Известия вузов. Математика
2014, №11, с. 64–71

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. РОЗОВ

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Аннотация. Пусть G — свободное произведение полициклических групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K. Доказано, что группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для любого простого числа p.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение групп, полициклическая группа, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

УДК: 512.543

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$–аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента x относительно которого отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$–аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Более того, любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. Этот результат, ставший уже классическим, был получен А.Л. Шмелькиным в [1].

Свободное произведение двух финитно аппроксимируемых ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых) групп финитно аппроксимируемо ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо) [2], [3].

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное

Поступила 15.04.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B,\ H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Г. Баумслаг доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенная подгруппа H конечна, то группа G финитно аппроксимируема [4]. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. С другой стороны, в работе [3] доказано, что свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. В частности, свободное произведение двух полициклических групп с конечной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого p.

В работе Д.Н. Азарова [5] получен критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с объединенной подгруппой конечного индекса. Там же доказано, что для такого свободного произведения условие финитной аппроксимируемости равносильно условию почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для всех простых p.

Еще одним естественным ограничением, накладываемым на подгруппу H, является ее нормальность в группах A и B. Именно такое ограничение будем рассматривать в данной статье. Г. Баумслаг в [4] доказал, что если группы A и B являются полициклическими, а подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G финитно аппроксимируема. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми группами и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Нами получен следующий результат.

Теорема. *Свободное произведение G полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой для любого простого числа p.*

Ранее в работе [6] этот результат был получен для частного случая, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные группы.

Для доказательства теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенну́ю подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. Если A — конечная p–группа, то ее подгруппа $A'A^p$ очевидно совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Предложение 1. *Пусть A — конечная p-группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы A. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, то Γ является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (например, [7], с. 562).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$.

Следующие два предложения, принадлежащие Д.Н. Азарову, не опубликованы. Мы приводим здесь эти утверждения с подробными доказательствами.

Предложение 2. *Пусть G — расщепляемое расширение конечной p-группы A с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы B. И пусть взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Для каждого элемента x из G через $\widehat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы G, действующий по следующему правилу: $g\widehat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G. И пусть $\mathrm{Aut}_B(A) = \{\widehat{x}|_A : x \in B\}$ — множество ограничений на подгруппу A всех внутренних автоморфизмов группы G, производимых элементами из B. Это множество является подгруппой в группе всех автоморфизмов группы A. Так как $[B, A] \subseteq A'A^p$, то все автоморфизмы из $\mathrm{Aut}_B(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Следовательно, в силу предложения 1 имеем, что $\mathrm{Aut}_B(A)$ — конечная p-группа.

Пусть $\theta : B \to \mathrm{Aut}_B(A)$ — гомоморфизм, сопоставляющий каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\widehat{b}$ группы G, и пусть $H = \mathrm{Ker}\,\theta$. Так как $\mathrm{Aut}_B(A)$ — конечная p-группа, то H — нормальная подгруппа группы B конечного p-индекса. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. Из последних двух предложений получаем, что H — подгруппа конечного p-индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку содержится в группе B. Заметим еще, что подгруппа H нормальна в группе G, поскольку она поэлементно перестановочна с подгруппой A и нормальна в подгруппе B.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы H с помощью конечной p-группы G/H. Отсюда следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. □

Предложение 3. *Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы A с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы B и $[B, A] \subseteq A'A^p$. Тогда группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Для доказательства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать нормальную подгруппу N группы G, не содержащую элемент g и такую, что фактор-группа G/N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Если $g \notin A$, то в качестве N можно взять A, так как $G/A \cong B$ — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Если же $g \in A$, то из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы A следует существование в ней нормальной подгруппы M конечного p-индекса, не содержащей g. Пусть N — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с M. Тогда N — подгруппа конечного p-индекса группы A, нормальная в G и не содержащая элемент g. Группа G/N является расщепляемым расширением конечной p-группы A/N с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $BN/N \cong B$, причем поскольку $[B, A] \subseteq A'A^p$, то $[BN/N, A/N] \subseteq (A/N)'(A/N)^p$, и в силу предложения 2 группа G/N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. $\square$

Предложение 4. *Пусть G — полициклическая группа, H — ее нормальная подгруппа и p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для любого целого неотрицательного числа k фактор-группа S/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группа G является полициклической и H — ее нормальная подгруппа, то существует последовательность подгрупп

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_r = G$$

такая, что для каждого $i = 1, \dots, r$ подгруппа G_{i-1} нормальна в G_i, и фактор-группа G_i/G_{i-1} является циклической. Докажем предложение индукцией по r.

Если $r = 0$, то $G = H$, и в качестве искомой подгруппы S можно взять H. Действительно, при таком выборе S индекс подгруппы S в группе G равен единице, и $S/H^{p^k} = H/H^{p^k}$ — конечная p-группа для любого $k \geq 0$.

Пусть теперь $r > 0$. По индуктивному предположению в группе G_{r-1} существует нормальная подгруппа F конечного индекса, содержащая H и такая, что для любого $k \geq 0$ группа F/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Пусть Q — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с F. Тогда Q — подгруппа конечного индекса группы G_{r-1} нормальная в G и содержащая H. При этом для любого $k \geq 0$ подгруппа Q/H^{p^k} содержится в F/H^{p^k}, и поэтому $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Если G/G_{r-1} — конечная циклическая группа, то Q имеет конечный индекс в G, и можем в этом случае в качестве искомой подгруппы S взять Q.

Теперь будем предполагать, что G/G_{r-1} — бесконечная циклическая группа. Тогда G/Q представляет собой расширение конечной группы G_{r-1}/Q с помощью бесконечной циклической группы G/G_{r-1}. Поэтому G/Q содержит бесконечную циклическую подгруппу T/Q конечного индекса. Тогда T — подгруппа конечного индекса группы G, и T представляет собой расщепляемое расширение группы Q с помощью бесконечной циклической группы $X = (x)$.

Обозначим через n порядок группы $\mathrm{Aut}(Q/Q'Q^p)$. Тогда сопряжение элементом x^n на подгруппе Q действует тождественно по модулю $Q'Q^p$. Поэтому $[X^n, Q] \subseteq Q'Q^p$. Пусть $U = QX^n$. Тогда U — подгруппа конечного индекса в G и U — расщепляемое расширение Q с помощью X^n. Фактор-группа U/H^{p^k} представляет собой расщепляемое расширение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы Q/H^{p^k} с помощью бесконечной циклической группы $X^n H^{p^k}/H^{p^k}$, причем

$$[X^n H^{p^k}/H^{p^k}, Q/H^{p^k}] \subseteq (Q/H^{p^k})'(Q/H^{p^k})^p.$$

Поэтому в силу предложения 3 группа U/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Пусть S — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с U. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, и для любого $k \geq 0$ подгруппа S/H^{p^k} $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, как подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы U/H^{p^k}. $\square$

Заметим, что частным случаем предложения 4 является упомянутый выше результат А.Л. Шмелькина о почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости полициклических групп.

Предложение 5. *Пусть G — полициклическая группа, H — ее нормальная подгруппа, и H_1 — подгруппа конечного индекса в H нормальная в G и p — простое число. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *В группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, удовлетворяющая равенству $S \cap H = H_1$ и такая, что для любого целого неотрицательного числа k группа $S/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

2. *Пусть S такая же, как в утверждении 1. Тогда для любого $k \geq 0$ существует подгруппа M конечного p-индекса группы S нормальная в G и такая, что $M \cap H_1 = H_1^{p^k} = M \cap H$.*

Доказательство. 1. Так как H/H_1 — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/H_1, то в G/H_1 существует нормальная подгруппа F/H_1 конечного индекса такая, что $F/H_1 \cap H/H_1 = 1$. Тогда F — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $F \cap H = H_1$. По предложению 4 существует нормальная подгруппа S_0 конечного индекса группы G, содержащая H_1 и такая, что для любого $k \geq 0$ группа $S_0/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Пусть $S = F \cap S_0$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, $S \cap H = S_0 \cap F \cap H = S_0 \cap H_1 = H_1$, и для любого $k \geq 0$ группа $S/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы $S_0/H_1^{p^k}$.

2. Предположим, что S удовлетворяет условию 1. Так как для любого $k \geq 0$ подгруппа $H_1/H_1^{p^k}$ конечна и содержится в $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группе $S/H_1^{p^k}$, то в $S/H_1^{p^k}$ существует нормальная подгруппа $N/H_1^{p^k}$ конечного p-индекса такая, что $N/H_1^{p^k} \cap H_1/H_1^{p^k} = 1$. Тогда N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы S, и $N \cap H_1 = H_1^{p^k}$.

Пусть M — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с N. Тогда M — подгруппа конечного p-индекса в S нормальная в G. Очевидно, что $M \cap H_1 = H_1^{p^k}$, и поэтому $M \cap H = M \cap S \cap H = M \cap H_1 = H_1^{p^k}$. □

Предложение 6. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. И пусть M и N — нормальные подгруппы групп A и B соответственно такие, что $M \cap H = N \cap H$. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы G на свободное произведение G_{MN} групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$.*

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется [4].

3. Доказательство основного результата

Пусть G — свободное произведение полициклических групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H и p — простое число. Покажем, что в группе G существует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса.

Так как группа H полициклическая, то она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, т. е. в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса r. Пусть $H_1 = H^r$. Тогда H_1 — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы H нормальная в G. В силу предложения 5 в группах A и B существуют нормальные подгруппы S и T конечных индексов такие, что $S \cap H = H_1 = T \cap H$, и выполняются следующие два условия.

1. Для любого целого неотрицательного числа k группы $S/H_1^{p^k}$ и $T/H_1^{p^k}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы. В частности, группы S/H_1 и T/H_1 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы.

2. Для любого $k \geq 0$ в группах S и T существуют подгруппы M и N конечных p-индексов нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H_1 = H_1^{p^k} = M \cap H$ и $N \cap H_1 = H_1^{p^k} = N \cap H$.

Используя предложение 6, построим группу $G_{ST} = (A/S * B/T; H_{ST})$ и гомоморфизм $\rho_{ST} : G \to G_{ST}$. Так как группы A/S и B/T конечны, то группа G_{ST} финитно аппроксимируема, и поэтому существует гомоморфизм τ группы G_{ST} на конечную группу инъективный на A/S и B/T. Пусть $U = \operatorname{Ker} \rho_{ST}\tau$. Очевидно, что H_1 содержится в U, и U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Кроме того,

$$U \cap A = S, \quad U \cap B = T, \quad U \cap H = U \cap A \cap H = S \cap H = H_1. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь гомоморфизм $\omega : G \to \operatorname{Aut}(H_1/H_1'H_1^p)$, сопоставляющий каждому элементу g группы G автоморфизм $\widehat{g}$ группы $H_1/H_1'H_1^p$, действующий по правилу $(xH_1'H_1^p)\widehat{g} = g^{-1}xgH_1'H_1^p$ для любого элемента $xH_1'H_1^p$ группы $H_1/H_1'H_1^p$. Пусть $V = \operatorname{Ker}\omega$. Очевидно, что H_1 содержится в V, V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и $[V, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$.

Пусть $W = U \cap V$. Тогда H_1 содержится в W и W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Покажем, что группа W $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Для этого возьмем неединичный элемент w из W и построим гомоморфизм группы W на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую группу, отображающий w в неединичный элемент.

Сначала рассмотрим случай, когда $w \notin H_1$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H_1$ — естественный гомоморфизм. Заметим, что $G/H_1 = (A/H_1 * B/H_1; H/H_1)$ — свободное произведение групп A/H_1 и B/H_1 с объединенной подгруппой H/H_1. Так как $H_1 \subseteq U$, то из (1) получаем, что $U/H_1 \cap A/H_1 = S/H_1$, $U/H_1 \cap B/H_1 = T/H_1$, $U/H_1 \cap H/H_1 = 1$. Отсюда и из теоремы Х. Нейман о строении подгрупп обобщенных свободных произведений групп ([8], с. 122) следует, что U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и семейства подгрупп группы G/H_1, сопряженных с S/H_1 и T/H_1. Следовательно, группа U/H_1, а значит, и ее подгруппа W/H_1, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Поэтому так как $w\varepsilon \neq 1$, то ограничение гомоморфизма ε на подгруппу W будет искомым гомоморфизмом.

Теперь рассмотрим случай, когда $w \in H_1$. Так как H_1 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то найдется такое целое положительное число k, что $w \notin H_1^{p^k}$. Так как подгруппы S и T удовлетворяют условию 2, то в них существуют подгруппы M и N конечных p-индексов нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H_1 = M \cap H = H_1^{p^k} = N \cap H = N \cap H_1$. Заметим, что $w \notin M$ и $w \notin N$.

Используя предложение 6, построим группу G_{MN} и гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные отображения $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Введем следующие обозначения: $G_{MN} = \overline{G}$, $A\rho_{MN} = A/M = \overline{A}$, $B\rho_{MN} = B/N = \overline{B}$, $H\rho_{MN} = \overline{H}$, $H_1\rho_{MN} = \overline{H}_1$, $S\rho_{MN} = S/M = \overline{S}$, $T\rho_{MN} = T/N = \overline{T}$, $U\rho_{MN} = \overline{U}$, $W\rho_{MN} = \overline{W}$, $w\rho_{MN} = \overline{w}$. Тогда $\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{H})$ и $\overline{w} \neq 1$.

Покажем, что $\operatorname{Ker}\rho_{MN} \leq U$. Так как $M \leq S$ и $N \leq T$, то можно рассмотреть гомоморфизмы $\alpha : A/M \to A/S$ и $\beta : B/N \to B/T$, действующие по правилу $(aM)\alpha = aS$, $(bN)\beta = bT$. Очевидно, что существует гомоморфизм $\sigma : G_{MN} \to G_{ST}$, продолжающий гомоморфизмы α и β, и что $\rho_{MN}\sigma = \rho_{ST}$. Поэтому $\operatorname{Ker}\rho_{MN} \subseteq \operatorname{Ker}\rho_{ST}$. Кроме того, $\operatorname{Ker}\rho_{ST} \subseteq U$, так как $\operatorname{Ker}\rho_{ST}\tau = U$. Таким образом, из последних двух соотношений получаем $\operatorname{Ker}\rho_{MN} \leq U$. Отсюда и из (1) следует

$$\overline{U} \cap \overline{A} = \overline{S}, \quad \overline{U} \cap \overline{B} = \overline{T}, \quad \overline{U} \cap \overline{H} = \overline{H}_1. \tag{2}$$

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G}/\overline{H}_1 = (\overline{A}/\overline{H}_1 * \overline{B}/\overline{H}_1; \overline{H}/\overline{H}_1)$. Так как $\overline{H}_1 \subseteq \overline{U}$, то из (2) вытекает

$$\overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{A}/\overline{H}_1 = \overline{S}/\overline{H}_1, \quad \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{B}/\overline{H}_1 = \overline{T}/\overline{H}_1, \quad \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{H}/\overline{H}_1 = 1.$$

Следовательно, по теореме Х. Нейман $\overline{U}/\overline{H}_1$ — свободное произведение некоторой свободной подгруппы и семейства подгрупп группы $\overline{G}/\overline{H}_1$, сопряженных с $\overline{S}/\overline{H}_1$ и $\overline{T}/\overline{H}_1$. Заметим, что все эти сопряжения являются конечными p-группами, так как $\overline{S}$ и $\overline{T}$ — конечные p-группы. В силу теоремы Куроша ([8], с. 170) подгруппа $\overline{W}/\overline{H}_1$ имеет такую же структуру, как и $\overline{U}/\overline{H}_1$, т. е. $\overline{W}/\overline{H}_1$ может быть записана в виде $\overline{W}/\overline{H}_1 = F * P_1 * P_2 * \cdots * P_m$, где F — свободная группа, а все P_i — конечные p-группы. При этом число m конечно, так как группа W конечно порождена. Рассмотрим гомоморфизм группы $\overline{W}/\overline{H}_1$ на группу $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$, продолжающий отображение $F \to 1$ и тождественные отображения $P_i \to P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Его ядро $\overline{K}/\overline{H}_1$ будет нормальной подгруппой конечного p-индекса группы $\overline{W}/\overline{H}_1$, причем в силу теоремы Куроша $\overline{K}/\overline{H}_1$ — свободная группа. Тогда $\overline{K}$ — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $\overline{W}$ и $\overline{K}$ является расширением $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение является расщепляемым. Покажем, что $\overline{K}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Так как $\overline{S}$ — конечная p-группа, то ее подгруппа $\overline{H}_1$ также является конечной p-группой. Кроме того, так как $[W, H_1] \subseteq [V, H_1] \subseteq H_1' H_1^p$, то $[\overline{W}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$, откуда следует $[\overline{K}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$. Таким образом, группа $\overline{K}$ является расщепляемым расширением конечной p-группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы $\overline{C}$, и $[\overline{C}, \overline{H}_1] \subseteq [\overline{K}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$. Поэтому в силу предложения 2 группа $\overline{K}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $\overline{K}$ — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $\overline{W}$ следует, что $\overline{W}$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Таким образом, ограничение гомоморфизма ρ_{MN} на подгруппу W будет искомым гомоморфизмом. $\square$

Автор выражает благодарность Д.Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

Литература

[1] Шмелькин А.Л. *Полициклические группы*, Сиб. матем. журн. **9** (1), 234–235 (1968).

[2] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. London Math. Soc. **7** (1), 29–62 (1957).

[3] Азаров Д.Н., Гольцов Д.В. *Почти аппроксимируемость конечными p-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами*, Вестн. Иван. гос. ун-та, № 2, 94–97 (2011).

[4] Baumslag G. *On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **106** (2), 193–209 (1963).

[5] Азаров Д.Н. *О почти аппроксимируемости конечными p-группами*, Чебышевский сборник **11** (3), 11–21 (2010).

[6] Розов А.В. *Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами*, Чебышевский сборник **13** (1), 130–142 (2012).

[7] Плоткин Б.И. *Группы автоморфизмов алгебраических систем* (Наука, М., 1966).

[8] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп* (Мир, М., 1980).

А.В. Розов

старший преподаватель, кафедра прикладной математики и компьютерных наук,
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 37/7, г. Иваново, 153025, Россия,

`e-mail:` post-box023@mail.ru

A.V. Rozov

On the virtually residually p-finiteness of free product of polycyclic groups with normal amalgamated subgroups

Abstract. Let G be a free product of polycyclic groups A and B with normal amalgamated subgroups H and K. We prove that, for any prime p, the group G is a virtually residually finite p-group.

Keywords: generalized free product, polycyclic group, virtually residually a finite p-group.

A.V. Rozov

Senior Lecturer, Chair of Applied Mathematics and Computer Sciences,
Ivanovo State University,
37/7 Ermaka str., Ivanovo, 153025 Russia,

`e-mail:` post-box023@mail.ru