A. Тогда ψ — гомоморфизм группы A на конечную π–группу AN/N. Поэтому в силу (4.5) $a\psi \in H\psi$, т. е. существует элемент $h \in H$ такой, что $a\psi = h\psi$ или, что то же самое, $a\varepsilon = h\varepsilon$. Тогда

$$c\varepsilon = [a\varepsilon, [a\varepsilon, [\ldots, [a\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] = \\ = [h\varepsilon, [h\varepsilon, [\ldots, [h\varepsilon, b\varepsilon] \ldots]]] = [h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]]\varepsilon,$$

причем

$$[h, [h, [\ldots, [h, b] \ldots]]] = 1,$$

так как $h \in B$, $b \in B$, и в группе B выполняется тождество (4.6). Следовательно,

$$c\varepsilon = 1.$$

Но, с другой стороны,

$$c \notin N = \mathrm{Ker}\varepsilon.$$

Получили противоречие. Следовательно, фактор-группа A/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Предложение доказано.

Заметим, что предложение 4.1 обеспечивает необходимость в теореме 4.1.

В первой главе диссертации было доказано, что если разрешимая группа конечного ранга является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то она сама финитно аппроксимируема (см. предл. 1.4). Аналогичное утверждение для $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости будет уже не верно. Т. е. если разрешимая группа G конечного ранга является расширением конечной π–группы с помощью $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы, то сама она не обязана быть $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой. Иначе дело обстоит в случае, когда G является нильпотентной группой конечного ранга.

Предложение 4.2. *Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной π–группы с помощью $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы, то группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть H — конечная нормальная π–подгруппа группы G и фактор-группа G/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Покажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Для этого рассмотрим произвольный неединичный элемент

g из G и укажем для него гомоморфизм группы G на конечную π–группу, переводящий g в отличный от 1 элемент.

Предположим сначала, что $g \notin H$. Пусть

$$\varepsilon : G \to G/H$$

— естественный гомоморфизм. Тогда $g\varepsilon \neq 1$. Отсюда и из того, что G/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема следует, что существует гомоморфизм ρ группы G/H на конечную π–группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь предположим, что $g \in H$. В силу предложения 1.4 группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H конечна следует, что существует гомоморфизм ρ группы G на некоторую конечную группу F инъективный на H. Так как F — конечная нильпотентная группа, то в силу предложения 3.6 она раскладывается в прямое произведение вида

$$F = P \times T,$$

где P — наибольшая π–подгруппа группы F. Поскольку H — π–подгруппа группы G, то $H\rho \subseteq P$. Рассмотрим проекцию σ группы F на ее подгруппу P. Тогда $\rho\sigma$ — гомоморфизм группы G на конечную π–группу P. Так как ρ инъективен на H, $H\rho \subseteq P$ и σ инъективен на P, то гомоморфизм $\rho\sigma$ инъективен на H. Поэтому $g\rho\sigma \neq 1$. Таким образом, $\rho\sigma$ — искомый гомоморфизм. Предложение доказано.

Во второй главе говорилось, что свободные группы $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы для любого простого числа p (см. предл. 2.9). Очевидно, что если группа $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема для любого простого числа p, то она $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема для любого множества π простых чисел. Поэтому следствием предложения 2.9 является следующее утверждение.

Предложение 4.3. *Пусть G — свободная группа, и π — некоторое множество простых чисел. Тогда группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.*

С помощью предложения 4.3 легко доказывается следующее утверждение (см., напр., [27, теор. 4.1] или [15, с. 429]).

Предложение 4.4. *Пусть π — множество простых чисел. Свободное произведение любого семейства $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группой.*

Напомним определение обобщенного прямого произведения групп. Пусть A и B — некоторые группы, H и K — центральные подгруппы групп A и B соответственно, и φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Обобщенным прямым произведением групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K называется группа P, представляющая собой фактор-группу прямого произведения $A \times B$ по его подгруппе, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Очевидно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу P. Поэтому можно считать, что A и B — подгруппы группы P. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее группу P будем называть обобщенным прямым произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Предложение 4.5. *Пусть G — свободное произведение конечных π–групп A и B с объединенной подгруппой H. Если H центральна в группах A и B, то группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.*

Доказательство. Так как подгруппа H центральна в группах A и B, то можно рассмотреть обобщенное прямое произведение P групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидно, что P — конечная π–группа, и что тождественные отображения $A \to A$ и $B \to B$ могут быть продолжены до гомоморфизма

$$\rho : G \to P.$$

Из построения ρ видно, что его ядро F тривиально пересекает подгруппы A и B, а также все сопряженные с ними в группе G подгруппы, откуда в силу предложения 2.8 получаем, что F — свободная группа.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы F (см. предложение 4.3) с помощью конечной π–группы P. Хорошо известно (см., напр., [27, лемма 1.5]), что такое расширение $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемо. Предложение доказано.

Предложение 4.6. *Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Если H центральна в группах A и B, то группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группа A $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, а ее подгруппа H конечна, то в A существует нормальная подгруппа M конечного π–индекса такая, что $M \cap H = 1$. Аналогично, в группе B существует нормальная подгруппа N конечного π–индекса такая, что $N \cap H = 1$. По предложению 2.7 из второй главы диссертации естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ можно продолжить до гомоморфизма

$$\rho_{MN} : G \to G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN}).$$

Очевидно, что ρ_{MN} инъективен на H.

Заметим, что группа G_{MN} является свободным произведением двух конечных π–групп с центральной объединенной подгруппой. Поэтому в силу предложения 4.5 группа G_{MN} $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H_{MN} конечна следует, что существует гомоморфизм ψ группы G_{MN} на конечную π–группу P инъективный на H_{MN}. Тогда гомоморфизм $\rho_{MN}\psi$ инъективен на подгруппе H, и поэтому его ядро R пересекается с H тривиально. В силу предложения 2.8 группа R раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы F и семейства подгрупп вида

$$R \cap x^{-1}Ax \ \text{ и } \ R \cap x^{-1}Bx,$$

где $x \in G$. Заметим, что подгруппа F $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема по предложению 4.3, а остальные свободные сомножители из разложения группы R $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы вследствие $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости групп A и B. Поэтому из предложения 4.4 следует, что и группа R $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой группы R с помощью конечной π–группы P. Поэтому G сама $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Предложение доказано.

4.3. Доказательство теорем 4.1 и 4.2

Доказательство теоремы 4.1. Пусть G — свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть A и B — нильпотентные группы конечного ранга. Докажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы. Необходимость в этом утверждении обеспечивается предложением 4.1, поэтому остается доказать достаточность.

Пусть фактор-группы A/H и B/H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы. Докажем, что группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g из G указать гомоморфизм группы G на $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемую группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Пусть

$$\varepsilon : G \to G/H$$

— естественный гомоморфизм. Тогда образ элемента g относительно ε отличен от 1. При этом фактор-группа G/H является свободным произведением $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A/H и B/H, и поэтому сама $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Таким образом, ε — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как группа H $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема, то в ней существует подгруппа N конечного π–индекса, не содержащая элемент g. При этом N нормальна в группе G, поскольку содержится в ее центре. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/N.$$

Очевидно, что

$$G/N = (A/N * B/N; H/N)$$

— свободное произведение групп A/N и B/N с объединенной подгруппой H/N. Заметим, что группы A/N и B/N являются расширениями конечной π–группы H/N с помощью $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A/H и B/H соответственно. Отсюда и из того, что A/N и B/N — нильпотентные группы конечного ранга, по предложению 4.2 следует, что они $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы. Таким образом, группа G/N является свободным произведением $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых групп A/N и B/N с конечной центральной объединенной подгруппой H/N. Поэтому в силу предложения 4.6 получаем, что группа G/N $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема. Остается отметить, что $g\varepsilon \neq 1$, и что ε — искомый гомоморфизм. Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть G — группа, $\omega_\pi(G)$ — множество всех π–полных элементов группы G, $\sigma_\pi(G)$ — пересечение всех нормальных подгрупп конечного π–индекса группы G. Покажем, что $\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G)$. Предположим от противного, что существует π–полный элемент a группы G, не принадлежащий $\sigma_\pi(G)$. Так как в конечной π–группе нет π–полных элементов отличных от 1, то для любого гомоморфизма φ группы G на конечную π–группу верно равенство

$$a\varphi = 1. \tag{4.7}$$

С другой стороны, так как $a \notin \sigma_\pi(G)$, то найдется нормальная подгруппа N группы G конечного π–индекса, не содержащая a. При этом образ элемента a относительно естественного гомоморфизма

$$\varepsilon : G \to G/N$$

отличен от 1. Получили противоречие с (4.7). Поэтому

$$\omega_\pi(G) \subseteq \sigma_\pi(G).$$

Предполагая дополнительно, что G — нильпотентная группа конечного ранга, докажем, что

$$\sigma_\pi(G) \subseteq \omega_\pi(G).$$

Допустим от противного, что некоторый элемент a из G принадлежит $\sigma_\pi(G)$, но не является π–полным. Тогда найдется такое π–число n, что уравнение

$$x^n = a$$

не разрешимо в группе G. Отсюда по предложению 3.11 из третьей главы диссертации следует, что

$$a \notin G^{n^c},$$

где c — ступень нильпотентности группы G. По предложению 1.9 первой главы диссертации подгруппа G^{n^c} имеет конечный индекс в группе G. Кроме того, очевидно, что поскольку n — π–число, то фактор-группа G/G^{n^c} является π–группой. Таким образом, элемент a не принадлежит нормальной подгруппе G^{n^c} конечного π–индекса группы G. Это противоречит тому, что $a \in \sigma_\pi(G)$.

Мы видим, таким образом, что

$$\omega_\pi(G) = \sigma_\pi(G),$$

и тем самым теорема 4.2 доказана.

Заключение

В современной теории групп особое внимание уделяется исследованиям аппроксимационных свойств различных свободных конструкций групп, среди которых свободные произведения групп, свободные произведения групп с объединенными подгруппами и HNN-расширения. Данная работа продолжает такие исследования и посвящена изучению свойств финитной аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости и LERF свободных произведений групп с объединенными подгруппами. К настоящему времени известно уже достаточно много результатов, касающихся перечисленных аппроксимационных свойств, для обобщенных свободных произведений групп. Большинство из них получено при некоторых ограничениях, накладываемых на свободные сомножители и объединяемые подгруппы. В качестве объекта для диссертационного исследования нами было выбрано свободное произведение групп с нормальной объединенной подгруппой. По сравнению с некоторыми другими обобщенными свободными произведениями, аппроксимационные свойства такого свободного произведения изучены в меньшей степени, и поэтому вызывают особый интерес.

Отметим, что некоторые полученные в данной работе результаты являются обобщениями и усилениями известных результатов, другие же являются абсолютно новыми. Опишем теперь более подробно эти результаты.

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с собственной нормальной объединенной подгруппой H. В случае, когда группы A и B являются финитно аппроксимируемыми разрешимыми группами конечного ранга, группа G не всегда является финитно аппроксимируемой. Для такого свободного произведения нами получен критерий финитной аппроксимируемости, устанавливающий равносильность финитной аппроксимируемости группы G и финитной отделимости подгруппы H в группах A и B.

Далее для такого же свободного произведения G получено достаточное условие финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп. А именно, доказано, что все конечно порожденные подгруппы свободного произведения разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H финитно отделимы, если в группах A и B финитно отделимы все подгруппы.

Независимо от этого утверждения нами доказано, что в свободном произведении разрешимых ограниченных групп с нормальной объединенной подгруппой все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Кроме того, показано, что это утверждение в действительности является обобщением утверждения из предыдущего абзаца.

Переходя от свойства финитной аппроксимируемости к свойству почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, мы сначала рассматриваем свободное произведение двух полициклических групп с нормальным объединением. Нами доказано, что такое свободное произведение является почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой для любого простого p. Аналогичное утверждение для случая, когда свободные сомножители являются почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемыми нильпотентными группами конечного ранга, не всегда справедливо. Тем не менее, нами получен критерий почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости для свободного произведения G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с собственной нормальной объединенной подгруппой H. Согласно этому критерию, группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема в том и только том случае, когда фактор-группы A/H и B/H почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы.

Пока нерешенным остается вопрос о том, можно ли обобщить результаты о почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости группы G, указанные в предыдущем абзаце, рассматривая в качестве свободных сомножителей A и B почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемые разрешимые группы конечного ранга.

Кроме того, для свободного произведения полициклических групп с нормальным объединением остается ряд других нерешенных проблем. Не известно, например, будет ли такая группа линейной [12, пробл. 8.2]. Следует заметить, что для конечно порожденных групп линейность тесно связана с почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемостью [37].

Перейдем теперь к свойству $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости, а также более общему свойству $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости групп, где π — произвольное множество простых чисел. В диссертационной работе мы рассмотрели свободное произведение G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с собственной нормальной объединенной подгруппой H. Пытаясь провести аналогию с критерием почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости подобного произведения, упоминавшимся выше, выяснилось, что группа G не обязана быть $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой даже в случае, когда $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы фактор-группы

A/H и B/H. Тем не менее, нами было доказано, что если дополнительно требовать от подгруппы H, чтобы она содержалась в центрах групп A и B, то равносильность $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G и фактор-групп A/H и B/H уже имеет место. Остается невыясненным вопрос, можно ли в этом утверждении каким-то образом ослабить требование нильпотентности и конечности ранга для групп A и B.

Список литературы

1. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 1997. — Т. 38, № 1. — С. 3–13.
2. *Азаров, Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров // *Мат. заметки.* — 1998. — Т. 64, № 1. — С. 3–8.
3. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p–группами / Д. Н. Азаров, Д. И. Молдаванский // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 1999. — № 2. — С. 8–9.
4. *Азаров, Д. Н.* О группах конечного общего ранга / Д. Н. Азаров // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2004. — № 3. — С. 100–103.
5. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами конечных индексов / Д. Н. Азаров // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2007. — № 3. — С. 55–59.
6. *Азаров, Д. Н.* Аппроксимационные свойства свободных произведений групп с циклическим объединением / Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2008. — № 2. — С. 56–63.
7. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нильпотентных групп / Д. Н. Азаров, И. Г. Васькова // *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* — 2008. — № 18. — С. 9–16.
8. *Азаров, Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами / Д. Н. Азаров // *Чебышевский сборник.* — 2010. — Т. 11, № 3(35). — С. 11–21.
9. *Азаров, Д. Н.* Почти аппроксимируемость конечными p–группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов // *Вестн. Иван. гос. ун-та.* — 2011. — № 2. — С. 94–97.
10. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга / Д. Н. Азаров // *Сиб. матем. журнал.* — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 485–497.
11. *Каргаполов, М. И.* Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. — М.: Наука, 1977. — 288 с.

12. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. — Новосибирск, 2006.
13. *Курош, А. Г.* Теория групп / А. Г. Курош. — М.: Наука, 1967. — 648 с.
14. *Линдон, Р.* Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. — М.: Мир, 1980. — 450 с.
15. *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
16. *Мальцев, А. И.* О группах конечного ранга / А. И. Мальцев // *Мат. сб.* — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 351–352.
17. *Мальцев, А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы / А. И. Мальцев // *Ученые зап. Иван. гос. пед. ин-та.* — 1958. — Т. 18. — С. 49–60.
18. *Плоткин, Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем / Б. И. Плоткин. — М.: Наука, 1966. — 604 с.
19. *Романовский, Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения / Н. С. Романовский // *Изв. АН СССР. Сер. Математика.* — 1969. — Т. 33, № 6. — С. 1324–1329.
20. *Соколов, Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p–группами свободных произведений групп с нормальным объединением / Е. В. Соколов // *Мат. заметки.* — 2005. — Т. 78, № 1. — С. 125–131.
21. *Шмелькин, А. Л.* О полициклических группах / А. Л. Шмелькин // *Сиб. мат. журн.* — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 234–235.
22. *Allenby, R. B. J. T.* On locally extended residually finite groups / R. B. J. T. Allenby, R. J. Gregorac // *Lecture Notes Math.* — 1973. — V. 319. — P. 9–17.
23. *Baumslag, G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups / G. Baumslag // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1963. — V. 106. — P. 193–209.
24. *Brunner, A. M.* The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation / A. M. Brunner, R. G. Burns, D. Solitar // *Contributions to group theory, Contemp. Math.* — 1984. — V. 33. — P. 90–115.
25. *Dyer, J.* On the residual finiteness of generalized free products / J. Dyer // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1968. — V. 133, № 1. — P. 131–143.
26. *Gildenhuys, D.* One-relator groups that are residually of prime power order / D. Gildenhuys // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* — 1975. — V. 19. — P. 385–409.

27. *Gruenberg, K. W.* Residual properties of infinite soluble groups / K. W. Gruenberg // *Proc. London Math. Soc.* — 1957. — V. 7. — P. 29–62.
28. *Hall, M.* Coset representations of free groups / M. Hall // *Transactions of the Amer. Math. Soc.* — 1949. — V. 67. — P. 431–451.
29. *Higman, G.* Amalgams of p–groups / G. Higman // *J. Algebra.* — 1964. — № 1. — P. 301–305.
30. *Hirsh, K. A.* On infinite soluble groups / K. A. Hirsh // *J. London Math. Soc.* — 1952. — V. 27. — P. 81–85.
31. *Iwasawa, K.* Einige Satze uber freie Gruppen / K. Iwasawa // *Proc. Acad. Tokyo.* — 1943. — V. 19. — P. 272–274.
32. *Kim, G.* On amalgamated free products of residually p–finite groups / G. Kim, J. McCarron // *J. Algebra.* — 1993. — V. 162. — P. 1–11.
33. *Kim, G.* Some residually p–finite one-relator groups / G. Kim, J. McCarron // *J. Algebra.* — 1994. — V. 169. — P. 817–826.
34. *Kim, G.* On generalized free products of residually finite p–groups / G. Kim, C. Y. Tang // *J. Algebra.* — 1998. — V. 201. — P. 317–327.
35. *Kim, G.* Residual p–finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups / G. Kim, Y. Lee, J. McCarron // *Kyungpook Math. J.* — 2008. — V. 48, № 3. — P. 495–502.
36. *Lennox, J.* The theory of infinite soluble groups / J. Lennox, D. Robinson. — Oxford.: Clarendon press, 2004. — 344 P.
37. *Lubotzky, A.* Residually finite groups of finite rank / A. Lubotzky, A. Mann // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* — 1989. — V. 106, № 3. — P. 185–188.
38. *Neumann, B.* An essau on free products of groups with amalgamations / B. Neumann // *Philos. Transactions of the Royal Soc. of London.* — 1954. — V. 246. — P. 503–554.
39. *Shirvani, M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag / M. Shirvani // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1988. — V. 104, № 3. — P. 703–706.

Публикации автора

40. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2011. – Вып. 2. – С. 98–103.

41. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободного произведения разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 25–29 апреля 2011 г.: в 7 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2011. – Ч. 1. – С. 104–105.
42. *Розов, А. В.* О финитной отделимости конечно порожденных подгрупп свободного произведения ограниченных разрешимых групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Математика и ее приложения: журнал Иван. мат. общества.* – 2011. – Вып. 1(8). – С. 95–100.
43. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2012. – Вып. 2. – С. 131–138.
44. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Теория групп и ее приложения: тез. IX Междунар. школы-конф. по теории групп, Владикавказ, 9–15 июля 2012 г. – Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2012. – С. 102–104.
45. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 23–27 апреля 2012 г.: в 8 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2012. – Ч. 8 – С. 10–11.
46. *Розов, А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Чебышевский сборник.* – 2012. – Т. 13, вып. 1(41). – С. 130–142.
47. *Азаров, Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами / Д. Н. Азаров, А. В. Розов // Аппроксиамационные свойства групп. Записки семинара по комбинаторной теории групп : монография / Ред.: Молдаванский Д. И., Яцкин Н. И. – Изд-во: LAP Lambert Academic

Publishing, 2012. – Глава 29. – С. 243–249.

48. *Розов, А. В.* О финитной аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений разрешимых групп конечного ранга / А. В. Розов // *Моделирование и анализ информационных систем.* – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 124–132.
49. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными π–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Ярославский пед. вестн. Естеств. науки.* – 2013. – Т. 3, № 2. – С. 7–13.
50. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Известия ВУЗов. Математика.* (Статья принята к печати. URL: http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/index.php?id=14. Дата обращения: 8.11.2013).
51. *Розов, А. В.* О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой / А. В. Розов // Междунар. конференция "Мальцевские чтения": тез. докладов, Новосибирск, 11–15 ноября 2013 г. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, НГУ, 2013. – С. 98.
52. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными π–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральным объединением / А. В. Розов // Молодая наука в классическом университете: тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 22–26 апреля 2013 г.: в 7 ч. – Иваново: Изд-во "Иван. гос. ун-т", 2013. – Ч. 1. – С. 108.
53. *Розов, А. В.* Об аппроксимируемости конечными p–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами / А. В. Розов // *Вестн. Иван. гос. ун-та. Естеств., обществ. науки.* – 2013. – Вып. 2. – С. 88–93.