ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие финитно аппроксимируемой группы, сформулированное в сороковых годах прошлого столетия, широко изучалось и обобщалось в различных направлениях. В данной работе рассматривается два обобщения этого понятия, а именно свойство финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и свойство финитной отделимости подгрупп.

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (финитно аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых ее различных (соответственно, не сопряженных) элементов x и y найдется гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, образы относительно которого элементов x и y различны (соответственно, не сопряжены).

Подмножество M группы G называется финитно отделимым, если для любого элемента x группы G, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, образ элемента x относительно которого не принадлежит образу подмножества M.

Очевидно, что группа G является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда каждое ее одноэлементное подмножество финитно отделимо, и группа G является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый класс сопряженных элементов этой группы финитно отделим. Почти очевидно также, что произвольная группа, финитно аппроксимируемая относительно сопряженности, является финитно аппроксимируемой.

Одним из заметных направлений в современных исследованиях по аппроксимируемости групп является изучение поведения того или иного аппроксимационного свойства относительно той или иной теоретико-групповой конструкции. Так, прямое или декартово произведение произвольного семейства финитно аппроксимируемых или финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп является, очевидно, группой, финитно аппроксимируемой или финитно аппроксимируемой относительно сопряженности соответственно. С другой стороны, уже прямое произведение двух свободных групп ранга 2 содержит конечно порожденную подгруппу, не являющуюся финитно отделимой (см., напр., [13]), тогда как в силу теоремы Холла – Бернса (см. [2, с. 34]) в любой свободной группе все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Хорошо известно (см., напр., [19]), что свободное произведение произвольного семейства финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой. В. Н. Ремесленников [10] показал, что свободное произведение любого семейства групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, а в работе Н. С. Романовского [11] доказано, что в свободном произведении произвольного семейства групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если финитно отделимыми являются все конечно порожденные подгруппы в каждой группе этого семейства.

Свободное произведение является исторически первой из так называемых свободных конструкций групп; другими свободными конструкциями являются обобщенное свободное произведение, т. е. свободное произведение групп с объединенными подгруппами, и расширение Хигмана – Неймана – Нейман (HNN-расширение). Положение с аппроксимационными свойствами этих конструкций оказывается более сложным, чем для обычного свободного произведения: свободное произведение с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых групп и HNN-расширение финитно аппроксимируемой группы далеко не всегда являются финитно аппроксимируемыми группами.

По-видимому, первым примером обобщенного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп, не являющегося финитно аппроксимируемой группой, является группа Хигмана

$$\langle a, b, c;\ b^{-1}ab = a^2,\ c^{-1}ac = a^2\rangle,$$

предложенная им в работе [20] в качестве примера нехопфовой конечно определенной группы. Ввиду нехопфовости и в силу известной теоремы Мальцева о хопфовости конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп эта группа не является финитно аппроксимируемой. С другой стороны, она раскладывается в свободное произведение с объединенной циклической подгруппой групп

$$\langle a, b;\ b^{-1}ab = a^2\rangle \quad \text{и} \quad \langle a, c;\ c^{-1}ac = a^2\rangle,$$

входящих в семейство так называемых групп Баумслага – Солитэра, т. е. в семейство групп с одним определяющим соотношением вида $H(l,m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^{l}b = a^{m}\rangle$, где l и m ненулевые целые числа. Именно в этом классе групп Г. Баумслаг и Д. Солитэр в 1962 году обнаружили первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся финитно аппроксимируемыми: оказалось (см. [16] и [22]), что группа $H(l,m)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|l| = 1$, или $|m| = 1$, или $|l| = |m|$. Таким образом, группа Хигмана действительно является обобщенным свободным произведением двух финитно аппроксимируемых групп. Так как,кроме того, каждая группа вида $H(l,m)$ является HNN-расширением с проходной буквой b бесконечной циклической группы, порождаемой элементом a, среди групп Баумслага – Солитэра мы находим и примеры HNN-расширений финитно аппроксимируемых групп, не являющихся финитно аппроксимируемой группой.

Более того, поскольку произвольная группа вида $H(1,m)$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности (см. [8]), пример Хигмана одновременно свидетельствует о том, что обобщенное свободное произведение двух групп может не наследовать от свободных множителей и свойство финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Более тонкий пример приведен в работе [1], где построены две финитно аппроксимируемые относительно сопряженности группы, обобщенное свободное произведение которых является финитно аппроксимируемой группой, но не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Следует заметить, что о существовании HNN-расширения с аналогичными свойствами ничего не известно.

Многочисленные работы, посвященные нахождению условий финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами используют, в основном, технику, предложенную Г. Баумслагом в статье [15] и опирающуюся в конечном счете на доказанное там же утверждение о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Впоследствии эта техника была перенесена на конструкцию HNN-расширения в работах [14] и [17], где, в частности, было доказано, что HNN-расширение произвольной конечной группы является финитно аппроксимируемой группой. Основанное на этом результате некоторое уточнение формулировок из [14] приводит (см. [5]) к необходимому, а также достаточному условию финитной аппроксимируемости HNN-расширения. Несмотря на весьма общий характер этих условий и наличие существенного пробела между ними, в ряде случаев они позволяют получать конкретные критерии финитной аппроксимируемости (см., напр., [5]). Та же техника используется и при изучении условий финитной аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенных свободных произведений и HNN-расширений с той лишь разницей, что доказательства основаны на теоремах Джоан Дайер [18], утверждающих, что свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных групп и HNN-расширение произвольной конечной группы являются группами, финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности. Тем не менее, здесь ситуация оказывается технически намного более сложной, чем объясняется сравнительно небольшое число полученных в этом направлении результатов.

Так, в работе [21] для HNN-расширения

$$G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

некоторой группы G со связанными циклическими подгруппами A_{-1} и A_1 в том случае, когда пересечение этих подгрупп тривиально, указан ряд условий, достаточных для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G^*.

В статье [23] показано, что если группа G является конечно порожденной абелевой и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо $A_{-1} = A_1 = X \times Y$ и на подгруппе X отображение φ действует тождественно, а для любого $y \in Y$ $y\varphi = y^{-1}$, то группа G^* финитно аппроксимируема относительно сопряженности. В работе [24] тех же авторов этот результат обобщается следующим образом: если группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности и все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, подгруппы A_{-1} и A_1 конечно порождены и лежат в центре группы G и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо пересечение $A_{-1} \cap A_1$ имеет конечный индекс в каждой из подгрупп A_{-1} и A_1 и $(A_{-1} \cap A_1)\varphi = A_{-1} \cap A_1$, то группа G^* финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Условия, накладываемые на группу G и ее подгруппы A_{-1} и A_1 в [23] и [24], согласно [5] обеспечивают финитную аппроксимируемость группы G^*, и один из основных результатов данной диссертации, обобщая эти утверждения, показывает, что в этом и состоит истинная причина того, что при перечисленных в предыдущем абзаце условиях группа G^* оказывается финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

В ряде работ рассматривается интересный и важный частный случай общей конструкции HNN-расширения — так называемое нисходящее HNN-расширение, когда одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой. Можно ожидать, что в этом случае решение ряда вопросов приобретает более законченный вид. Например, в работе Д. И. Молдаванского [6] было показано, что упомянутое выше необходимое (но, вообще говоря, недостаточное) условие финитной аппроксимируемости HNN-расширения в случае нисходящего HNN-расширения оказывается и достаточным. Позднее Д. И. Молдаванский [7] заметил, что фактически в тех же терминах можно сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы нисходящее HNN-расширение являлось π_c-группой.

Напомним, что некоторая группа G называется π_c-группой, если все ее циклические подгруппы финитно отделимы. Пример группы Баумслага – Солитэра $H(1, m) = \langle a, b;\ b^{-1}ab = a^m \rangle$ показывает, что нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы может иметь неотделимую циклическую подгруппу: нетрудно видеть, что при $|m| > 1$ подгруппа группы $H(1, m)$, порождаемая элементом a, не является финитно отделимой. Здесь будет получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы нисходящее HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы являлось π_c-группой. Для таких HNN-расширений будут также получены некоторые результаты относительно свойства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Цель диссертационной работы состояла в нахождении условий финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и финитной отделимости циклических подгрупп некоторых HNN-расширений групп.

Научная новизна работы. Все результаты, представленные в работе, являются новыми. Показано, что если базовая группа HNN-расширения финитно аппроксимируема относительно сопряженности, связанные подгруппы конечно порождены, лежат в центре базовой группы и не совпадают с ней, а все подгруппы, лежащие в их произведении, финитно отделимы в базовой группе, то HNN-расширение является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой. Получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы все циклические подгруппы нисходящего HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы являлись финитно отделимыми.

Личный вклад автора. Все основные результаты работы получены соискателем самостоятельно.

Методы исследования. В работе используются стандартные методы комбинаторной теории групп, применяемые в исследованиях, связанных с конструкцией HNN-расширения.

Теоретическое и практическое значение работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства могут найти дальнейшее применение в исследованиях в данной области.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре Ивановского государственного университета, на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука–XXI веку" (Ивановский государственный университет, Иваново, 19–20 апреля 2001 г.), на Научных конференциях фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука в классическом университете" (Ивановский государственный университет, Иваново, 21–25 апреля 2003 г., 20–23 апреля 2004 г.) и на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 19—24 мая 2003 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [25–31].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи параграфов, объединенных в две главы, и списка литературы, содержащего 31 наименование. Общий объем диссертации — 95 страниц.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Напомним, что если G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A_{-1} и A_1 — G и фиксированным изоморфизмом $\varphi : A_{-1} \to A_1$, то *HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными (относительно изоморфизма φ) подгруппами A_{-1} и A_1* называется группа $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$, порождаемая элементами, порождающими группу G, и еще одним элементом t и определяемая всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A_{-1}$. Группу G называют *базовой группой HNN*-расширения.

Первая глава диссертации посвящена доказательству следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть A_{-1} и A_1 — конечно порожденные центральные подгруппы группы G, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$, и пусть $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм группы A_{-1} на группу A_1. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Если группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, в том и только в том случае, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

Отметим сразу же, что поскольку произвольная почти полициклическая группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности [9] и все ее подгруппы финитно отделимы [4], получаем очевидное

Следствие. *HNN-расширение почти полициклической группы с собственными центральными связанными подгруппами является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

В частности, отсюда (и из работы [5]) вытекают отмеченные выше результаты работы [23]. Аналогично, следствием теоремы 1 являются и результаты статьи [24].

Перечислим основные этапы доказательства теоремы 1.

Условия сопряженности элементов HNN-расширения содержатся в так называемой лемме Коллинза (см., напр., [2, с. 254]).

Тем не менее, для доказательства теоремы 1 требуется более детальное, чем в обычно приводимых формулировках этой леммы, описание таких условий, и в параграфе 2 приводится доказательство расширенной формулировки леммы Коллинза. В случае, когда связанные подгруппы лежат в центре базовой группы, условия сопряженности элементов HNN-расширения допускают переформулировку на языке областей определения степеней отображения φ. А именно, для элементов базовой группы имеет место

Предложение 2.5. *Пусть A_{-1} и A_1 — центральные подгруппы группы G. Если элементы f и g группы G не сопряжены в этой группе, то f и g сопряжены в группе G^* тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $k \neq 0$ элемент f принадлежит области определения $D(\varphi^k)$ отображения φ^k и $g = f\varphi^k$.*

(Нумерация всех приводимых здесь утверждений совпадает с принятой в диссертации.)

Пусть элемент $x \in G^*$ не принадлежит базовой группе, т.е. имеет приведенную запись вида $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$, где $n \geqslant 1$. Полагая для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$, введем следующие обозначения: $\alpha = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k$, $\beta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k$ и $W(x) = D(\varphi^\alpha) \cap D(\varphi^\beta)$. Если подгруппы A_{-1} и A_1 принадлежат центру группы G, то множество $K(x) = \left\{ (a\varphi^{\sigma(x)})^{-1} a \;\middle|\; a \in W(x) \right\}$ (где $\sigma(x) = \sigma_n$) является подгруппой группы G. Имеет место

Предложение 2.7. *Пусть A_{-1} и A_1 — центральные подгруппы группы G и пусть $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, где $n \geqslant 1$. Если в группе G^* элемент x сопряжен относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ с элементом $y \in G^*$, то пересечение множеств $x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ не пусто.*

Обратно, пусть пересечение множеств $x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ не пусто, т. е. $x^{-1} a y = b$ для некоторых элементов a и b из подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$. Тогда элементы x и y сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ в том и только в том случае, когда элементы a и b сравнимы по модулю подгруппы $K(x)$.

В сходных терминах установлены также некоторые условия непустоты пересечения из формулировки предложения 2.7. Эти и некоторые другие результаты при доказательстве теоремы 1 применяются не только к группе G^*, но и к некоторым ее гомоморфным образам.

Напомним (см., напр., [5]), что подгруппа H группы G называется (A_{-1}, A_1, φ)-*совместимой*, если $(A_{-1} \cap H)\varphi = A_1 \cap H$. Если H — нормальная (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение φ индуцирует изоморфизм $\varphi_{{}_H} : A_{-1}H/H \to A_1H/H$ подгруппы $A_{-1}H/H$ фактор-группы G/H на ее подгруппу A_1H/H, и можно построить HNN-расширение $G^*_H = \big(G/H, t;\ t^{-1}A_{-1}H/H\, t = A_1H/H,\ \varphi_{{}_H}\big)$ группы G/H. Естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_{{}_H}$ группы G^* на группу G^*_H (переводящего t в t). Кроме того, если подгруппа H имеет конечный индекс в группе G, то группа G^*_H оказывается в силу [18] финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, и потому для доказательства финитно аппроксимируемой относительно сопряженности группы G^* достаточно для любых двух элементов x и y группы G^*, не сопряженных в этой группе, указать нормальную (A_{-1}, A_1, φ)-совместимую подгруппу H конечного индекса группы G такую, что образы $x\rho_{{}_H}$ и $y\rho_{{}_H}$ элементов x и y не сопряжены в группе G^*_H. Выбирать подгруппу H следует таким образом, чтобы условия несопряженности элементов x и y при переходе от группы G^* к группе G^*_H сохранились. Возможность этого и обеспечивается предположением о финитной аппроксимируемости группы G^*.

Первый из критериев финитной аппроксимируемости группы $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ при выполнении условий теоремы 1 (за исключением предположения о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G), полученных в статье Д. И. Молдаванского [5], сформулирован в терминах последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы G, определяемых по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$ (и утверждает, что группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ выполнено равенство $U_n = V_n$). В первом параграфе работы наряду с изложением стандартных свойств конструкции HNN-расширения групп приводится выражение области определения степеней отображения φ через эти подгруппы: предложение 1.4 утверждает, что для любого целого числа $k \geqslant 1$ $D(\varphi^k) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$ и $D(\varphi^{-k}) = V_{k-1}$.

Второй критерий из [5] говорит о том, что для финитной аппроксимируемости группы G^* необходимо и достаточно, чтобы в каждой подгруппе конечного индекса группы G содержалась некоторая (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса этой группы. Для доказательства теоремы 1 потребовалось некоторое усиление этого критерия.

(A_{-1}, A_1, φ)-совместимую нормальную подгруппу H группы G назовем *сильно* (A_{-1}, A_1, φ)*-совместимой*, если для любого целого числа $k \geqslant 0$ выполнено равенство

$$U_k H/H \,\cap\, V_k H/H = (U_k \cap V_k)H/H.$$

Значение этого понятия заключается в том, что при естественном гомоморфизме группы G на ее фактор-группу G/H по сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой подгруппе H члены последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ переходят в соответствующие члены аналогичных последовательностей группы G/H, построенных по подгруппам $A_{-1}H/H$ и $A_1 H/H$ и изоморфизму $\varphi_{_H}$ и потому в силу предложения 1.4 область определения отображения φ^k переходит в область определения отображения $\varphi_{_H}^k$.

Вышеупомянутое усиление критерия из [5] состоит в том, что если для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ выполнено равенство $U_n = V_n$, то в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится некоторая сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа конечного индекса этой группы (предложение 3.5).

Эти и другие предварительные результаты позволяют в параграфе 4 закончить доказательство теоремы 1.

Во второй главе рассматривается частный случай конструкции HNN-расширения, так называемое нисходящее HNN-расширение. HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A_{-1} и A_1 называется *нисходящим*, если хотя бы одна из связанных подгрупп, скажем A_{-1}, совпадает с базовой группой G. Таким образом, если G — некоторая группа, φ — инъективный эндоморфизм группы G и $B = G\varphi$, то нисходящим HNN-расширением группы G, соответствующим эндоморфизму φ, является группа $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$. В этом случае будем также записывать $G^* = \big(G, t;\; t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$.

Как упоминалось выше, уже нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы может иметь неотделимую циклическую подгруппу и потому не являться π_c-группой. Первый результат этой главы дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы нисходящее HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы являлось π_c-группой.

Пусть φ — инъективный эндоморфизм конечно порожденной абелевой группы G. Если группа G является свободной абелевой, отображению φ обычным способом сопоставляется целочисленная матрица, характеристический многочлен которой называют характеристическим многочленом эндоморфизма φ. В общем же случае периодическая часть $\tau(G)$ группы G содержится в подгруппе $B = G\varphi$, и потому отображение φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы $G/\tau(G)$, являющейся свободной абелевой группой; характеристическим многочленом эндоморфизма φ будем называть характеристический многочлен эндоморфизма $\overline{\varphi}$. Договоримся также целочисленный унитарный многочлен $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_0$ называть *сверхпримитивным*, если наибольший общий делитель его коэффициентов $c_0, \dots, c_{k-1}$ равен 1. Упомянутый результат формулируется следующим образом:

Теорема 2. *Пусть G — конечно порожденная абелева группа, B — ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Нисходящее HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$ является π_c-группой тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения φ сверхпримитивны.*

Доказательство теоремы 2 использует, в частности, следующее утверждение, представляющее и определенный самостоятельный интерес.

Предложение 6.8. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа и H — конечная нормальная подгруппа группы G. Все (все конечно порожденные или все циклические) подгруппы группы G являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы фактор-группы G/H финитно отделимы.*

Следующим рассматриваемым здесь свойством является финитная аппроксимируемость относительно сопряженности. Будем говорить, что элемент $g \in G$ является сопряженно финитно отделимым, если для любого элемента $h \in G$, не сопряженного с g, найдется такой гомоморфизм θ группы G на конечную группу X, что элементы $g\theta$ и $h\theta$ не сопряжены в группе X. Таким образом, группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы является сопряженно финитно отделимым. Здесь будет доказана

Теорема 3. *Пусть G — конечно порожденная абелева группа, B — ее подгруппа, $\varphi : G \to B$ — изоморфизм и*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$$

— соответствующее нисходящее HNN-расширение. Тогда произвольный элемент группы G^*, не сопряженный ни с каким элементом из базовой группы G, является сопряженно финитно отделимым.

Для случая, когда определяющий нисходящее HNN-расширение эндоморфизм имеет специальный вид, получен результат более законченного характера:

Теорема 4. *Пусть G — свободная абелева группа конечного ранга n и пусть φ — эндоморфизм группы G, определяемый в некоторой ее базе a_1, a_2, ... , a_n равенствами*

$$a_i\varphi = a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где m_1, m_2, ... , m_n — ненулевые целые числа. Тогда группа

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Отметим, что теорема 4 является обобщением одного из результатов работы [8], утверждающего, что при любом $k \neq 0$ группа вида $\langle a, b;\ b{-}1ab = a^k\rangle$ (являющаяся нисходящим HNN-расширением бесконечной циклической группы) финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Следует также отметить, что в недавней работе Е. В. Соколова [12] с использованием теоремы 3 и некоторых весьма неэлементарных теоретико-числовых результатов, установленных им же, доказано, что любое нисходящее HNN-расширение произвольной абелевой группы с конечным числом порождающих является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Теорема 4, разумеется, следует из этого результата; тем не менее, ее доказательство приведено здесь, поскольку оно, в отличие от доказательства Е. В. Соколова, кроме чисто теоретико-групповых методов использует лишь ряд элементарных свойств делимости целых чисел.

Литература

1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5. Иваново. 2002. С. 3–5.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
5. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123–133.
6. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 6. С. 842–845.
7. *Молдаванский Д. И.* Об отделимости циклических подгрупп нисходящего HNN-расширения групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3. Иваново. 2000. С. 56–58.
8. *Молдаванский Д. И., Кравченко Л. В., Фролова Е. Н.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп: Межвуз. сб. науч. трудов. Тула: Изд. Тульского гос. пед. ин-та им. Л. Н. Толстого, 1986. С. 81-92.
9. *Ремесленников В. Н.* Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 712–725.
10. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085–1099.
11. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324–1329.
12. *Соколов Е. В.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Матем. заметки. Т. 78. 2005. Вып. 5. С. 748–762.
13. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.

14. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179–194.
15. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193–209.
16. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.
17. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma// J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232–234.
18. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29. № 1. P. 35–51.
19. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. Vol. 7. P. 29–62.
20. *Higman G.* A finitely generated group with an isomorphic proper factor group // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 59–61.
21. *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. of Algebra. Vol. 222. 1999. P. 574–594.
22. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.
23. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain HNN extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25–31.
24. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain HNN extensions of conjugacy separable groups // Algebra Colloquium 7:2. 2000. P. 147–158.

Работы автора по теме диссертации

25. *Сенкевич О. Е.*Отделимость циклических подгрупп нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Науч. труды Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3. 2000. С. 81–90.
26. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых нисходящих HNN-расширений // Молодая наука - XXI веку. Тез. докл. межд. науч. конф. Иваново, 19-20 апреля 2001 г. Ч. 6. Иваново: ИвГУ, 2001. С. 66–67.
27. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Тез.

докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 21-25 апреля 2003 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 86–87.

28. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. V Международная конференция, Тула, 19-24 мая 2003 года. Тезисы докладов. Тула: ТГПУ, 2003. С. 201–202.
29. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20-23 апреля 2004 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2004. С. 73–74.
30. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 2. С. 121–130.
31. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Иванов. гос. ун-т. Иваново, 2005. - Рук. деп. в ВИНИТИ 22.06.2005, № 896-132005. 38 с.