УДК 521.54

**О. Е. Сенкевич**

# ОТДЕЛИМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП НИСХОДЯЩИХ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Доказана следующая теорема. Пусть $G$ – конечно порожденная абелева группа, $B$ – ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = B, \varphi)$ – нисходящее *HNN*-расширение группы $G$. Каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ финитно отделима тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.

## Введение

Напомним, что если $G$ – некоторая группа, $A$ и $B$ – изоморфные подгруппы группы $G$ и $\varphi : A \to B$ – фиксированный изоморфизм, то группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$, порождаемая образующими группы $G$ и элементом $t$ и определяемая всеми соотношениями группы $G$, а также всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$ $(a \in A)$, называется $HNN$-расширением базовой группы $G$ со связанными (с помощью изоморфизма $\varphi$) подгруппами $A$ и $B$ и проходной буквой $t$. $HNN$-расширение группы $G$ называют нисходящим, если одна из связанных подгрупп, скажем $A$, совпадает с базовой группой $G$.

В ряде работ, посвященных условиям финитной аппроксимируемости $HNN$-расширений, неоднократно было отмечено (см. напр. [5]), что необходимым (но вообще говоря, не достаточным) условием финитной аппроксимируемости группы $G^*$ является тривиальность пересечения всех так называемых (определение см. ниже) $(A, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$. В работе Д. И. Молдаванского [2] показано, что в случае нисходящего $HNN$-расширения это условие оказывается и достаточным для финитной аппроксимируемости. Позднее он заметил, что для нисходящего $HNN$-расширения фактически в тех же терминах можно сформулировать и критерий финитной отделимости всех циклических подгрупп (см. [3]). Напомним, что в соответствии с [1] подгруппа $X$ группы $Y$ называется финитно отделимой, если для любого элемента $y \in Y \setminus X$ существует гомоморфизм $\rho$ группы $Y$ на конечную группу при котором $y\rho \notin X\rho$.

В данной работе рассматривается финитная отделимость циклических подгрупп нисходящих $HNN$-расширений $G^*$, базовая группа $G$ которых является абелевой группой с конечным числом порождающих. Такая группа $G^*$ метабелева и потому финитно аппроксимируема в силу известной теоремы Ф. Холла [4] (разумеется, финитная аппроксимируемость ее следует и из работы [2]). Тем не менее, уже практически все нисходящие $HNN$-расширения бесконечной циклической группы содержат циклическую подгруппу, не являющуюся финитно отделимой: в этом случае группа $G^*$ имеет вид $\langle a, t;\ t^{-1}at = a^k \rangle$ (и входит в семейство так называемых групп Баумслага – Солитэра), и при $|k| > 1$ подгруппа, порожденная элементом $a$, не финитно отделима. Здесь будут указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы каждая циклическая подгруппа нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы являлась финитно отделимой.

Если $G$ – конечно порожденная абелева группа и $B$ – подгруппа группы $G$, изоморфная этой группе, то изоморфизм $\varphi : G \to B$ является эндоморфизмом группы $G$. Поэтому если группа $G$ является свободной абелевой, отображению $\varphi$ обычным способом сопоставляется целочисленная матрица, характеристический многочлен которой называют характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$. В общем же случае периодическая часть $\tau(G)$ группы $G$ содержится в подгруппе $B$, и потому отображение $\varphi$ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы $G/\tau(G)$ (являющейся свободной абелевой группой) на ее подгруппу $B/\tau(G)$. Тогда характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$ будем называть характеристический многочлен эндоморфизма $\overline{\varphi}$. Договоримся также целочисленный унитарный многочлен $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0$ называть сверхпримитивным, если наибольший общий делитель его коэффициентов $c_0, \ldots, c_{k-1}$ равен 1.

Основной результат работы может быть теперь сформулирован следующим образом:

**Теорема.** *Пусть $G$ – конечно порожденная абелева группа, $B$ – ее подгруппа и $\varphi$: $G \to B$ – изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t; t^{-1}Gt = B, \varphi)$ – нисходящее $HNN$-расширение группы $G$. Каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ финитно отделима тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.*

## 1. Предварительные замечания

Начнем с формулировок ряда известных понятий и результатов, использование которых при изучении аппроксимационных свойств $HNN$-

расширений является теперь своеобразным стандартом.

Напомним, прежде всего, что если $A$ и $B$ – изоморфные подгруппы группы $G$ и $\varphi$ – изоморфизм, то подгруппа $H$ группы $G$ называется $(A,B,\varphi)$-совместимой, если $(H \cap A)\varphi = H \cap B$. Значение этого понятия вытекает из следующих двух замечаний.

Если $H$ – $(A,B,\varphi)$-совместимая нормальная подгруппа группы $G$, то отображение $\varphi_H$, определяемое по правилу $(xH)\varphi_H = (x\varphi)H$ $(x \in A)$, является изоморфизмом подгруппы $AH/H$ фактор-группы $G/H$ на подгруппу $BH/H$. Поэтому можно построить $HNN$-расширение

$$G_H^* = (G/H, t;\ t^{-1}AH/Ht = BH/H, \varphi_H)$$

группы $G/H$ со связанными с помощью изоморфизма $\varphi_H$ подгруппами $AH/H$ и $BH/H$. Существует гомоморфизм $\rho_H$ группы

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$$

на группу $G_H^*$, продолжающий естественное отображение группы $G$ на фактор-группу $G/H$ и переводящий $t$ в $t$.

С другой стороны, пересечение с базовой группой $G$ произвольной нормальной подгруппы $HNN$-расширения $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ является $(A,B,\varphi)$-совместимой подгруппой группы $G$, и потому произвольный гомоморфизм группы $G^*$ в любую группу проходит через некоторый гомоморфизм вида $\rho_H$.

Если $G = A$, то равенство из определения $(A,B,\varphi)$-совместимой подгруппы принимает вид $H\varphi = H \cap B$. В этом случае нам понадобятся и другие характеризации таких подгрупп.

**Предложение 1.** *Пусть $G$ – некоторая группа, $B \leq G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Для произвольной нормальной подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ следующие утверждения равносильны:*

*1) подгруппа $H$ является $(G,B,\varphi)$-совместимой;*

*2) подгруппа $H$ $\varphi$-допустима (т. е. $H\varphi \subseteq H$) и $G = BH$;*

*3) подгруппа $H$ $\varphi$-допустима и для любого элемента $g \in G$ из того, что $g\varphi \in H$, следует $g \in H$.*

В самом деле, произвольная $(G,B,\varphi)$-совместимая подгруппа группы $G$ является, очевидно, $\varphi$-допустимой. Если подгруппа $H$ $\varphi$-допустима, то отображение $\varphi_H$, переводящее смежный класс $aH$ в смежный класс $(a\varphi)H$, является эндоморфизмом фактор-группы $G/H$. Непосредственно проверяется, что утверждение 1) означает биективность отображения $\varphi_H$, утверждение 2) – его сюръективность и утверждение 3) – инъективность, и остается лишь напомнить, что фактор-группа $G/H$ конечна.

Из доказательства предложения 1 получаем

**Следствие.** *Если $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ – нисходящее $HNN$-расширение группы $G$, то для любой $(G, B, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ отображение $\varphi_H$ является автоморфизмом фактор-группы $G/H$ и потому группа $G^*_H$ является расщепляющимся расширением конечной группы $G/H$ при помощи бесконечной циклической группы, порождаемой элементом $t$.*

Пусть $G$ – группа, $H$ – подгруппа группы $G$ и $\{N_i\}_{i\in I}$ – некоторое семейство нормальных подгрупп группы $G$. Будем говорить, что подгруппа $H$ отделима семейством $\{N_i\}_{i\in I}$, если

$$\bigcap_{i\in I} HN_i = H.$$

Таким образом, $H$ является финитно отделимой подгруппой группы $G$, тогда и только тогда, когда она отделима семейством всех нормальных подгрупп конечного индекса этой группы.

Если $A$ – еще одна подгруппа группы $G$, то будем говорить, что подгруппа $H$ отделима семейством $\{N_i\}_{i\in I}$ внутри $A$, если для любого элемента $a \in A$, не принадлежащего подгруппе $H$, найдется индекс $i \in I$ такой, что $a \notin HN_i$. Ясно, что подгруппа $H$, отделимая семейством $\{N_i\}_{i\in I}$, отделима этим семейством внутри каждой подгруппы группы $G$.

**Предложение 2.** *Пусть $G$ – группа и $A$ – бесконечная циклическая подгруппа группы $G$, порожденная элементом $a$. Пусть $\{N_i\}_{i\in I}$ – некоторое семейство нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$, замкнутое относительно конечных пересечений. Тогда все подгруппы группы $G$, лежащие в подгруппе $A$, отделимы внутри $A$ семейством $\{N_i\}_{i\in I}$ тогда и только тогда, когда для любого целого числа $m > 1$ найдется индекс $i \in I$ такой, что порядок элемента $aN_i$ фактор-группы $G/N_i$ делится на $m$.*

Для доказательства предположим сначала, что произвольная подгруппа, лежащая в $A$, отделима внутри $A$ семейством $\{N_i\}_{i\in I}$, и для произвольного целого числа $m > 1$ рассмотрим подгруппу $A^m$, порожденную элементом $a^m$. Так как семейство $\{N_i\}_{i\in I}$ замкнуто относительно конечных пересечений, найдется номер $i \in I$ такой, что все элементы $a, a^2, \ldots, a^{m-1}$ не входят в подгруппу $A^mN_i$. Пусть в фактор-группе $G/N_i$ элемент $aN_i$ имеет порядок $n$ и пусть $d = (m, n)$ – наибольший общий делитель чисел $m$ и $n$. Тогда для подходящих целых чисел $x$ и $y$ имеем $d = mx + ny$, и потому $a^d \in A^mN_i$. Следовательно, $d = m$ и число $n$ делится на $m$.

Обратно, если элемент $a^x$ не входит в подгруппу $A^m$, и индекс $i \in I$ выбран так, что порядок $n$ элемента $aN_i$ фактор-группы $G/N_i$ делится на $m$, то легко видеть, что $a^x \notin A^mN_i$.

**Предложение 3.** (см. [3]) *Пусть $G$ – некоторая группа, $B \leq G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ – нисходящее $HNN$-расширение группы $G$. Каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ финитно отделима тогда и только тогда, когда каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$.*

Из предложения 3 следует, что теорема, сформулированная во введении, равносильна следующему утверждению:

*Пусть $G$ – конечно порожденная абелева группа, $B$ – ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$ тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.*

Справедливость этого утверждения в том случае, когда группа $G$ является свободной абелевой, доказывается в следующем параграфе.

## 2. Доказательство теоремы для случая, когда базовая группа является свободной абелевой

Пусть $G$ – свободная абелева группа с базой $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Как уже отмечалось во введении, произвольному эндоморфизму $\varphi$ группы $G$ сопоставляется целочисленная матрица, $i$-ой строкой которой является последовательность показателей степеней выражения элемента $a_i\varphi$ через элементы базы. Характеристический многочлен этой матрицы (не зависящий от выбора базы группы $G$) будем называть характеристическим многочленом отображения $\varphi$.

Для произвольного целочисленного многочлена

$$f(x) = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}x + c_m$$

как обычно определяется его значение $f(\varphi)$ от эндоморфизма $\varphi$: для любого элемента $g \in G$

$$gf(\varphi) = (g^{c_0})\varphi^m \cdot (g^{c_1})\varphi^{m-1} \cdots (g^{c_{m-1}}\varphi) \cdot g^{c_m}.$$

Многочлен $f(x)$ будем называть аннулятором элемента $g$ (относительно эндоморфизма $\varphi$), если $gf(\varphi) = 1$. По теореме Гамильтона-Кэли характеристический многочлен отображения $\varphi$ является аннулятором всех элементов группы $G$, и потому у каждого элемента $g \in G$ имеется аннулятор $h(x)$ наименьшей положительной степени. Легко видеть, что поскольку $G$ без кручения, этот аннулятор можно без потери общности считать примитивным многочленом (напомним, что целочисленный многочлен называется примитивным, если наибольший общий делитель всех его коэффициентов равен 1). Используя далее естественное вложение группы

$G$ в линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$, нетрудно понять, что многочлен $h(x)$ является делителем в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x]$ характеристического многочлена отображения $\varphi$, а так как $h(x)$ примитивен, то в действительности делимость имеет место уже в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Поскольку характеристический многочлен отображения $\varphi$ унитарен, то и многочлен $h(x)$ является унитарным.

Таким образом, для любого элемента $g \in G$ существует аннулятор, являющийся унитарным многочленом и имеющий наименьшую степень среди всех ненулевых аннуляторов этого элемента; мы будем называть его минимальным аннулятором элемента $g$. Кроме того, легко показать, снова используя вложимость группы $G$ в линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$, что каждый делитель характеристического многочлена отображения $\varphi$ является аннулятором некоторого неединичного элемента группы $G$.

**Предложение 4.** *Пусть $G$ – свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ – подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Если каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса, то произвольный унитарный аннулятор любого неединичного элемента группы $G$ сверхпримитивен.*

Доказательство. Пусть $a$ – неединичный элемент группы $G$ и пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ – аннулятор элемента $a$. Пусть $d \geq 1$ – произвольный общий делитель чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ и $c_i = dc_i'$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Для произвольной $(G, B, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ обозначим через $m$ наименьшее положительное число такое, что элемент $a^m$ принадлежит подгруппе $H$. Пусть $t \geq 1$ – общий делитель чисел $d$ и $m$ и $d = td_1$, $m = tm_1$. Тогда для любого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ выполнено равенство $c_i m_1 = mc_i' d_1$.

Так как $a\varphi^k \cdot a^{c_{k-1}}\varphi^{k-1} \cdots a^{c_1}\varphi \cdot a^{c_0} = 1$, имеем

$$a^{m_1}\varphi^k = \left(a^{c_{k-1}m_1}\varphi^{k-1} \cdots a^{c_1 m_1}\varphi(a^{c_0 m_1}\right)^{-1} =$$
$$= \left(a^{c'_{k-1}m}\varphi^{k-1} \cdots a^{c'_1 m}\varphi(a^{c'_0 m}\right)^{-d_1},$$

и из предложения 1 следует, что элемент $a^{m_1}$ принадлежит подгруппе $H$. Поэтому $t = 1$, так что числа $d$ и $m$ взаимно просты.

Таким образом, для любой $(G, B, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ порядок элемента $a$ по модулю $H$ является числом, взаимно простым с $d$. Применение предложения 2 к подгруппе $A$, порожденной элементом $a$, дает теперь $d = 1$.

**Предложение 5.** *Пусть $G$ – свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ – подгруппа группы $G$ и $\varphi$: $A \to B$ – изоморфизм.*

*Произвольная максимальная циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса.*

Доказательство. Пусть, как обычно, для положительного целого числа $m$ $G^m$ обозначает подгруппу группы $G$, состоящую из всевозможных элементов вида $g^m$, где $g \in G$. Очевидно, что любая такая подгруппа является $\varphi$-допустимой, а если число $m$ взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то выполнено равенство $G = BG^m$. Таким образом, из предложения 1 следует, что если число $m$ взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то подгруппа $G^m$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой.

Предположим теперь, что элемент $a$ группы $G$ порождает максимальную циклическую подгруппу $A$. Тогда в группе $G$ существует такая база $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a = a_1$. Если элемент $g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ не принадлежит подгруппе $A$, то $k_i \neq 0$ для некоторого номера $i > 1$. Если теперь число $m$ не является делителем $k_i$ и взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то подгруппа $G^m$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой и $g \notin AG^m$.

Справедливость следующего утверждения проверяется непосредственно.

**Предложение 6.** *Пусть $G$ – свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ – подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ – минимальный аннулятор элемента $a$ группы $G$. Тогда система элементов $a, a\varphi, \ldots, a\varphi^{k-1}$ составляет базу наименьшей $\varphi$-допустимой подгруппы группы $G$, содержащей элемент $a$.*

*Для каждого целого числа $m \geq k$ определим, далее, последовательность чисел $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots u_{k-1}^{(m)}$, полагая $u_i^{(k)} = -c_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ и*

$$u_0^{(m+1)} = -c_0 u_{k-1}^{(m)}, \quad u_i^{(m+1)} = u_{i-1}^{(m)} - c_i u_{k-1}^{(m)} \ (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

*Тогда для любого $m \geq k$ имеет место равенство*

$$a\varphi^m = a^{u_0^{(m)}} (a\varphi)^{u_1^{(m)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(m)}}.$$

**Предложение 7.** *Пусть $G$ – свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ – подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Если минимальные аннуляторы всех элементов группы $G$ являются сверхпримитивными многочленами, то каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$.*

Доказательство. Ввиду предложения 5 достаточно показать, что все подгруппы произвольной максимальной циклической подгруппы $A$ группы $G$ отделимы внутри $A$ семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$. Для этого, в свою очередь, в силу предложения 2 достаточно для любого целого числа $m \geq 1$ построить $(G, B, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, по модулю которой порядок порождающего элемента $a$ подгруппы $A$ равен $m$.

Пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ – минимальный аннулятор элемента $a$ и пусть $A_\varphi$ обозначает наименьшую $\varphi$-допустимую подгруппу группы $G$, содержащую элемент $a$. Тогда в соответствии с предложением 6 система элементов $a, a\varphi, \ldots, a\varphi^{k-1}$ составляет базу этой подгруппы. Обозначим через $H$ совокупность всех таких элементов $g \in G$, что $g\varphi^s \in A_\varphi^m$ для некоторого $s \geq 0$. Очевидно, что $H$ – $\varphi$-допустимая подгруппа группы $G$. Покажем, что порядок элемента $a$ по модулю $H$ равен $m$.

Пусть $a^t \in H$ для некоторого целого числа $t$. Это означает, что для подходящего числа $s \geq 0$ элемент $(a\varphi^s)^t$ входит в подгруппу $A_\varphi^m$. Если $0 \leq s \leq k-1$, то $a\varphi^s$ является элементом базы $a^m, (a\varphi)^m, \ldots, (a\varphi^{k-1})^m$ подгруппы $A_\varphi^m$ и потому число $t$ делится на $m$. Если же $s \geq k$, то ввиду предложения 6 выражение элемента $a\varphi^s$ через базу подгруппы $A_\varphi$ имеет вид

$$a\varphi^s = a^{u_0^{(s)}}(a\varphi)^{u_1^{(s)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(s)}}.$$

Поэтому условие $(a\varphi^s)^t \in A_\varphi^m$ означает, что каждое из чисел

$$u_0^{(s)}t, u_1^{(s)}t, \ldots u_{k-1}^{(s)}t$$

должно делиться на $m$. Так как многочлен $f(x)$ сверхпримитивен, легко видеть, что наибольший общий делитель чисел $u_0^{(s)}, u_1^{(s)}, \ldots u_{k-1}^{(s)}$ равен 1. Поэтому число $t$ делится на $m$.

Таким образом, порядок элемента $a$ (а потому и любого элемента вида $a\varphi^s$) по модулю подгруппы $H$ равен $m$. Но эта подгруппа может не иметь конечного индекса в группе $G$. Для устранения этого недостатка рассмотрим фактор-группу $G/H$. Пусть $T/H$ – периодическая часть группы $G/H$; отметим, что все элементы вида $a\varphi^s$ принадлежат подгруппе $T$ группы $G$. Для некоторой подгруппы $B$ группы $G$ имеет место разложение группы $G/H$ в прямое произведение $G/H = B/H \times T/H$. Тогда для произвольного целого числа $k > 0$ имеем

$$(G/H)/(G/H)^k = (B/H)/(B/H)^k \times (T/H)/(T/H)^k,$$

и потому при $k$, равном порядку группы $T/H$, пересечение подгрупп $(G/H)^k$ и $T/H$ группы $G/H$ является единичной подгруппой. Так как $(G/H)^k = G^k H/H$, отсюда следует, что $G^k H \cap T = H$, и потому порядок по модулю подгруппы $G^k H$ произвольного элемента $g \in T$ совпадает с его порядком по модулю подгруппы $H$. Ясно, что подгруппа $G^k H$ является $\varphi$-допустимой и имеет конечный индекс в группе $G$. Обозначим теперь через $M$ совокупность всех таких элементов $g \in G$, что $g\varphi^s \in G^k H$ для некоторого $s \geq 0$. Очевидно, что $M$ – $(G, B, \varphi)$-совместимая подгруппа конечного индекса группы $G$, порядок элемента $a$ по модулю которой равен $m$.

В случае, когда группа $G$ является свободной абелевой, утверждение теоремы следует из предложений 4 и 7.

### 3. Завершение доказательства теоремы

Возвращаясь к общей ситуации, когда базовая группа является произвольной абелевой группой с конечным числом порождающих, докажем следующее утверждение, представляющее и определенный самостоятельный интерес.

**Предложение 8.** *Пусть $G$ – финитно аппроксимируемая группа и $H$ – конечная нормальная подгруппа группы $G$. Все (все конечнопорожденные или все циклические) подгруппы группы $G$ являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда все (соответственно, все конечнопорожденные или все циклические) подгруппы фактор-группы $G/H$ финитно отделимы.*

В самом деле, предположим сначала, что все подгруппы одного из указанных в формулировке классов финитно отделимы в группе $G$. Для произвольной подгруппы $X$ фактор-группы $G/H$ можно указать такую подгруппу $A$ группы $G$, что $X = AH/H$, причем $A$ можно считать конечно порожденной или циклической, если соответствующим свойством обладает подгруппа $X$. Если теперь элемент $Hg$ фактор-группы $G/H$ не входит в подгруппу $AH/H$, то элемент $g$ группы $G$ не принадлежит подгруппе $AH$. Поэтому подгруппа $A$ не содержит ни одного элемента вида $gh$, где $h \in H$, и так как семейство таких элементов конечно, найдется нормальная подгруппа $N$ конечного индекса группы $G$ такая, что для любого $h \in H$ элемент $gh$ не принадлежит подгруппе $AN$. Это означает, что $g \notin ANH$, и потому элемент $Hg$ фактор-группы $G/H$ не входит в подгруппу $AH/H \cdot NH/H$, причем $NH/H$ – нормальная подгруппа конечного индекса группы $G/H$. Следовательно, подгруппа $X$ финитно отделима.

С другой стороны, поскольку группа $G$ является финитно аппроксимируемой, а ее подгруппа $H$ конечна, найдется нормальная подгруппа $K$ конечного индекса группы $G$ такая, что $K \cap H = 1$. Тогда $K$ вложима в фактор-группу $G/H$ и потому наследует от нее свойство финитной отделимости всех подгрупп соответствующего класса. Так как это свойство наследуется также конечными расширениями, справедливо и обратное утверждение.

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть $G$ – конечно порожденная абелева группа, $B$ – подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ – изоморфизм. Очевидно, что периодическая часть $T$ группы $G$ содержится в подгруппе $B$ и $T\varphi = T$. Следовательно, подгруппа $T$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой и инвариантной подгруппой группы

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi),$$

а потому группа

$$G_T^* = (G/T, t;\ t^{-1}AT/Tt = BT/T, \varphi_{T})$$

совпадает с фактор-группой $G^*/T$. Из предложения 8 теперь следует, что каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ является финитно отделимой тогда и только тогда, когда финитно отделима каждая циклическая подгруппа группы $G_T^*$, являющейся $HNN$-расширением свободной абелевой группы $G/T$.

## Список использованной литературы


1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы// Учен. зап. Ив. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 58, № 5. С. 49 – 60.
2. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих *HNN*-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. С. 842 – 845.
3. *Молдаванский Д. И.* Об отделимости циклических подгрупп нисходящего *HNN*-расширения групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 56 – 58.
4. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1959. V. 9, № 36. P. 595 – 622.
5. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. V. 44. P. 110 – 115.