ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 5 Выпуск 2 (2004)

УДК 512.543

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ НИСХОДЯЩИХ HNN–РАСШИРЕНИЙ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

О. Е. Сенкевич (г. Иваново)

Аннотация

Доказано, что в нисходящем HNN–расширении конечно порожденной абелевой группы произвольный элемент, не сопряженный ни с одним элементом из базовой группы, финитно отделим от любого не сопряженного с ним элемента. Если матрица инъективного эндоморфизма свободной абелевой группы конечного ранга диагональна, то соответствующее нисходящее HNN–расширение является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Abstract

Conjugate separability of descending HNN–extensions of finitely generated abelian groups.

Senkevich O.E. (Ivanovo)

It is proved that in descending HNN–extension of finitely generated abelian group every element which is not conjugate with any element from base group is conjugacy separable. If the matrix of injective endomorphism of finitely generated free abelian group has diagonal form then the corresponding descending HNN–extension is conjugacy separable.

Введение

Напомним, что если в некоторой группе G фиксированы изоморфные подгруппы A и B и изоморфизм $\varphi : A \to B$, то группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$, порождаемая образующими группы G и элементом t и определяемая всеми определяющими соотношениями группы G, а также всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A$, называется HNN–расширением (базовой) группы G с проходной буквой t и связанными относительно изоморфизма φ подгруппами A и B. Здесь рассматривается частный случай этой конструкции, когда одна из связанных подгрупп, скажем A, совпадает с базовой группой G, и потому φ является инъективным эндоморфизмом группы G. В этом случае группа G^* называется нисходящим HNN–расширением группы G и будет записываться в виде $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$.

По сравнению с общим случаем, решение ряда вопросов для нисходящего HNN–расширения приобретает более законченный вид. Так, в работе [1] отмечено, что почти очевидное необходимое условие финитной аппроксимируемости произвольных HNN–расширений (и заведомо недостаточное в общем случае) для нисходящего HNN–расширения оказывается и достаточным, и в качестве одного из следствий этого замечания доказана финитная аппроксимируемость нисходящих HNN–расширений конечно порожденных свободных нильпотентных групп. Существенное обобщение этого результата недавно было получено в статье [2]: всякое нисходящее HNN–расширение произвольной почти полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.

В данной статье рассматривается вопрос о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящего HNN–расширения в том случае, когда базовая группа является конечно порожденной абелевой. Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, если для любых ее элементов g и h, не сопряженных в G, можно указать такой гомоморфизм θ группы G на конечную группу X, при котором образы $g\theta$ и $h\theta$ этих элементов не сопряжены в группе X. Будем говорить также, что элемент $g \in G$ является сопряженно финитно отделимым, если для любого элемента $h \in G$, не сопряженного с g, найдется такой гомоморфизм θ группы G на конечную группу X, что элементы $g\theta$ и $h\theta$ не сопряжены в группе X. Таким образом, группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы является сопряженно финитно отделимым.

Началом систематического изучения финитной аппроксимируемости относительно сопряженности HNN–расширений групп следует считать работу Дж. Дайер [3], где, в частности, доказано, что произвольное HNN–расширение конечной группы является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. В ряде работ (см., напр., [4–7]) с помощью этого результата были получены некоторые достаточные условия финитной аппроксимируемости относительно сопряженности HNN–расширений с бесконечной базовой группой, причем предполагалось, что обе связанные подгруппы не совпадают с базовой, т. е. рассматривались HNN–расширения, не являющиеся нисходящими.

Нисходящее HNN–расширение произвольной абелевой группы является, очевидно, метабелевой группой, и потому его финитная аппроксимируемость следует из известной теоремы Ф. Холла о финитной аппроксимируемости конечно порожденных метабелевых групп. Естественно предположить, что такое HNN–расширение обладает и свойством финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Тем не менее, подтвердить это предположение с помощью аналогичных соображений невозможно, как показывает построенный М. И. Каргаполовым и Е. И. Тимошенко [8] пример конечно порожденной метабелевой группы, не являющейся финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Полученные в этом направлении основные результаты данной статьи формулируются следующим образом:

Теорема 1. *Пусть* G *— конечно порожденная абелева группа,* φ *— инъективный эндоморфизм группы* G *и* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ *— соответствующее нисходящее* HNN*–расширение. Тогда произвольный элемент группы* G^**, не сопряженный ни с каким элементом из базовой группы* G*, является сопряженно финитно отделимым.*

Теорема 2. *Пусть* G *— свободная абелева группа конечного ранга* n *и пусть* φ *— эндоморфизм группы* G*, определяемый в некотором ее базисе* a_1*,* a_2*, ...,* a_n *равенствами*

$$a_i\varphi = a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где m_1*,* m_2*, ...,* m_n *— ненулевые целые числа. Тогда группа*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Заметим, что теорема 2 является обобщением одного из результатов работы [9], утверждающего, что при любом $k \neq 0$ группа вида $\langle a, b;\ a{-}1ba = b^k\rangle$ (являющаяся нисходящим HNN–расширением бесконечной циклической группы) финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Поскольку вопрос о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности произвольного нисходящего HNN–расширения конечно порожденной абелевой группы остается открытым, представляет интерес

Следствие 1. *Пусть* G *— свободная абелева группа конечного ранга. Тогда для любой ее подгруппы* H*, изоморфной всей группе* G*, существует изоморфизм* φ *группы* G *на подгруппу* H *такой, что нисходящее* HNN*–расширение* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ *является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.*

1. Предварительные замечания. Доказательство теоремы 1

Пусть G — некоторая группа, φ — инъективный эндоморфизм группы G и $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ — нисходящее HNN–расширение группы G. Следующее утверждение хорошо известно и является простым следствием леммы Бриттона о произвольных HNN–расширениях.

Предложение 1. *Произвольный элемент* $u \in G^*$ *однозначно представим в виде* $u = t^m g t^{-n}$*, где* $g \in G$ *и* m *и* n *— неотрицательные целые числа, причем если* $m > 0$ *и* $n > 0$*, то элемент* g *не принадлежит подгруппе* $G\varphi$*.*

Предложение 2. *Произвольный элемент* $u \in G^*$ *сопряжен в группе* G^* *с элементом вида* $t^k g$, *где* $g \in G$ *и* k — *некоторое целое число. Если элементы* $u = t^k g$ *и* $v = t^l h$ *сопряжены в группе* G^*, *то* $k = l$. *Элементы* $u = t^k g$ *и* $v = t^k h$, *где* $k \geqslant 0$, *сопряжены в группе* G^* *тогда и только тогда, когда для некоторого элемента* $f \in G$ *и некоторых целых чисел* $m \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 0$ *в группе* G *имеет место равенство* $(f\varphi^k)(g\varphi^m)f^{-1} = h\varphi^n$.

В самом деле, первое утверждение вытекает непосредственно из предложения 1, а второе становится очевидным при рассмотрении гомоморфизма группы G^* на бесконечную циклическую группу с порождающим t. Пусть $u = t^k g$ и $v = t^k h$, где $k \geqslant 0$. Записывая произвольный элемент $w \in G^*$ в виде $w = t^n f t^{-m}$, где $f \in G$ и $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, мы видим, что равенство $wuw^{-1} = v$ равносильно равенству

$$t^{-k} f t^k \cdot t^{-m} g t^m \cdot f = t^{-n} h t^n,$$

которое, в свою очередь, равносильно равенству $(f\varphi^k)(g\varphi^m)f^{-1} = h\varphi^n$.

Формулировка предложения 2 подсказывает целесообразность введения следующих понятий. Пусть ψ — эндоморфизм некоторой группы X. Будем говорить, что элементы x и y группы X являются ψ–эквивалентными, если для некоторых неотрицательных чисел m и n выполнено равенство $x\psi^m = y\psi^n$. Если Y — нормальная ψ–допустимая подгруппа группы X, то элементы x и y назовем ψ–эквивалентными относительно Y, если для некоторых неотрицательных чисел m и n имеет место сравнение $x\psi^m \equiv y\psi^n \pmod{Y}$. Непосредственно проверяется, что оба отношения действительно являются эквивалентностями (причем транзитивность второго из них равносильна ψ–допустимости подгруппы Y).

Для произвольного целого числа $k \geqslant 1$ обозначим через $X_k(\psi)$ множество всех элементов вида $(x\psi^k)x^{-1}$, где $x \in X$. Очевидно, что если группа X абелева, то множество $X_k(\psi)$ является ее подгруппой и притом ψ–допустимой. Поэтому эндоморфизм ψ индуцирует эндоморфизм $\overline{\psi}_k$ фактор–группы $\overline{X} = X/X_k(\psi)$, действующий по правилу $(xX_k(\psi))\overline{\psi}_k = (x\psi)X_k(\psi)$. Так как $\overline{\psi}_k^k = 1$, эндоморфизм $\overline{\psi}_k$ является автоморфизмом группы $\overline{X}$. Следовательно, соответствующее нисходящее HNN–расширение

$$\overline{X}^* = \big(\overline{X}, t;\ t^{-1} x X_k(\psi) t = (xX_k(\psi))\overline{\psi}_k\ (x \in X)\big)$$

является расщепляемым расширением группы $\overline{X}$ при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t. В частности, если абелева группа X конечно порождена, группа $\overline{X}^*$ оказывается полициклической и, следовательно (см. [10]), финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Из предложения 2 непосредственно следует

Предложение 3. *Пусть* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1} g t = g\varphi\ (g \in G)\big)$ — *нисходящее* HNN*–расширение абелевой группы* G *и* $u = t^k g$ *и* $v = t^k h$ — *элементы группы* G, $k \geqslant 0$. *Если* $k \geqslant 1$, *то элементы* u *и* v *сопряжены в группе* G^* *тогда и* *только тогда, когда в группе* G *элементы* g *и* h *являются* φ*–эквивалентными относительно подгруппы* $G_k(\varphi)$*. Если же* $k = 0$*, то элементы* u *и* v *сопряжены в группе* G^* *тогда и только тогда, когда в группе* G *элементы* g *и* h *являются* φ*–эквивалентными.*

Докажем теперь теорему 1. Пусть $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi (g \in G)\big)$ — нисходящее HNN–расширение конечно порожденной абелевой группы G и пусть элемент u группы G^* не сопряжен в этой группе ни с одним элементом ее подгруппы G. В силу предложения 2 можно считать, что этот элемент имеет вид $u = t^k g$ для некоторого целого числа k и элемента $g \in G$, причем из предложения 1 следует, что $k \neq 0$. Более того, поскольку элементы u и u^{-1} являются или не являются сопряженно финитно отделимыми одновременно, мы можем считать, что $k > 0$.

Пусть v — произвольный элемент группы G^*, не сопряженный с элементом u; снова без потери общности можно считать, что $v = t^l h$ для некоторого целого числа l и элемента $h \in G$. Если $k \neq l$, то выбрав целое число $m > 0$ так, чтобы числа k и l оставались различными по модулю m, мы видим, что в фактор–группе группы G^* по нормальному замыканию подгруппы G и элемента t^m (являющейся циклической группой порядка m) образы элементов u и v различны и потому не сопряжены.

Если $k = l$, то в силу предложения 3 элементы g и h не являются φ–эквивалентными относительно подгруппы $G_k(\varphi)$. Это означает, очевидно, что в группе $\overline{G} = G/G_k(\varphi)$ элементы $gG_k(\varphi)$ и $hG_k(\varphi)$ не являются $\overline{\varphi}_k$–эквивалентными, т. е. не являются $\overline{\varphi}_k$–эквивалентными относительно единичной подгруппы $\overline{G}_k(\overline{\varphi}_k)$. Поэтому ввиду того же предложения 1.3 элементы $\overline{u} = t^k \cdot gG_k(\varphi)$ и $\overline{v} = t^k \cdot hG_k(\varphi)$ не сопряжены в нисходящем HNN–расширении

$$\overline{G}^* = \big(\overline{G}, t;\ t^{-1}xG_k(\varphi)t = (xG_k(\varphi))\overline{\varphi}_k\ (x \in G)\big).$$

Как отмечено выше, группа $\overline{G}^*$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности, и поскольку элементы $\overline{u}$ и $\overline{v}$ являются образами элементов u и v при гомоморфизме группы G^* на группу $\overline{G}^*$, продолжающем естественное отображение группы G на фактор–группу $\overline{G}$ и переводящем t в t, доказательство теоремы 1 закончено.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть G — свободная абелева группа с базисом a_1, a_2, ..., a_n и пусть эндоморфизм φ группы G определяется отображением

$$a_i \mapsto a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где m_1, m_2, ..., m_n — ненулевые целые числа. Ввиду предложения 3 с учетом теоремы 1 и аргументов, использованных при ее доказательстве, для доказательства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

достаточно показать, что для любых элементов g и h группы G, не являющихся φ–эквивалентными, существует целое число $k \geqslant 1$ такое, что элементы g и h не являются φ–эквивалентными относительно подгруппы $G_k(\varphi)$.

Так как при отображении φ образ элемента $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ группы G имеет вид $g\varphi = a_1^{m_1 r_1} a_2^{m_2 r_2} \cdots a_n^{m_n r_n}$, элемент $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n}$ принадлежит подгруппе $G_k(\varphi)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место сравнение $x_i \equiv 0 \pmod{(m^k - 1)}$. (Запись $x \equiv y \pmod{m}$ используется здесь не только, как обычно, для положительных, но и для произвольных целых чисел m; поскольку она означает делимость целого числа $x - y$ на число m, все основные свойства сравнений сохраняются.) Следовательно, элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и $h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$ φ–эквивалентны относительно подгруппы $G_k(\varphi)$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ такие, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено сравнение $m_i^p r_i \equiv m_i^q s_i \pmod{(m_i^k - 1)}$. Считая без потери общности, что $p \geqslant q$, и полагая $x = p - q$, мы можем заменить каждое из этих сравнений равносильным ему сравнением вида $m_i^x r_i \equiv s_i \pmod{(m_i^k - 1)}$.

Таким образом, наша задача сводится к доказательству того, что если элементы

$$g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} \quad \text{и} \quad h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$$

группы G не являются φ–эквивалентными, то для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ система сравнений

$$\begin{cases} m_1^x r_1 \equiv s_1 \pmod{(m_1^k - 1)} \\ m_2^x r_2 \equiv s_2 \pmod{(m_2^k - 1)} \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ m_n^x r_n \equiv s_n \pmod{(m_n^k - 1)} \end{cases} \qquad (*)$$

относительно переменной x не имеет решений. Докажем сначала следующее простое

Предложение 4. *В каждом из следующих случаев система $(*)$ для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ не имеет решений:*

(i) существует номер i такой, что $m_i = 1$ и $r_i \neq s_i$;

(ii) существует номер i такой, что $m_i = -1$ и $r_i \neq \pm s_i$;

(iii) существует номер i такой, что или $r_i = 0$ и $s_i \neq 0$, или $r_i \neq 0$ и $s_i = 0$;

(iv) существуют номера i и j, $i \neq j$, такие, что $m_i = m_j = -1$, $r_i = s_i \neq 0$ и $r_j \neq s_j$;

(v) существует номер i такой, что $|m_i| > 1$ и если числа r_i и s_i записаны в виде $r_i = m_i^{\alpha_i} r_i'$ и $s_i = m_i^{\beta_i} s_i'$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ и r_i' и s_i' не делятся на m_i, то $r_i' \neq s_i'$.

В самом деле, неразрешимость системы $(*)$ в случаях (i) и (ii) очевидна, так как при $m_i = 1$ соответствующее сравнение из этой системы при любом $k \geqslant 1$ является равенством $r_i = s_i$, а при $m_i = -1$ соответствующее сравнение из этой системы при любом четном $k \geqslant 1$ принимает вид $(-1)^x r_i = s_i$.

Предположим, что для некоторого номера i $r_i = 0$ и $s_i \neq 0$. Поскольку тогда $r_i \neq \pm s_i$, ввиду рассмотренных случае (i) и (ii) можем считать, что $|m_i| \geqslant 2$. Тогда при любом $k \geqslant 1$

$$|m_i^k - 1| \geqslant |m_i^k| - 1 \geqslant 2^k - 1,$$

и потому выбрав k так, чтобы $2^k > |s_i| + 1$, будем иметь $|m_i^k - 1| > |s_i|$, что и означает неразрешимость соответствующего сравнения системы $(*)$.

Если для некоторых номеров i и j, таких, что $m_i = m_j = -1$, имеют место условия $r_i = s_i \neq 0$ и $r_j \neq s_j$, то поскольку ввиду рассмотреного случая (ii) можно считать, что $r_j = -s_j$, при любом четном $k \geqslant 1$ система $(*)$ содержит неразрешимую подсистему

$$\begin{cases} (-1)^x r_i = r_i \\ (-1)^x r_j = -r_j \end{cases}$$

Неразрешимость системы $(*)$ в случае (v) вытекает непосредственно из следующего утверждения, доказанного в работе [9]:

Лемма 1. *Для любого целого числа m, $|m| > 1$, и для произвольных различных целых чисел r и s, не делящихся на m, существует такое целое число $k \geqslant 1$, что сравнение*

$$m^x r \equiv s \pmod{(m^k - 1)}$$

относительно переменной x не имеет решений.

Из доказанного предложения 4 следует, в частности, что рассматривая не являющиеся φ–эквивалентными элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и $h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$, мы можем предполагать, что для любого номера i с условием $m_i = 1$ выполнено равенство $r_i = s_i$, а для всех номеров i с условием $m_i = -1$ либо одновременно выполнены равенства $r_i = s_i$, либо одновременно выполнены равенства $r_i = -s_i$. Заменив в последнем случае элемент h элементом $h\varphi$, φ–эквивалентным элементу h, мы можем, следовательно, считать, что для любого номера i с условием $|m_i| = 1$ имеет место равенство $r_i = s_i$. Таким образом, нам остается доказать

Предложение 5. *Пусть элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и $h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$ группы G не являются φ–эквивалентными и пусть для каждого номера i, для которого $r_i \neq s_i$, выполнено неравенство $|m_i| > 1$, а числа r_i и s_i записываются в виде $r_i = m_i^{\alpha_i} u_i$ и $s_i = m_i^{\beta_i} u_i$ для некоторого целого числа $u_i \neq 0$ и целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$ и $\beta_i \geqslant 0$. Тогда существует такое целое число $k \geqslant 1$, что система $(*)$ не имеет решений.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся некоторые свойства делимости чисел вида $m^k - 1$.

Лемма 2. *Для любого целого числа* m, $|m| > 1$, *и любых целых чисел* $k > 2$ *и* l *число* $m^l - 1$ *делится на число* $m^k - 1$ *тогда и только тогда, когда число* l *делится на* k.

Действительно, достаточность условия следует из известных тождеств для многочленов. Докажем необходимость. Разделим l на k с остатком: $l = kq + r$, где $0 \leqslant r < k$. Тогда, как легко видеть, $m^l - 1 = (m^k - 1)f(m) + (m^r - 1)$ для некоторого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Если число $m^l - 1$ делится на $m^k - 1$, то и число $m^r - 1$ делится на $m^k - 1$, откуда $|m^k - 1| \leqslant |m^r - 1|$. Покажем, что при $r > 0$ из этого неравенства следует, что $k = 2$.

В самом деле, так как $|m^k - 1| \geqslant |m^k| - 1$ и $|m^r - 1| \leqslant |m^r| + 1$, имеем $|m^k| - 1 \leqslant |m^r| + 1$, откуда $|m|^r(|m|^{k-r} - 1) \leqslant 2$. Поскольку $|m| > 1$, $r > 0$ и $k - r > 0$, получаем $|m|^r = 2$ и $|m|^{k-r} - 1 = 1$, откуда $r = 1$ и $k = 2$.

Для произвольного целого числа $k \geqslant 1$ обозначим через $s_k(x)$ многочлен вида $1 + x + \cdots + x^{k-1}$. Так как $x^k - 1 = (x - 1)s_k(x)$, для любого целого числа $m \neq 1$ и произвольных целых чисел $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 1$ число $m^l - 1$ делится на $m^k - 1$ тогда и только тогда, когда $s_l(m)$ делится на $s_k(m)$.

Лемма 3. *Если простое число* p *является делителем числа* $s_k(m)$, *где* $k \geqslant 1$, *то число* k *делится или на число* p, *или на некоторый отличный от единицы делитель числа* $p - 1$.

В самом деле, если простое число p является делителем числа $s_k(m)$, то имеет место сравнение $m^k \equiv 1 \pmod p$. Поскольку по теореме Ферма имеем также $m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, обозначив через d наибольший общий делитель чисел k и $p - 1$, получаем $m^d \equiv 1 \pmod p$. Поэтому если $d = 1$, т. е. $m \equiv 1 \pmod p$, то $s_k(m) \equiv k \pmod p$, откуда и следует, что k делится на p.

Приступим теперь непосредственно к доказательству предложения 5. Предположим сначала, что для некоторых номеров i и j таких, что $r_i \neq s_i$ и $r_j \neq s_j$, числа $\alpha_i - \beta_i$ и $\alpha_j - \beta_j$ различны. Обозначим через l произведение чисел вида $p\,!$, где p пробегает по всем простым делителям числа $u_i u_j$, и выберем произвольное число $k > 2$, взаимно простое с l и не делящее числа $(\alpha_i - \beta_i) - (\alpha_j - \beta_j)$. Утверждается что для этого k соответствующая подсистема

$$\begin{cases} m_i^{x+\alpha_i} u_i \equiv m_i^{\beta_i} u_i & \pmod{(m_i^k - 1)} \\ m_j^{x+\alpha_j} u_j \equiv m_j^{\beta_j} u_j & \pmod{(m_j^k - 1)} \end{cases}$$

системы $(*)$ не имеет решений.

Действительно, эта система равносильна системе вида

$$\begin{cases} (m_i^{x+\delta_i} - 1) u_i \equiv 0 & \pmod{(m_i^k - 1)} \\ (m_j^{x+\delta_j} - 1) u_j \equiv 0 & \pmod{(m_j^k - 1)}, \end{cases}$$

где $\delta_i = \alpha_i - \beta_i + k\gamma_i$ и $\delta_j = \alpha_j - \beta_j + k\gamma_j$ для некоторых чисел γ_i и γ_j таких, что $k\gamma_i \geqslant \beta_i$ и $k\gamma_j \geqslant \beta_j$. Существование решения μ этой системы означает, что число $s_{\mu+\delta_i}(m_i)u_i$ должно делиться на $s_k(m_i)$ и число $s_{\mu+\delta_j}(m_j)u_j$ должно делиться на $s_k(m_j)$. С учетом выбора числа k из лемм 3 и 2 следует тогда, что k является общим делителем чисел $\mu+\delta_i$ и $\mu+\delta_j$, откуда, в свою очередь вытекает, что разность $(\alpha_i-\beta_i)-(\alpha_j-\beta_j)$ делится на k. Так как это противоречит выбору k, неразрешимость системы $(*)$ в этом случае доказана.

Остается рассмотреть случай, когда существует такое число δ, что для всех номеров i и j таких, что $r_i \neq s_i$ имеет место равенство $\alpha_i = \beta_i + \delta$; можно предполагать без потери общности, что $\delta \geqslant 0$. Заметим, что как в случае, когда δ является четным числом, так и в случае, когда для любого номера j с условием $m_j = -1$ числа r_j и s_j равны 0, выполнено равенство $h\varphi^\delta = g$. Так как элементы g и h предполагались не φ–эквивалентными, это невозможно, и потому система $(*)$ содержит подсистему

$$\begin{cases} m_i^{x+\beta_i+\delta}u_i \equiv m_i^{\beta_i}u_i \pmod{(m_i^k-1)} \\ \qquad m_j^x r_j \equiv r_j \pmod{(m_j^k-1)}, \end{cases}$$

где $|m_i| > 1$, $m_j = -1$, $r_j \neq 0$ и δ — нечетное число. При любом четном k второе сравнение этой системы превращается в уравнение $(-1)^x r_j = r_j$, множество решений которого совпадает с множеством неотрицательных четных чисел. Так как первое сравнение при любом k равносильно сравнению $m_i^{x+\delta}u_i \equiv u_i$ $\pmod{(m_i^k-1)}$, нам достаточно указать четное число k, при котором сравнение

$$(m_i^{2y+1}-1)u_i \equiv 0 \pmod{(m_i^k-1)}$$

не имеет решений.

Рассмотрим сначала случай, когда число m_i нечетно. Поскольку тогда при любом $y \geqslant 0$ число $s_{2y+1}(m_i)$ нечетно, показатель максимальной степени числа 2, делящей левую часть этого сравнения, имеет вид $c + d$, где c — показатель максимальной степени числа 2, делящей число $m_i - 1$, d — показатель максимальной степени числа 2, делящей число u_i. С другой стороны, по теореме Эйлера для любого целого числа $n \geqslant 0$ имеет место сравнение $m_i^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$, и потому искомым является число $k = 2^n$, где $n \geqslant c + d$.

Предположим, что число m_i четно. Тогда для любого целого числа $n > 0$ числа $m_i^{2^n} - 1$ и $m_i^{2^n} + 1$ взаимно просты, и потому существует целое число $n > 0$ такое, что число $m_i^{2^n} - 1$ обладает простым делителем p, не являющимся делителем числа $u_i(m_i - 1)$. Утверждается, что при $k = 2^n$ рассматриваемое сравнение не имеет решений. Действительно, в противном случае имели бы место сравнения $m_i^{2^n} \equiv 1 \pmod{p}$ и $m_i^{2y+1} \equiv 1 \pmod{p}$, откуда следовало бы сравнение $m_i \equiv 1 \pmod{p}$, невозможное в силу выбора p. Предложение 5 доказано, и вместе с тем закончено доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN–расширений групп // Укр. матем. журн. Т. 44. 1992. С. 842–845.

[2] Hsu T., Wise D. Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 182. 2003. P. 65–78.

[3] Dyer J. Separating conjugates in amalgamated free products and HNN–extensions // Austral. Math. Soc. 29. 1980. P. 35–51.

[4] Kim G., Tang C. Y. A criterion for the conjugacy separability of certain HNN–extensions of groups // J. Algebra 222. 1999. P. 574–594.

[5] Wong P. C., Tang C. K. Conjugacy separability of certain HNN–extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25–31.

[6] Wong P. C., Tang C. K. Conjugacy separability of certain HNN–extensions of conjugacy-separable groups // Algebra Colloquium 7:2. 2000. P. 147–158.

[7] Сенкевич О. Е. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN–расширений групп // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. V Международная конференция, Тула, 19–24 мая 2003 года. Тезисы докладов. Тула: ТГПУ, 2003. С. 201–202.

[8] Каргаполов М. И., Тимошенко Е. И. К вопросу о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности метабелевых групп // IV–ый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Новосибирск, 5–9 февраля 1973 г. Тезисы докладов. Новосибирск: 1973. С. 86–88.

[9] Молдаванский Д. И., Кравченко Л. В., Фролова Е. Н. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвузовский сборник научных трудов. Тула: изд. ТГПУ, 1986. С. 81–92.

[10] Ремесленников В. Н. Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. Т. 8. 1969. С. 712–725.

Ивановский государственный университет
Поступило 30.04.2004.
E-mail: oleg_se@mail.ru