ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

**Сенкевич Олег Евгеньевич**

# АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА *HNN*-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
профессор Д. И. Молдаванский

Иваново — 2006

**Содержание**

Введение . . . . . 3

ГЛАВА I.

Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности $HNN$-расширений групп с центральными связанными подгруппами . . . . . 13

§ 1. Предварительные замечания о конструкции $HNN$-расширения . . . . . 15

§ 2. О сопряженности элементов $HNN$-расширения . . . . . 30

§ 3. О финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения . . . 47

§ 4. Доказательство теоремы 1 . . . . . 56

ГЛАВА II.

Аппроксимационные свойства нисходящих $HNN$-расширений абелевых групп . . . . . 67

§ 5. Предварительные замечания. Формулировка результатов . . 67

§ 6. О финитной отделимости циклических подгрупп нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы . . . . . 71

§ 7. О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы . . . . . 83

Литература . . . . . 93

## Введение

Понятие финитно аппроксимируемой группы, сформулированное в сороковых годах прошлого столетия, широко изучалось и обобщалось в различных направлениях. В данной работе рассматривается два обобщения этого понятия, а именно свойство финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и свойство финитной отделимости подгрупп.

Напомним, что группа $G$ называется финитно аппроксимируемой (финитно аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых ее различных (соответственно, не сопряженных) элементов $x$ и $y$ найдется гомоморфизм группы $G$ на некоторую конечную группу, образы относительно которого элементов $x$ и $y$ различны (соответственно, не сопряжены).

Подмножество $M$ группы $G$ называется финитно отделимым, если для любого элемента $x$ группы $G$, не принадлежащего подмножеству $M$, существует такой гомоморфизм группы $G$ на некоторую конечную группу, образ элемента $x$ относительно которого не принадлежит образу подмножества $M$.

Очевидно, что группа $G$ является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда каждое ее одноэлементное подмножество финитно отделимо, и группа $G$ является финитно аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый класс сопряженных элементов этой группы финитно отделим. Почти очевидно также, что произвольная группа, финитно аппроксимируемая относительно сопряженности, является финитно аппроксимируемой.

Одним из заметных направлений в современных исследованиях по аппроксимируемости групп является изучение поведения того или иного аппроксимационного свойства относительно той или иной теоретико-групповой конструкции. Так, прямое или декартово произведение произвольного семейства финитно аппроксимируемых или финитно аппроксимируемых относительно сопряженности групп является, очевидно, группой, финитно аппроксимируемой или финит-

но аппроксимируемой относительно сопряженности соответственно. С другой стороны, уже прямое произведение двух свободных групп ранга 2 содержит конечно порожденную подгруппу, не являющуюся финитно отделимой (см., напр., [13]), тогда как в силу теоремы Холла – Бернса (см. [2, с. 34]) в любой свободной группе все все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. Хорошо известно (см., напр., [19]), что свободное произведение произвольного семейства финитно аппроксимируемых групп является финитно аппроксимируемой группой. В. Н. Ремесленников [10] показал, что свободное произведение любого семейства групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, а в работе Н. С. Романовского [11] доказано, что в свободном произведении произвольного семейства групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если финитно отделимыми являются все конечно порожденные подгруппы в каждой группе этого семейства.

Свободное произведение является исторически первой из так называемых свободных конструкций групп; другими свободными конструкциями являются обобщенное свободное произведение, т. е. свободное произведение групп с объединенными подгруппами, и расширение Хигмана – Неймана – Нейман ($HNN$-расширение). Положение с аппроксимационными свойствами этих конструкций оказывается более сложным, чем для обычного свободного произведения: свободное произведение с объединенными подгруппами двух финитно аппроксимируемых групп и $HNN$-расширение финитно аппроксимируемой группы далеко не всегда являются финитно аппроксимируемыми группами.

По-видимому, первым примером обобщенного свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп, не являющегося финитно аппроксимируемой группой, является группа Хигмана

$$\langle a, b, c;\ b^{-1}ab = a^2,\ c^{-1}ac = a^2\rangle,$$

предложенная им в работе [20] в качестве примера нехопфовой конечно

определенной группы. Ввиду нехопфовости и в силу известной теоремы Мальцева о хопфовости конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп эта группа не является финитно аппроксимируемой. С другой стороны, она раскладывается в свободное произведение с объединенной циклической подгруппой групп

$$\langle a, b;\ b^{-1}ab = a^2\rangle \quad \text{и} \quad \langle a, c;\ c^{-1}ac = a^2\rangle,$$

входящих в семейство так называемых групп Баумслага – Солитэра, т. е. в семейство групп с одним определяющим соотношением вида $H(l, m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m\rangle$, где $l$ и $m$ ненулевые целые числа. Именно в этом классе групп Г. Баумслаг и Д. Солитэр в 1962 году обнаружили первые примеры групп с одним определяющим соотношением, не являющихся финитно аппроксимируемыми: оказалось (см. [16] и [22]), что группа $H(l, m)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|l| = 1$, или $|m| = 1$, или $|l| = |m|$. Таким образом, группа Хигмана действительно является обобщенным свободным произведением двух финитно аппроксимируемых групп. Кроме того, поскольку каждая группа вида $H(l, m)$ является $HNN$-расширением с проходной буквой $b$ бесконечной циклической группы, порождаемой элементом $a$, среди групп Баумслага – Солитэра мы находим и примеры $HNN$-расширений финитно аппроксимируемых групп, не являющихся финитно аппроксимируемой группой.

Более того, поскольку произвольная группа вида $H(1, m)$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности (см. [8]), пример Хигмана одновременно свидетельствует о том, что обобщенное свободное произведение двух групп может не наследовать от свободных множителей и свойство финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Более тонкий пример приведен в работе [1], где построены две финитно аппроксимируемые относительно сопряженности группы, обобщенное свободное произведение которых является финитно аппроксимируемой группой и не является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Следует заметить,

что о существовании $HNN$-расширения с аналогичными свойствами ничего не известно.

Многочисленные работы, посвященные нахождению условий финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенными подгруппами используют, в основном, технику, предложенную Г. Баумслагом в статье [15] и опирающуюся в конечном счете на доказанное там же утверждение о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп. Впоследствии эта техника была перенесена на конструкцию $HNN$-расширения в работах [14] и [17], где, в частности, было доказано, что $HNN$-расширение произвольной конечной группы является финитно аппроксимируемой группой. Основанное на этом результате некоторое уточнение формулировок из [14] приводит (см. [5]) к необходимому, а также достаточному условию финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения. Несмотря на весьма общий характер этих условий и наличие существенного пробела между ними, в ряде случаев они позволяют получать конкретные критерии финитной аппроксимируемости (см., напр., [5]). Та же техника используется и при изучении условий финитной аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенных свободных произведений и $HNN$-расширений с той лишь разницей, что доказательства основаны на теоремах Джоан Дайер [18], утверждающих, что свободное произведение с объединенными подгруппами двух конечных групп и $HNN$-расширение произвольной конечной группы являются группами, финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности. Тем не менее, здесь ситуация оказывается технически намного более сложной, чем объясняется сравнительно небольшое число полученных в этом направлении результатов.

Так, в работе [21] для $HNN$-расширения

$$G^* = \left(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\right)$$

некоторой группы $G$ со связанными циклическими подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ в том случае, когда пересечение этих подгрупп тривиально, указан

ряд условий, достаточных для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы $G^*$.

В статье [23] показано, что если группа $G$ является конечно порожденной абелевой и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо $A_{-1} = A_1 = X \times Y$ и на подгруппе $X$ отображение $\varphi$ действует тождественно, а для любого $y \in Y$ $y\varphi = y^{-1}$, то группа $G^*$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности. В работе [24] тех же авторов этот результат обобщается следующим образом: если группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности и все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ конечно порождены и лежат в центре группы $G$ и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо пересечение $A_{-1} \cap A_1$ имеет конечный индекс в каждой из подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$ и $(A_{-1} \cap A_1)\varphi = A_{-1} \cap A_1$, то группа $G^*$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Условия, накладываемые на группу $G$ и ее подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ в последнем из приведенных результатов, обеспечивают, в частности, согласно [5] финитную аппроксимируемость группы $G^*$, и один из основных результатов данной диссертации, обобщая эти утверждения, показывает, что в этом и состоит истинная причина того, что при перечисленных в предыдущем абзаце условиях группа $G^*$ оказывается финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

В ряде работ рассматривается интересный и важный частный случай общей конструкции $HNN$-расширения — так называемое нисходящее $HNN$-расширение, когда одна из связанных подгрупп совпадает с базовой группой. Можно ожидать, что в этом случае решение ряда вопросов приобретает более законченный вид. Например, в работе Д. И. Молдаванского [6] было показано, что упомянутое выше необходимое (но, вообще говоря, недостаточное) условие финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения в случае нисходящего $HNN$-расширения оказывается и достаточным. Позднее Д. И. Молдаванский [7] заметил, что фактически в тех же терминах можно сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы нисходящее

$HNN$-расширение являлось $\pi_c$-группой.

Напомним, что некоторая группа $G$ называется $\pi_c$-группой, если все ее циклические подгруппы финитно отделимы. Пример группы Баумслага – Солитэра $H(1,m) = \langle a, b;\ b^{-1}ab = a^m\rangle$ показывает, что нисходящее $HNN$-расширение бесконечной циклической группы может иметь неотделимую циклическую подгруппу: нетрудно видеть, что при $|m| > 1$ подгруппа группы $H(1,m)$, порождаемая элементом $a$, не является финитно отделимой. Здесь будет получено условие, необходимое и достаточное для того, чтобы нисходящее $HNN$-расширение конечно порожденной абелевой группы являлось $\pi_c$-группой. Для этого случая будут также получены некоторые результаты относительно свойства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Перейдем к более подробному обзору результатов диссертации. В первой главе работы рассматривается $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ некоторой группы $G$ с проходной буквой $t$ и связанными относительно изоморфизма $\varphi$ подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ в предположении, что обе связанные подгруппы не совпадают с базовой группой $G$. Основным результатом, полученным здесь является

**Теорема 1.** *Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — конечно порожденные центральные подгруппы группы $G$, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$, и пусть $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм группы $A_{-1}$ на группу $A_1$. Предположим также, что в группе $G$ все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Если группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, в том и только в том случае, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

Поскольку произвольная почти полициклическая группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности [9] и все ее подгруппы финитно отделимы [4], получаем очевидное

**Следствие.** *$HNN$-расширение почти полициклической группы с собственными центральными связанными подгруппами является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

В частности, отсюда (и из работы [5]) вытекают отмеченные во введении результаты работы [23]. Аналогично, следствием теоремы 1 являются результаты статьи [24].

Доказательству теоремы 1 посвящена практически вся первая глава диссертации. Условия сопряженности элементов группы $G^*$ содержатся в так называемой лемме Коллинза (см., напр., [2, с. 254]). Тем не менее, для доказательства теоремы 1 требуется более детальное, чем в обычно приводимых формулировках этой леммы, описание таких условий, и в параграфе 2 приводится доказательство расширенной формулировки леммы Коллинза. В случае, когда связанные подгруппы лежат в центре базовой группы, условия сопряженности элементов $HNN$-расширения допускают переформулировку на языке областей определения степеней отображения $\varphi$. С другой стороны, установленный в работе [5] критерий финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ в случае, когда связанные подгруппы конечно порождены, лежат в центре базовой группы и не совпадают с ней, а конечно порожденные центральные подгруппы из их произведения финитно отделимы, формулируется в терминах последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы $G$, определенных по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. В первом параграфе работы наряду с напоминанием известных стандартных свойств конструкции $HNN$-расширения устанавливается связь между этими последовательностями и областями определения степеней отображения $\varphi$, играющая определяющую роль в доказательстве теоремы 1.

Первый результат второй главы диссертации, где рассматриваются нисходящие $HNN$-расширения, относится к проблеме финитной

отделимости подгрупп. Пример группы Баумслага – Солитэра $H(1,m)$ показывает, что уже нисходящее $HNN$-расширение бесконечной циклической группы может иметь неотделимую циклическую подгруппу и потому не быть $\pi_c$-группой. Для формулировки найденного в диссертации условия, необходимого и достаточного для того, чтобы нисходящее $HNN$-расширение конечно порожденной абелевой группы являлось $\pi_c$-группой, необходимо договориться о следующем.

Изоморфизм $\varphi$ между связанными подгруппами $HNN$-расширения в случае нисходящего $HNN$-расширения является инъективным эндоморфизмом базовой группы $G$. Если группа $G$ является свободной абелевой, отображению $\varphi$ обычным способом сопоставляется целочисленная матрица, характеристический многочлен которой называют характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$. В общем же случае периодическая часть $\tau(G)$ группы $G$ содержится в подгруппе $B = G\varphi$, и потому отображение $\varphi$ индуцирует инъективный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы $G/\tau(G)$ (являющейся свободной абелевой группой), и характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$ будем называть характеристический многочлен эндоморфизма $\overline{\varphi}$. Договоримся также целочисленный унитарный многочлен $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0$ называть сверхпримитивным, если наибольший общий делитель его коэффициентов $c_0, \ldots, c_{k-1}$ равен 1. Упомянутый результат формулируется следующим образом:

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Нисходящее $HNN$-расширение $G^* = \langle G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\rangle$ является $\pi_c$-группой тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.*

Далее во второй главе диссертации для нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы рассматриваются условия финитной аппроксимируемости относительно сопряженности. Будем говорить, что элемент $g \in G$ является сопряженно финитно отделимым, если для любого элемента $h \in G$, не сопряженного с $g$,

найдется такой гомоморфизм $\theta$ группы $G$ на конечную группу $X$, что элементы $g\theta$ и $h\theta$ не сопряжены в группе $X$. Таким образом, группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы является сопряженно финитно отделимым. Здесь будет доказана

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — ее подгруппа, $\varphi : G \to B$ — изоморфизм и*

$$G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$$

*— соответствующее нисходящее $HNN$-расширение. Тогда произвольный элемент группы $G^*$, не сопряженный ни с каким элементом из базовой группы $G$, является сопряженно финитно отделимым.*

Для случая, когда определяющий нисходящее $HNN$-расширение эндоморфизм имеет специальный вид, получен результат более законченного характера:

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа конечного ранга $n$ и пусть $\varphi$ — эндоморфизм группы $G$, определяемый в некоторой ее базе $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равенствами*

$$a_i\varphi = a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — ненулевые целые числа. Тогда $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ является группой, финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

Отметим, что теорема 4 является обобщением одного из результатов работы [8], утверждающего, что при любом $k \neq 0$ группа вида $\langle a, b;\, b^{-1}ab = a^k\rangle$ (являющаяся нисходящим $HNN$-расширением бесконечной циклической группы) финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Следует также отметить, что в недавней работе Е. В. Соколова [12] с использованием теоремы 3 и некоторых весьма неэлементарных

теоретико-числовых результатов, установленных им же, доказано, что любое нисходящее $HNN$-расширение произвольной абелевой группы с конечным числом порождающих является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Теорема 4, разумеется, следует из этого результата; тем не менее, ее доказательство приведено здесь, поскольку оно, в отличие от доказательства Е. В. Соколова, кроме чисто теоретико-групповых методов использует лишь ряд элементарных свойств делимости целых чисел.

Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре Ивановского государственного университета, на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука–XXI веку"(Ивановский государственный университет, Иваново, 19–20 апреля 2001 г.), на Научных конференциях фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых "Молодая наука в классическом университете"(Ивановский государственный университет, Иваново, 21–25 апреля 2003 г., 20–23 апреля 2004 г.) и на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения"(Тула, 19—24 мая 2003 г.). Основные результаты опубликованы в работах [25–31].

# ГЛАВА I

## Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности $HNN$-расширений групп с центральными связанными подгруппами

Целью данной главы является доказательство следующего утверждения:

**Теорема 1.** *Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — конечно порожденные центральные подгруппы группы $G$, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$, и пусть $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм группы $A_{-1}$ на группу $A_1$. Предположим также, что в группе $G$ все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Если группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t; t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, в том и только в том случае, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

Поскольку произвольная почти полициклическая группа финитно аппроксимируема относительно сопряженности [9] и все ее подгруппы финитно отделимы [4], получаем очевидное

**Следствие.** *$HNN$-расширение почти полициклической группы с собственными центральными связанными подгруппами является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

В частности, отсюда (и из работы [5]) вытекают отмеченные во введении результаты работы [23]. Аналогично, следствием теоремы 1 являются результаты статьи [24].

Критерий финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения $G^*$ с базовой группой $G$ и связанными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$, удовлетворяющими условиям теоремы, был установлен в работе [5] в тер-

минах последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы $G$, определенных по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Теорема 1 из [5] утверждает, что группа $G^*$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$. В теореме 2 той же работы установлено, что другим необходимым и достаточным условием финитной аппроксимируемости группы $G^*$ является следующее свойство группы $G$: каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$ содержит некоторую $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса этой группы; определение этого понятие напоминается в параграфе 3 данной работы; в том же параграфе получено некоторое усиление этого критерия.

В первом параграфе напоминаются известные свойства конструкции $HNN$-расширения групп и приводятся некоторые необходимые для дальнейшего дополнительные свойства этой конструкции, в частности, — выражение области определения и области значений отображения $\varphi^n$ $(n \neq 0)$ через подгруппы последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$. Сопряженность элементов $HNN$-расширения описывается леммой Коллинза. Во втором параграфе доказывается расширенный вариант этой леммы и устанавливается вид, принимаемый условиями сопряженности при дополнительном предположении центральности связанных подгрупп. Непосредственно доказательству теоремы 1 посвящен четвертый параграф.

## § 1. Предварительные замечания о конструкции $HNN$-расширения

Пусть $G$ — некоторая группа, заданная в системе порождающих $X$ множеством определяющих слов $W$. Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — изоморфные подгруппы группы $G$ и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — фиксированный изоморфизм группы $A_{-1}$ на группу $A_1$. *$HNN$-расширением группы $G$ с проходной буквой $t$ и связанными (относительно изоморфизма $\varphi$) подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$* называется группа $G^*$, порождаемая множеством $X$ и еще одним элементом $t$ и определяемая в этой системе порождающих множеством слов $W$ и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}ut = v$, где $u$ — слово от порождающих $X$, определяющее элемент подгруппы $A_{-1}$, а $v$ — слово от порождающих $X$, определяющее образ этого элемента относительно отображения $\varphi$. Будем записывать $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$, а группу $G$ называть базовой группой $HNN$-расширения.

Непосредственно из определения следует, что произвольный элемент $g$ группы $G^*$ может быть записан в виде

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n, \tag{1}$$

где $n \geqslant 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_n$ — слова от порождающих $X$. Если для некоторого номера $i$ имеет место равенство $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$ и слово $g_i$ определяет элемент из подгруппы $A_{\varepsilon_i}$, то используя выполненное в группе $G^*$ соотношение $t^{\varepsilon_i} g_i t^{-\varepsilon_i} = g_i'$ (где слово $g_i'$ определяет при $\varepsilon_i = -1$ образ, а при $\varepsilon_i = 1$ прообраз относительно отображения $\varphi$ элемента, определяемого словом $g_i$), мы можем преобразовать запись (1) элемента $g$ в запись того же элемента, имеющую вид

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots t^{\varepsilon_{i-1}} (g_{i-1} g_i' g_{i+1}) t^{\varepsilon_{i+2}} \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n.$$

Поскольку такое преобразование (называемое *$t$-редукцией*) уменьшает на 2 число вхождений буквы $t$ в запись элемента $g$, произвольный элемент $g \in G^*$ обладает записью вида (1), к которой неприменимы

никакие $t$-редукции. Такая запись элементов группы $G^*$ называется *приведенной*.

Таким образом, каждый элемент группы $G^*$ обладает приведенной записью. При этом, говоря более подробно, запись (1) элемента $g \in G^*$ называется приведенной, если либо $n = 0$, либо $n = 1$, либо $n \geqslant 2$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ из того, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, следует, что слово $g_i$ определяет элемент группы $G$, не принадлежащий подгруппе $A_{\varepsilon_i}$.

Из определения группы $G^*$ очевидным образом следует также, что тождественное отображение множества $X$ порождающих группы $G$ продолжаемо до гомоморфизма группы $G$ в группу $G^*$. Одним из основных свойств конструкции $HNN$-расширения является инъективность этого гомоморфизма. Имеет место следующее утверждение (см. [2, стр. 251)):

**Предложение 1.1.** *Пусть* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ — $HNN$*-расширение группы* $G$*, определенное выше. Тогда*

(i) *тождественное отображение множества* $X$ *определяет вложение группы* $G$ *в группу* $G^*$*;*

(ii) *произвольный элемент* $g \in G^*$*, обладающий приведенной записью вида* (1)*, где* $n \geqslant 1$*, отличен от единицы.*

Утверждение пункта (i) этого предложения фактически говорит о том, что подгруппа группы $G^*$, порожденная множеством $X$, изоморфна группе $G$, и потому мы можем (и будем всюду ниже) считать, что она совпадает с $G$. Это позволяет, в свою очередь, считать, что в записи (1) элемента $g$ группы $G^*$ участвуют не слова от порождающих $X$, а элементы $g_0$, $g_1$, … , $g_n$ группы $G$. Для любого элемента $a$ подгруппы $A_{\varepsilon_i}$ в группе $G^*$ выполнено равенство $t^{\varepsilon_i} a t^{-\varepsilon_i} = a\varphi^{-\varepsilon_i}$, и $t$-редукция состоит в замене левой части этого равенства правой частью. Приведенность записи (1) элемента $g \in G^*$ означает теперь, что при $n \geqslant 2$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ из того, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, следует, что элемент $g_i$ не принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_i}$.

Из утверждения пункта (ii) предложения 1.1, известного как *лемма Бриттона*, легко следует, что если при $n \geqslant 1$ произведение

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n,$$

сомножители $g_0, g_1, \ldots, g_n$ которого принадлежат подгруппе $G$, является элементом подгруппы $G$, то к этому произведению должны быть применимы $t$-редукции. Отсюда, в свою очередь, следует, что произвольный элемент $g \in G$ обладает единственной приведенной записью, которой является сам этот элемент. Если подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ неединичны, все остальные элементы группы $G^*$ имеют более одной приведенной записи. Это вытекает из следующего описания всех приведенных записей любого такого элемента группы $G^*$.

**Предложение 1.2.** *Пусть*

$$f = f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m \quad \text{и} \quad g = g_0 t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\delta_n} g_n$$

*— приведенные записи элементов $f$ и $g$ группы $G^*$, где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Равенство $f = g$ имеет место в группе $G^*$ тогда и только тогда, когда $m = n$, $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и существует последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ таких, что*

$$\begin{aligned} f_0 &= g_0 a_0, \\ f_i &= a_{2i-1}^{-1} g_i a_{2i} \quad (1 \leqslant i < n), \\ f_n &= a_{2n-1}^{-1} g_n, \end{aligned}$$

*причем для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ выполнены включения $a_{2i} \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$, $a_{2i+1} \in A_{\varepsilon_{i+1}}$ и равенства $t^{-\varepsilon_{i+1}} a_{2i} t^{\varepsilon_{i+1}} = a_{2i+1}$.*

*Доказательство.* Достаточность сформулированного условия равенства элементов $f$ и $g$ почти очевидна. Действительно, поскольку из его справедливости следует, в частности, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ выполнено равенство $a_{2i} t^{\varepsilon_{i+1}} a_{2i+1}^{-1} = t^{\varepsilon_{i+1}}$, имеем

$$\begin{aligned} f &= f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{n-1} t^{\varepsilon_n} f_n \\ &= g_0 a_0 t^{\varepsilon_1} a_1^{-1} g_1 a_2 t^{\varepsilon_2} a_3^{-1} g_2 a_4 \cdots a_{2n-3}^{-1} g_{n-1} a_{2(n-1)} t^{\varepsilon_n} a_{2n-1}^{-1} g_n \\ &= g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n = g. \end{aligned}$$

Для доказательства необходимости перепишем равенство $f = g$ в виде

$$g_n^{-1}t^{-\delta_n}g_{n-1}^{-1}t^{-\delta_{n-1}}\cdots g_1^{-1}t^{-\delta_1}g_0^{-1}f_0t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m = 1. \quad (2)$$

Из леммы Бриттона следует, что к левой части этого равенства должна быть применима некоторая $t$-редукция, а так как рассматриваемые записи элементов $f$ и $g$ предполагались приведенными, $t$-редукция возможна лишь тогда, когда $\varepsilon_1 = \delta_1$ и элемент $g_0^{-1}f_0$ принадлежит подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$. Полагаем $a_0 = g_0^{-1}f_0$ и $a_1 = t^{-\varepsilon_1}a_0t^{\varepsilon_1}$. Тогда $f_0 = g_0a_0$, и при $n = 1$ равенство (2) принимает вид

$$g_1^{-1}a_1f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m = 1.$$

Так как при $m > 1$ запись левой части этого равенства содержит вхождения буквы $t$, а $t$-редукции к ней неприменимы, мы должны иметь $m = 1$, откуда $f_1 = a_1^{-1}g_1$. Таким образом, при $n = 1$ все утверждения справедливы, т. е. мы располагаем основанием индукции по $n$.

Если $n > 1$, равенство (2) принимает вид

$$g_n^{-1}t^{-\delta_n}g_{n-1}^{-1}t^{-\delta_{n-1}}\cdots t^{-\delta_2}g_1^{-1}a_1f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m = 1. \quad (3)$$

Вводя обозначения

$$f' = f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m \quad \text{и} \quad g' = a_1^{-1}g_1t^{\delta_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\delta_n}g_n,$$

мы видим, что (3) означает равенство этих элементов. Поэтому из индуктивного предположения следует, что $m - 1 = n - 1$, $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ и существует последовательность элементов $a_2, \ldots, a_{2n-1}$ таких, что

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1^{-1}g_1a_2 \\ f_i &= a_{2i-1}^{-1}g_ia_{2i} \ (2 \leqslant i < n) \\ f_n &= a_{2n-1}^{-1}g_n, \end{aligned}$$

причем для любого $i = 2, \ldots, n-1$ $a_{2i} \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$, $a_{2i+1} \in A_{\varepsilon_{i+1}}$ и $t^{-\varepsilon_{i+1}} a_{2i} t^{\varepsilon_{i+1}} = a_{2i+1}$. Поскольку тогда последовательность $a_0$, $a_1$, $\ldots$, $a_{2n-1}$ обладает всеми требуемыми свойствами, для элементов $f$ и $g$ доказываемое утверждение справедливо.

Из предложения 1.2 (и леммы Бриттона) следует, в частности, что любые две приведенные записи элемента $g \in G^*$ содержат одно и то же число вхождений проходной буквы $t$; это число будем называть *длиной элемента* $g$ и обозначать через $l(g)$. Таким образом, элемент $g \in G^*$ принадлежит подгруппе $G$ тогда и только тогда, когда $l(g) = 0$.

Предложение 1.2 позволяет определить еще одно понятие. Элемент $g \in G^*$ с приведенной записью $g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n$ назовем *циклически приведенным*, если либо $n = 0$, либо $n = 1$, либо $n > 1$ и при $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$ элемент $g_n g_0$ не принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_n}$. Так как из предложения 1.2 легко следует, что любые две приведенные записи данного элемента удовлетворяют или не удовлетворяют сформулированным требованиям одновременно, это определение корректно.

Изоморфизм $\varphi$ подгруппы $A_{-1}$ группы $G$ на ее подгруппу $A_1$ является частичным отображением множества $G$ в себя, и для полноты изложения мы напомним здесь ряд соответствующих понятий и свойств. Прежде всего, напомним (см, напр., [3]), что частичным отображением некоторого множества $X$ в себя называется бинарное отношение $\psi$ на множестве $X$ (т. е. подмножество декартова квадрата $X \times X$) такое, что для любых $x, y, z \in X$ из того, что $(x, y) \in \psi$ и $(x, z) \in \psi$, следует $y = z$. Областью определения бинарного отношения $\psi$ называется множество

$$D(\psi) = \big\{ x \in X \;\big|\; \exists y \in X \,\big((x, y) \in \psi\big) \big\},$$

а областью значений $\psi$ — множество

$$E(\psi) = \big\{ y \in X \;\big|\; \exists x \in X \,\big((x, y) \in \psi\big) \big\}.$$

Если бинарное отношение $\psi$ является частичным отображением, то для любого $x \in D(\psi)$ существует единственный $y \in E(\psi)$ такой, что

$(x, y) \in \psi$; элемент $y$ называют образом элемента $x$ относительно отображения $\psi$ и вместо $(x, y) \in \psi$ записывают $y = x\psi$.

Напомним далее, что произведением двух бинарных отношений $\psi$ и $\xi$ называется отношение

$$\psi\xi = \big\{(x, y) \;\big|\; \exists z \big((x, z) \in \psi \wedge (z, y) \in \xi\big)\big\}.$$

Легко видеть, что произведение двух частичных отображений $\psi$ и $\xi$ снова является частичным отображением, а из определения произведения вытекает, что

$$D(\psi\xi) = \big\{x \in D(\psi) \;\big|\; x\psi \in D(\xi)\big\}.$$

Так как умножение бинарных отношений ассоциативно, мы можем ввести степень отображения $\psi$ с положительным целым показателем, полагая, как обычно, для произвольного целого числа $k > 0$ отображение $\psi^k$ равным произведению $k$ сомножителей, равных $\psi$. Удобно считать также $\psi^0$ равным тождественному отображению множества $X$. Очевидно тогда, что для любых неотрицательных целых чисел $m$ и $n$ имеем

$$D(\psi^{m+n}) = \big\{x \in D(\psi^m) \;\big|\; x\psi^m \in D(\psi^n)\big\}$$

и для любого $a \in D(\psi^{m+n})$ имеет место равенство $a\psi^{m+n} = (a\psi^m)\psi^n$.

Если бинарное отношение $\psi$ является инъективным частичным отображением (т. е. для любых $x, y \in D(\psi)$ из $x\psi = y\psi$ следует $x = y$), то обратное отношение

$$\psi^{-1} = \big\{(x, y) \;\big|\; (y, x) \in \psi\big\}$$

также является частичным отображением, и его называют обратным к отображению $\psi$, а отображение $\psi$ в этом случае называют обратимым; очевидно, что $D(\psi^{-1}) = E(\psi)$, $E(\psi^{-1}) = D(\psi)$, $\psi\psi^{-1}$ является тождественным отображением множества $D(\psi)$ и $\psi^{-1}\psi$ является тождественным отображением множества $E(\psi)$.

Если частичное отображение $\psi$ обратимо, то полагая для целого числа $k < 0$ $\psi^k = (\psi^{-1})^{-k}$, мы можем говорить о степени отображения $\psi$ с произвольным целым показателем. Из соотношения $(\psi\xi)^{-1} = \xi^{-1}\psi^{-1}$, справедливого (и легко проверяемого) для любых бинарных отношений $\psi$ и $\xi$, следует, что если частичное отображение $\psi$ обратимо, то для произвольного целого числа $k$ отображения $\psi^k$ и $\psi^{-k}$ взаимно обратны.

Если $\psi$ — по-прежнему частичное отображение множества $X$ в себя, то образом относительно $\psi$ произвольного подмножества $Y$ области определения $D(\psi)$ отображения $\psi$ называется множество

$$Y\psi = \{y\psi \mid y \in Y\}.$$

Условимся также (из соображений удобства записей) говорить и об образе $Y\psi$ любого подмножества $Y$ множества $X$, полагая $Y\psi = (D(\psi) \cap Y)\psi$.

Возвращаясь к изоморфизму $\varphi$ подгруппы $A_{-1}$ группы $G$ на ее подгруппу $A_1$, для произвольного целого числа $k \neq 0$ вычислим область определения $D(\varphi^k)$ отображения $\varphi^k$ в терминах последовательностей $U_0$, $U_1$, ... и $V_0$, $V_1$, ... подгрупп группы $G$, упоминавшихся выше: $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Заметим, что для любого $k \geqslant 0$ имеют место включения $U_{k+1} \leqslant U_k$ и $V_{k+1} \leqslant V_k$. Действительно, первое из них следует непосредственно из определения, а для доказательства второго достаточно заметить, что

$$V_{k+1} = U_{k+1}\varphi \leqslant U_k\varphi = V_k.$$

Предполагая фиксированными введенные обозначения, отметим, прежде всего,

**Предложение 1.3.** *Для любого целого числа $n \geqslant 0$ в группе $G$ выполнено равенство $A_{-1} \cap V_n = U_{n+1}$.*

В самом деле, имеем $A_{-1} \cap V_0 = U_0 \cap V_0 = U_1$, и предполагая при $n > 0$ справедливость равенства $A_{-1} \cap V_{n-1} = U_n$, получаем

$$A_{-1} \cap V_n = A_{-1} \cap (V_{n-1} \cap V_n) = (A_{-1} \cap V_{n-1}) \cap V_n = U_n \cap V_n = U_{n+1}.$$

Докажем теперь

**Предложение 1.4.** *Для любого целого числа* $k \geqslant 1$

(i) $D(\varphi^k) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$ *и* $E(\varphi^k) = V_{k-1}$;
(ii) $D(\varphi^{-k}) = V_{k-1}$ *и* $E(\varphi^{-k}) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$.

*Доказательство.* Покажем сначала, что для любого $k \geqslant 0$ имеет место включение $U_k \leqslant D(\varphi^{-k})$.

При $k = 0$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно выполнено при некотором $k \geqslant 0$, и пусть $a$ — произвольный элемент из подгруппы $U_{k+1}$. Тогда $a \in V_k$ и потому $a = x\varphi$ для некоторого $x \in U_k$. По индуктивному предположению $x \in D(\varphi^{-k})$. Пусть $y = x\varphi^{-k}$, тогда $x = y\varphi^k$, $a = y\varphi^{k+1}$ и потому $a \in E(\varphi^{k+1}) = D(\varphi^{-(k+1)})$.

Для доказательства утверждения пункта (i) предположим сначала, что $a \in U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$, т. е. $a = x\varphi^{-(k-1)}$ для некоторого $x \in U_{k-1}$. Тогда $a\varphi^{k-1} \in U_{k-1}$, и так как

$$U_{k-1} \leqslant A_{-1} = D(\varphi),$$

имеем $a\varphi^{k-1} \in D(\varphi)$, так что $a \in D(\varphi^k)$.

Таким образом, включение $U_{k-1}\varphi^{-(k-1)} \subseteq D(\varphi^k)$ доказано. Для доказательства противоположного включения воспользуемся индукцией по $k$. Справедливость его при $k = 1$ очевидна, и считая его выполненным при некотором $k \geqslant 1$, предположим, что $a$ — произвольный элемент из $D(\varphi^{k+1})$. Это означает, что $a \in D(\varphi^k)$ и $a\varphi^k \in D(\varphi) = A_{-1}$. Из индуктивного предположения следует, что $a\varphi^{k-1} \in U_{k-1}$, и потому

$$a\varphi^k = (a\varphi^{k-1})\varphi \in U_{k-1}\varphi = V_{k-1}.$$

Таким образом, $a\varphi^k \in A_{-1} \cap V_{k-1}$, и для доказательства включения $a \in U_k\varphi^{-k}$ остается сослаться на предложение 1.3.

Итак, равенство $D(\varphi^k) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$ доказано. Если теперь $a$ — произвольный элемент из подгруппы $V_{k-1}$, то $a = b\varphi$ для некоторого

$b \in U_{k-1}$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства, $b \in D(\varphi^{-(k-1)})$, и если $b\varphi^{-(k-1)} = x$, то $b = x\varphi^{k-1}$ и

$$a = (x\varphi^{k-1})\varphi = x\varphi^k \in E(\varphi^k).$$

Таким образом, $V_{k-1} \subseteq E(\varphi^k)$. Обратно, если $a \in E(\varphi^k)$, т. е. $a = b\varphi^k$ для некоторого $b \in D(\varphi^k)$, то поскольку в силу доказанного равенства $b\varphi^{k-1} \in U_{k-1}$, имеем $a = (b\varphi^{k-1})\varphi \in U_{k-1}\varphi = V_{k-1}$.

Справедливость равенства $E(\varphi^k) = V_{k-1}$ установлена, и доказательство утверждения пункта (i) закончено. Так как отображение $\varphi^{-k}$ обратно к отображению $\varphi^k$, утверждение пункта (ii) следует из утверждения пункта (i). Предложение 1.4 доказано.

В следующих утверждениях наряду с группой $G$ рассматривается и ее $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$.

**Предложение 1.5.** *Для любого элемента $a$ группы $G$ и для любого целого числа $n$ элемент $t^{-n}at^n$ группы $G^*$ принадлежит подгруппе $G$ тогда и только тогда, когда $a \in D(\varphi^n))$. Если $a \in D(\varphi^n)$, то в группе $G^*$ выполнено равенство $t^{-n}at^n = a\varphi^n$.*

*Доказательство.* При $n = 0$ все утверждения очевидны. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 0$ для любого элемента $a \in G$ из $t^{-k}at^k \in G$ следует $a \in D(\varphi^k)$. Если для $a \in G$ элемент $t^{-(k+1)}at^{k+1}$ принадлежит подгруппе $G$, то в силу леммы Бриттона элемент $a$ должен принадлежать подгруппе $A_{-1} = D(\varphi)$. Тогда элемент $a_1 = a\varphi = t^{-1}at$ лежит в подгруппе $A_1$ группы $G$, а так как элемент $t^{-k}a_1t^k$ входит в подгруппу $G$, по индуктивному предположению имеем $a_1 \in D(\varphi^k)$. Таким образом, $a \in D(\varphi)$ и $a\varphi \in D(\varphi^k)$, откуда следует, что $a \in D(\varphi^{k+1})$. Тем самым доказано, что для любого элемента $a$ группы $G$ и для любого целого числа $n \geqslant 0$ из того, что $t^{-n}at^n \in G$, следует включение $a \in D(\varphi^n)$.

Обратно, покажем, что для любого $n \geqslant 0$ и любого элемента $a \in D(\varphi^n)$ в группе $G^*$ выполнено равенство $t^{-n}at^n = a\varphi^n$ (и, следовательно, $t^{-n}at^n \in G$). Действительно, считая это утверждение спра-

ведливым при некотором $k \geqslant 0$ (и произвольном $a \in D(\varphi^k)$), предположим, что $a \in D(\varphi^{k+1})$. Тогда $a \in D(\varphi^k)$ и $a\varphi^k \in D(\varphi)$ и потому

$$a\varphi^{k+1} = (a\varphi^k)\varphi = t^{-1}(t^{-k}at^k)t = t^{-(k+1)}at^{k+1}.$$

Таким образом, справедливость всех утверждений предложения 1.5 при $n \geqslant 0$ доказана. Для $n < 0$ достаточно применить рассмотренный случай к отображению $\varphi^{-1}$.

**Предложение 1.6.** *Для любого целого числа $n \geqslant 0$ в группе $G^*$ выполнены равенства*

(i) $t^{-n}A_1t^n \cap A_{-1} = U_{n+1}$,
(ii) $t^{-n}A_1t^n \cap A_1 = V_n$,
(iii) $t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_{-1} = U_n$.

*Кроме того, для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_1 = V_{n-1}$.*

*Доказательство.* При $n = 0$ равенство (i) следует непосредственно из определений. Пусть для некоторого $n \geqslant 0$ оно справедливо и пусть $x$ — произвольный элемент пересечения $t^{-(n+1)}A_1t^{n+1} \cap A_{-1}$. Тогда $x = t^{-(n+1)}at^{n+1}$ для некоторого $a \in A_1$, и так как $x \in G$, по лемме Бриттона $a \in A_{-1}$. Поэтому $x = t^{-n}(a\varphi)t^n$ принадлежит подгруппе $t^{-n}A_1t^n \cap A_{-1} = U_{n+1}$. Поскольку из $n + 1 \geqslant 1$ следует включение $U_{n+1} \subseteq A_1$, имеем $t^{-(n+1)}A_1t^{n+1} \cap A_{-1} \subseteq A_1$, и потому с учетом предложения 1.3 получаем

$$t^{-(n+1)}A_1t^{n+1} \cap A_{-1} = t^{-(n+1)}A_1t^{n+1} \cap A_{-1} \cap A_1 =$$
$$A_{-1} \cap (t^{-(n+1)}A_1t^{n+1} \cap A_1) = A_{-1} \cap t^{-1}(t^{-n}A_1t^n \cap A_{-1})t =$$
$$A_{-1} \cap t^{-1}U_{n+1}t = A_{-1} \cap V_{n+1} = U_{n+2}$$

Таким образом, равенство (i) доказано. Равенства (ii) и (iii) при $n = 0$ очевидны, а при $n > 0$ имеем, используя (i),

$$t^{-n}A_1t^n \cap A_1 = t^{-n}A_1t^n \cap t^{-1}A_{-1}t =$$
$$t^{-1}(t^{-(n-1)}A_1t^{n-1} \cap A_{-1})t = t^{-1}U_nt = V_n$$

и

$$t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_{-1} = t^{-(n-1)}A_1t^{n-1} \cap A_{-1} = U_n.$$

Наконец, при $n \geqslant 1$ из (ii) получаем

$$t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_1 = t^{-(n-1)}A_1t^{n-1} \cap A_1 = V_{n-1},$$

и предложение 1.6 полностью доказано.

**Предложение 1.7.** *Для любых целых чисел $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ в группе $G$ выполнены равенства*

(i) $A_{-1} \cap U_m\varphi^k = U_{m+k}$;

(ii) $A_{-1} \cap V_m\varphi^k = U_{m+k+1}$;

(iii) $A_1 \cap U_m\varphi^k = \begin{cases} U_m\varphi^k, & \text{если } k \geqslant 1, \\ U_m, & \text{если } k = 0 \text{ и } m \geqslant 1, \\ U_1, & \text{если } k = 0 \text{ и } m = 0; \end{cases}$

(iv) $A_1 \cap V_m\varphi^k = V_m\varphi^k$;

*Для любых целых чисел $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$ в группе $G$ выполнены равенства*

(v) $A_{-1} \cap U_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-k}$;

(vi) $A_{-1} \cap V_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-(k-1)}$;

(vii) $A_1 \cap U_m\varphi^{-k} = \begin{cases} U_{k+1}\varphi^{-k}, & \text{если } 0 \leqslant m \leqslant k, \\ U_m\varphi^{-k}, & \text{если } m > k; \end{cases}$

(viii) $A_1 \cap V_m\varphi^{-k} = \begin{cases} U_k\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } 0 \leqslant m \leqslant k-1, \\ U_m\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } m > k-1. \end{cases}$

*Доказательство.* Начнем с доказательства равенства (ii). При $k = 0$ оно совпадает с утверждением предложения 1.3. Предположим, что для некоторого $k \geqslant 0$ равенство $A_{-1} \cap V_m\varphi^k = U_{m+k+1}$ выполнено для всех $m \geqslant 0$, и индукцией по $m$ покажем, что тогда для любого $m \geqslant 0$ имеет место равенство

$$A_{-1} \cap V_m\varphi^{k+1} = U_{m+k+2}. \tag{4}$$

Так как $V_0\varphi^{k+1} = (D(\varphi^{k+1}) \cap V_0)\varphi^{k+1}$ и потому ввиду предложения 1.5 $V_0\varphi^{k+1} = t^{-(k+1)}(D(\varphi^{k+1}) \cap V_0)t^{k+1}$, имеем с использованием предложений 1.6 и 1.4 и очевидного включения $U_{k+2} \subseteq V_k$:

$$\begin{aligned} A_{-1} \cap V_0\varphi^{k+1} = A_{-1} \cap t^{-(k+1)}D(\varphi^{k+1})t^{k+1} \cap t^{-(k+1)}V_0t^{k+1} = \\ (A_{-1} \cap t^{-(k+1)}A_1t^{k+1}) \cap D(\varphi^{k+1})\varphi^{k+1} = \\ U_{k+2} \cap E(\varphi^{k+1}) = U_{k+2} \cap V_k = U_{k+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $m = 0$ равенство (4) выполняется. Пусть оно справедливо для некоторого $m \geqslant 0$. Тогда поскольку $V_{m+1}\varphi^{k+1} \subseteq V_m\varphi^{k+1}$, имеем

$$\begin{aligned} A_{-1} \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = A_{-1} \cap V_m\varphi^{k+1} \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = \\ U_{m+k+2} \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = \\ U_{m+k+1} \cap V_{m+k+1} \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = \\ U_{m+k+1} \cap U_{m+k+1}\varphi \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = \\ U_{m+k+1} \cap (U_{m+k+1} \cap V_{m+1}\varphi^k)\varphi = \\ U_{m+k+1} \cap (U_{m+k+1} \cap A_{-1} \cap V_{m+1}\varphi^k)\varphi. \end{aligned}$$

Применяя индуктивное предположение, далее получаем

$$\begin{aligned} A_{-1} \cap V_{m+1}\varphi^{k+1} = U_{m+k+1} \cap (U_{m+k+1} \cap U_{m+k+2})\varphi = \\ U_{m+k+1} \cap U_{m+k+2}\varphi = \\ U_{m+k+1} \cap A_{-1} \cap V_{m+k+2} = \\ U_{m+k+1} \cap U_{m+k+3} = U_{(m+1)+k+2}. \end{aligned}$$

Равенство (ii) доказано.

При $k = 0$ равенство (i) очевидно, а при $k \geqslant 1$ является непосредственным следствием равенства (ii):

$$A_{-1} \cap U_m\varphi^k = A_{-1} \cap V_m\varphi^{k-1} = U_{m+k}.$$

Если $k \geqslant 1$, то $U_m\varphi^k \subseteq E(\varphi) = A_1$ и потому $A_1 \cap U_m\varphi^k = U_m\varphi^k$. Так как при $m \geqslant 1$ $U_m \subseteq U_1 \subseteq A_1$, при $k = 0$ и $m \geqslant 1$ имеем $A_1 \cap U_m\varphi^k = U_m$, а при $k = 0$ и $m = 0$ равенство (iii) очевидно.

Очевидно и равенство (iv), поскольку при любых $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ $V_m\varphi^k \subseteq A_1$; аналогично, равенство (v) очевидно ввиду включения $U_m\varphi^{-k} \subseteq A_{-1}$. Так как $V_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-(k-1)}$, равенство (vi) является следствием равенства (v).

Для доказательства равенства (vii) докажем сначала его частный случай при $m = 0$: $A_1 \cap A_{-1}\varphi^{-k} = U_{k+1}\varphi^{-k}$.

Так как включение $U_{k+1}\varphi^{-k} \subseteq A_{-1}\varphi^{-k}$ очевидно, для доказательства того, что правая часть рассматриваемого равенства содержится в левой, достаточно показать, что для любого целого $k \geqslant 1$ выполнено включение $U_{k+1}\varphi^{-k} \subseteq A_1$.

При $k = 1$ справедливость этого видна из следующих включений:

$$U_2\varphi^{-1} \subseteq V_1\varphi^{-1} = U_1 \subseteq A_1.$$

Аналогично, включения

$$U_{(k+1)+1}\varphi^{-(k+1)} \subseteq V_{k+1}\varphi^{-(k+1)} = U_{k+1}\varphi^{-k}$$

показывают, что из справедливости его при произвольном $k \geqslant 1$ следует его справедливость и при $k + 1$.

Докажем теперь, что $A_1 \cap A_{-1}\varphi^{-k} \subseteq U_{k+1}\varphi^{-k}$. Произвольный элемент $x \in A_1 \cap A_{-1}\varphi^{-k}$ имеет вид $x = a\varphi^{-k}$, где $a \in A_{-1}$, и принадлежит подгруппе $A_1 \cap A_{-1} = U_1$. Поэтому элемент $a = x\varphi^k$ входит в пересечение $A_{-1} \cap U_1\varphi^k$, равное в силу уже доказанного пункта (i) подгруппе $U_{1+k}$.

Итак, мы видим, что для любого имеет место равенство $A_1 \cap U_0\varphi^{-k} = U_{k+1}\varphi^{-k}$. Если теперь $0 \leqslant m \leqslant k$, то поскольку тогда

$$U_{k+1} \subseteq U_m \subseteq U_0,$$

имеем

$$A_1 \cap U_m\varphi^{-k} = A_1 \cap U_m\varphi^{-k} \cap U_0\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-k} \cap U_{k+1}\varphi^{-k} = U_{k+1}\varphi^{-k}.$$

Если же $m > k$, то $U_m \subseteq U_{k+1}$ и потому ввиду предыдущего

$$U_m\varphi^{-k} \subseteq A_1.$$

Отсюда $A_1 \cap U_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-k}$, что и требовалось.

Докажем, наконец, утверждение (viii). Так как при любом $m$ выполнено равенство $V_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-(k-1)}$, то при $k > 1$ с использованием (vii) имеем

$$A_1 \cap V_m\varphi^{-k} = A_1 \cap U_m\varphi^{-(k-1)} = \begin{cases} U_k\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } 0 < m \leqslant k-1, \\ U_m\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } m > k-1. \end{cases}$$

Если же $k = 1$, то $A_1 \cap V_m\varphi^{-1} = A_1 \cap U_m$. Из (iii) следует, что при $m > 0$ $A_1 \cap V_m\varphi^{-1} = U_m$, что входит в случай $m > k-1$, а при $m = 0$ $A_1 \cap V_m\varphi^{-1} = U_1$, что входит в случай $m \leqslant k-1$. Предложение 1.7 доказано полностью.

**Предложение 1.8.** *Для любых неотрицательных целых чисел $m$ и $k$ в группе $G$ выполнены равенства $U_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k}\varphi^{-k}$ и $V_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k+1}\varphi^{-k}$.*

*Доказательство.* Отметим сразу же, что при $k = 0$ первое из рассматриваемых равенств очевидно, а второе содержится в предложении 1.3. Поэтому мы можем предполагать в дальнейшем, что $k \geqslant 1$. Легко видеть также, что второе из этих равенств является следствием первого. Действительно, так как $U_k\varphi^{-k} \subseteq A_{-1}$, с учетом предложения 1.3 имеем

$$V_m \cap U_k\varphi^{-k} = V_m \cap A_{-1} \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+1} \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k+1}\varphi^{-k}.$$

Для доказательства первого равенства покажем сначала, что для любых целых чисел $m \geqslant 1$ и $k \leqslant m$ имеет место равенство

$$U_m\varphi^{-k} \cap U_m\varphi^{-(k-1)} = U_{m+1}\varphi^{-k}. \tag{5}$$

В самом деле, так как $U_m\varphi^{-(k-1)} = V_m\varphi^{-k}$ и из неравенства $k \leqslant m$ следует, что подгруппы $U_m$ и $V_m$ лежат в области определения $D(\varphi^{-k}) = V_{k-1}$ отображения $\varphi^{-k}$, имеем

$$U_m\varphi^{-k} \cap U_m\varphi^{-(k-1)} = U_m\varphi^{-k} \cap V_m\varphi^{-k} = (U_m \cap V_m)\varphi^{-k} = U_{m+1}\varphi^{-k}.$$

Покажем, далее, что для любых $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$

$$U_{m+k}\varphi^{-k} \cap U_{m+1} = U_{m+k+1}\varphi^{-k}. \tag{6}$$

При $k = 0$ это равенство тривиально, и предполагая его справедливым для некоторого $k \geqslant 0$, с учетом включения

$$U_{m+k+1}\varphi^{-(k+1)} \subseteq V_{m+k}\varphi^{-(k+1)} = U_{m+k}\varphi^{-k}$$

и равенства (5) получаем

$$\begin{aligned} U_{m+(k+1)}\varphi^{-(k+1)} \cap U_{m+1} = {} & U_{m+(k+1)}\varphi^{-(k+1)} \cap U_{m+k}\varphi^{-k} \cap U_{m+1} = \\ & U_{m+(k+1)}\varphi^{-(k+1)} \cap U_{m+k+1}\varphi^{-k} = \\ & U_{(m+(k+1)+1)}\varphi^{-(k+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (6) доказано индукцией по $k$.

Докажем теперь индукцией по $m$, что для любых неотрицательных целых чисел $m$ и $k$ в группе $G$ выполнено равенство

$$U_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k}\varphi^{-k}.$$

При $m = 0$ оно очевидно ввиду включения $U_k\varphi^{-k} \subseteq U_0 = A_{-1}$. Предположив его справедливым при некотором $m \geqslant 0$, с учетом включения $U_{m+1} \subseteq U_m$ и равенства (6) получаем

$$U_{m+1} \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+1} \cap U_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+1} \cap U_{m+k}\varphi^{-k} = U_{m+k+1}\varphi^{-k}.$$

Предложение 1.8 доказано.

## § 2. О сопряженности элементов $HNN$-расширения

В этом параграфе рассматривается отношение сопряженности в $HNN$-расширении $G^* = \langle G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1,\, \varphi\rangle$ группы $G$. Условия сопряженности элементов группы $G^*$ содержатся в так называемой лемме Коллинза (см., напр., [2, с. 254]). Тем не менее, нам понадобится более детальное, чем в обычно приводимых формулировках леммы Коллинза, описание этих условий.

**Предложение 2.1.** *Пусть $G^* = \langle G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\rangle$ — HNN-расширение группы $G$ с проходной буквой $t$ и связанными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$. Произвольный элемент $g \in G^*$ сопряжен в группе $G^*$ с некоторым циклически приведенным элементом. Более того, если элемент $g$ не сопряжен ни с каким элементом из подгруппы $G$, то он сопряжен с циклически приведенным элементом вида $t^{\varepsilon_1}g_1t^{\varepsilon_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\varepsilon_n}g_n$.*

*Пусть $f$ и $g$ — циклически приведенные элементы группы $G^*$. Тогда*

(i) *Если хотя бы один из элементов $f$ или $g$ принадлежит подгруппе $G$, то эти элементы сопряжены в группе $G^*$ тогда и только тогда, когда и другой содержится в $G$ и если они не сопряжены в группе $G$, то существует последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, равных $\pm 1$, и существуют две последовательности*

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \quad \text{и} \quad y_0, y_1, \ldots, y_{2n+1}$$

*элементов группы $G$ (где $n \geqslant 1$) такие, что $y_0 = f$, $y_{2n+1} = g$, для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ выполнено равенство $x_i^{-1}y_{2i}x_i = y_{2i+1}$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ $y_{2i-1} \in A_{-\varepsilon_i}$, $y_{2i} \in A_{\varepsilon_i}$ и $t^{-\varepsilon_i}y_{2i-1}t^{\varepsilon_i} = y_{2i}$.*

*В частности, если хотя бы один из элементов $f$ или $g$ принадлежит подгруппе $G$ и не сопряжен в $G$ ни с одним элементом из связанных подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$, то эти элементы*

*сопряжены в группе $G^*$ тогда и только тогда, когда и другой содержится в $G$ и они сопряжены в группе $G$.*

(ii) *Если приведенные записи элементов $f$ и $g$ имеют вид*

$$f = t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m \quad \text{и} \quad g = t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\delta_n} g_n,$$

*где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$, то эти элементы сопряжены в группе $G^*$ тогда и только тогда, когда элемент $f$ сопряжен относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ с некоторой циклической перестановкой*

$$t^{\delta_i} g_i t^{\delta_{i+1}} g_{i+1} \cdots t^{\delta_n} g_n \cdots t^{\delta_{i-1}} g_{i-1}$$

*(где $i = 1, 2, \ldots, n$) элемента $g$.*

(Напомним, что если $X$ — подгруппа некоторой группы $Y$, то элементы $a$ и $b$ из $Y$ называются сопряженными относительно подгруппы $X$, если для некоторого $x \in X$ имеет место равенство $a = x^{-1}bx$.)

*Доказательство.* Пусть $g$ — произвольный элемент группы $G^*$ и $g'$ — элемент наименьшей длины в классе сопряженных с $g$ элементов. Утверждается, что элемент $g'$ является циклически приведенным. Поскольку в соответствии с определением элементы длины 0 и 1 являются циклически приведенными, для доказательства этого достаточно рассмотреть случай, когда приведенная запись элемента $g'$ имеет вид

$$g' = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n,$$

где $n \geqslant 2$. Если этот элемент не является циклически приведенным, то $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$ и элемент $g_n g_0$ принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_n}$. Но тогда элемент $t^{\varepsilon_n} g_n g_0 t^{\varepsilon_1} = (g_n g_0)\varphi^{\varepsilon_1}$ принадлежит группе $G$, и потому длина сопряженного с $g'$ элемента

$$(g_0 t^{\varepsilon_1})^{-1} g' (g_0 t^{\varepsilon_1}) = g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}} g_{n-1} (g_n g_0)\varphi^{\varepsilon_1}$$

оказывается меньшей, чем $n$, что противоречит выбору $g'$. Заменив теперь элемент $g'$ элементом $g_0^{-1} g' g_0$, мы получим сопряженный с $g$ элемент требуемого вида.

Пусть теперь $f$ и $g$ — циклически приведенные элементы группы $G^*$ и пусть $f \in G$. Предположим, что эти элементы сопряжены в группе $G^*$, т. е. для некоторого элемента $x \in G^*$ с приведенной записью

$$x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$$

выполнено равенство $x^{-1} f x = g$. Если $n = 0$, т. е. $x \in G$, то $g \in G$ и элементы $f$ и $g$ сопряжены в группе $G$. Будем считать, что $n \geqslant 1$, и индукцией по $n$ докажем, что $g \in G$ и что существует последовательность

$$y_0 = f, y_1, \ldots, y_{2n+1} = g$$

элементов группы $G$ такая, что для любого $i = 0, 1, \ldots, n$

$$x_i^{-1} y_{2i} x_i = y_{2i+1}$$

и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ $y_{2i-1} \in A_{-\varepsilon_i}$, $y_{2i} \in A_{\varepsilon_i}$ и $t^{-\varepsilon_i} y_{2i-1} t^{\varepsilon_i} = y_{2i}$.

Перепишем равенство $x^{-1} f x = g$ в виде

$$x_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} x_0^{-1} f x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n = g. \qquad (5)$$

Если элемент $x_0^{-1} f x_0$ не принадлежит подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$, то левая часть равенства (5) представляет собой приведенную запись элемента, не являющегося циклически приведенным. Так как правая часть (5) является циклически приведенным элементом, это невозможно. Таким образом, элемент $y_1 = x_0^{-1} f x_0$ входит в подгруппу $A_{-\varepsilon_1}$ и потому элемент $y_2 = t^{-\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_1}$ принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_1}$. Если $n = 1$, равенство (5) принимает вид

$$x_1^{-1} y_2 x_1 = g.$$

Таким образом, в этом случае элемент $g$ принадлежит подгруппе $G$ и элементы $y_0 = f$, $y_1$, $y_2$ и $y_3 = g$ образуют искомую последовательность. При $n > 1$ равенство (5) переписывается в виде

$$x_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-1} \cdots x_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} x_1^{-1} y_2 x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n = g,$$

говорящем о том, что элементы $y_2$ и $g$ сопряжены при помощи элемента

$$x' = x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$$

положительной длины, меньшей, чем $l(x)$. По индуктивному предположению существует последовательность $y_2$, $y_3$, $\ldots$, $y_{2n+1} = g$ элементов группы $G$ такая, что для любого $i = 1, \ldots, n$ $x_i^{-1} y_{2i} x_i = y_{2i+1}$ и для любого $i = 2, \ldots, n$ $y_{2i-1} \in A_{-\varepsilon_i}$, $y_{2i} \in A_{\varepsilon_i}$ и $t^{-\varepsilon_i} y_{2i-1} t^{\varepsilon_i} = y_{2i}$. Очевидно, что тогда $g \in G$ и последовательность $y_0 = f$, $y_1$, $\ldots$, $y_{2n+1} = g$ является искомой. Тем самым завершен индуктивный шаг, и необходимость условия в первом утверждении пункта (i) доказана. Достаточность его очевидна, как очевидно и то, что второе утверждение этого пункта является непосредственным следствием первого.

Предположим теперь, что приведенные записи циклически приведенных элементов $f$ и $g$ имеют вид

$$f = t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m \quad \text{и} \quad g = t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\delta_n} g_n,$$

где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Отметим сразу же, что поскольку элемент $g$ сопряжен с любой своей циклической перестановкой, сформулированное в пункте (ii) условие является достаточным для сопряженности элементов $f$ и $g$. Докажем его необходимость.

Если элемент $f$ сопряжен в группе $G^*$ с элементом $g$, то он сопряжен и с каждой циклической перестановкой элемента $g$, и для каждой циклической перестановки

$$u_i = t^{\delta_i} g_i t^{\delta_{i+1}} g_{i+1} \cdots t^{\delta_n} g_n \cdots t^{\delta_{i-1}} g_{i-1}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$ этого элемента фиксируем элемент $v_i$ наименьшей длины такой, что $f = v_i^{-1} u_i v_i$. Обозначим теперь через $h$ тот из элементов $v_1$, $v_2$, $\ldots$, $v_n$, длина которого является наименьшей, и покажем, что $l(h) = 0$. При этом для простоты обозначений (и без потери общности) можно предполагать, что $h = v_1$, т. е. $f = h^{-1} g h$.

Пусть, напротив, приведенная запись элемента $h$ имеет вид

$$h = h_0 t^{\gamma_1} h_1 \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k,$$

где $k > 0$. Так как элемент $f$ циклически приведен, правая часть равенства

$$f = h_k^{-1} t^{-\gamma_k} \cdots h_1^{-1} t^{-\gamma_1} h_0^{-1} t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} \cdots t^{\delta_n} g_n h_0 t^{\gamma_1} h_1 \cdots t^{\gamma_k} h_k \qquad (6)$$

не может быть приведенной, и потому к ней должна быть применима некоторая $t$-редукция. Поскольку записи элементов $h$ и $g$ предполагаются приведенными, это возможно лишь в следующих двух случаях:

а) $\gamma_1 = \delta_1$ и $h_0$ принадлежит подгруппе $A_{-\delta_1}$;

б) $\delta_n = -\gamma_1$ и $g_n h_0$ принадлежит подгруппе $A_{\delta_n}$.

В случае а) элемент $x_0 = t^{-\gamma_1} h_0 t^{\delta_1}$ принадлежит подгруппе $A_{\delta_1}$, и при $n = 1$ с учетом того, что $h_0 t^{\delta_1} = t^{\delta_1} x_0$, равенство (6) принимает вид

$$f = h_k^{-1} t^{-\gamma_k} h_{k-1}^{-1} \cdots t^{-\gamma_2} h_1^{-1} x_0^{-1} g_1 t^{\delta_1} x_0 h_1 t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k,$$

из которого следует, что элемент $h' = (g_1^{-1} x_0 h_1) t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k$ длины $k-1$ удовлетворяет равенству $f = (h')^{-1} g h'$. Если $n > 1$, равенство (6) принимает вид

$$f = h_k^{-1} t^{-\gamma_k} \cdots t^{-\gamma_2} h_1^{-1} x_0^{-1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots t^{\delta_n} g_n t^{\delta_1} x_0 h_1 t^{\gamma_2} \cdots t^{\gamma_k} h_k,$$

из которого следует, что элемент $h' = (g_1^{-1} x_0 h_1) t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k$ длины $k-1$ удовлетворяет равенству $f = (h')^{-1} u_2 h'$.

В случае б) элемент $x_0 = t^{\delta_n} g_n h_0 t^{\gamma_1}$ принадлежит подгруппе $A_{\gamma_1}$, и при $n = 1$ с учетом того, что $t^{\delta_n} (g_n h_0)^{-1} = x_0^{-1} t^{\delta_n}$, равенство (6) принимает вид

$$f = h_k^{-1} t^{-\gamma_k} h_{k-1}^{-1} \cdots t^{-\gamma_2} h_1^{-1} x_0^{-1} t^{\delta_1} g_1 x_0 h_1 t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k,$$

из которого следует, что элемент $h' = (x_0 h_1)t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k$ длины $k-1$ удовлетворяет равенству $f = (h')^{-1} g h'$. Если $n > 1$, то с учетом того, что $t^{-\gamma_1} h_0^{-1} = x_0^{-1} t^{\delta_1} g_n$, равенство (6) принимает вид

$$f = h_k^{-1} t^{-\gamma_k} \cdots t^{-\gamma_2} h_1^{-1} x_0^{-1} t^{\delta_n} g_n t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots t^{\delta_{n-1}} g_{n-1} x_0 h_1 t^{\gamma_2} \cdots t^{\gamma_k} h_k,$$

из которого следует, что элемент $h' = (x_0 h_1)t^{\gamma_2} \cdots h_{k-1} t^{\gamma_k} h_k$ длины $k-1$ удовлетворяет равенству $f = (h')^{-1} u_n h'$.

Таким образом, во всех случаях мы получаем противоречие с выбором $h$, и можно считать доказанным, что для некоторой циклической перестановки

$$u_i = t^{\delta_i} g_i t^{\delta_{i+1}} g_{i+1} \cdots t^{\delta_n} g_n \cdots t^{\delta_{i-1}} g_{i-1}$$

элемента $g$ и некоторого элемента $h \in G$ выполнено равенство $f = h^{-1} u_i h$. Переписав это равенство в виде

$$f_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} f_{m-1}^{-1} \cdots f_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} h^{-1} t^{\delta_i} g_i t^{\delta_{i+1}} g_{i+1} \cdots t^{\delta_n} g_n \cdots t^{\delta_{i-1}} g_{i-1} h = 1,$$

мы видим, что ввиду леммы Бриттона выражение в левой части не может быть приведенной записью и что единственной возможностью применимости к нему $t$-редукции является условие $\varepsilon_1 = \delta_i$ и $h \in A_{-\varepsilon_1}$. Таким образом, элемент $f$ действительно сопряжен с некоторой циклической перестановкой элемента $g$ при помощи некоторого элемента из подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, и предложение 2.1 полностью доказано.

Дополним доказанный только что расширенный вариант леммы Коллинза следующим необходимым условием выполнимости утверждения из пункта (ii), непосредственно вытекающим из предложения 1.2:

**Предложение 2.2.** *Пусть*

$$f = t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m \quad u \quad g = t^{\delta_1} g_1 t^{\delta_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\delta_n} g_n$$

*— приведенные записи элементов $f$ и $g$ группы $G^*$, где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Если элементы $f$ и $g$ сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, то*

*$m = n$, $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ элементы $f_i$ и $g_i$ лежат в одном и том же классе по двойному модулю $\left(A_{\varepsilon_i}, A_{-\varepsilon_{i+1}}\right)$ ( где $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1$).*

Из предложений 2.1 и 2.2 получаем очевидное

**Следствие.** *Если длины циклически приведенных элементов группы $G^*$ различны, то эти элементы не являются сопряженными в $G^*$.*

Покажем далее, что при дополнительном предположении о том, что подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ лежат в центре группы $G$, условия сопряженности элементов группы $G^* = \left(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1,\, \varphi\right)$ принимают более простой вид. Начнем с доказательства следующего утверждения:

**Предложение 2.3.** *Пусть $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, причем $n \geqslant 1$. Полагая для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i,$$

*введем следующие обозначения:*

$$\alpha = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k, \quad \beta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k \quad \text{и} \quad W(x) = D(\varphi^\alpha) \cap D(\varphi^\beta).$$

*Если подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ принадлежат центру группы $G$, то*

$$x^{-1}Gx \cap G = x^{-1}W(x)x,$$

*подгруппа $W(x)$ содержится в подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$, подгруппа $x^{-1}W(x)x$ содержится в подгруппе $A_{\varepsilon_n}$ и для любого $a \in W(x)$ имеет место равенство $x^{-1}ax = t^{-\sigma_n} a t^{\sigma_n}$.*

*Доказательство.* Заметим, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место включение $W(x) \subseteq D(\varphi^{\sigma_k})$.

Действительно, из замечаний, сделанных в § 1, следует, что для любых целых чисел $k$ и $l$ таких, что $0 \leqslant k \leqslant l$, выполнено включение $D(\varphi^l) \subseteq D(\varphi^k)$. Так как $\alpha \leqslant \sigma_k \leqslant \beta$, при $\sigma_k \geqslant 0$ имеем $\beta \geqslant 0$ и потому $D(\varphi^\beta) \subseteq D(\varphi^{\sigma_k})$, а из $\sigma_k < 0$ следует $\alpha < 0$ и потому $D(\varphi^\alpha) \subseteq D(\varphi^{\sigma_k})$.

Из предложения 1.5 теперь следует, что для любого элемента $a \in W(x)$ и любого $k = 1, 2, \ldots, n$ элемент $t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k}$ принадлежит подгруппе $G$. Так как тогда при $k < n$ и элемент

$$t^{-\sigma_{k+1}} a t^{\sigma_{k+1}} = t^{-\varepsilon_{k+1}} (t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k}) t^{\varepsilon_{k+1}}$$

содержится в $G$, по лемме Бриттона элемент $t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k}$ должен принадлежать подгруппе $A_{-\varepsilon_{k+1}}$, а потому элемент $t^{-\sigma_{k+1}} a t^{\sigma_{k+1}}$ входит в подгруппу $A_{\varepsilon_{k+1}}$.

Таким образом, для любого элемента $a \in W(x)$ и любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ элемент $t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k}$ принадлежит подгруппе $A_{-\varepsilon_{k+1}}$, а элемент $t^{-\sigma_n} a t^{\sigma_n}$ принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_n}$. В частности, каждая подгруппа $t^{-\sigma_k} W(x) t^{\sigma_k}$ принадлежит центру группы $G$. Ввиду включения $W(x) \subseteq D(\varphi^{\sigma_1}) = A_{-\varepsilon_1}$ в центре группы $G$ лежит и подгруппа $W(x)$.

Полагая, далее, для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$x^{(k)} = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{k-1} t^{\varepsilon_k} x_k,$$

покажем, что для любого элемента $a \in W(x)$ выполнено равенство $(x^{(k)})^{-1} a x^{(k)} = t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k}$.

В самом деле, при $k = 1$ имеем

$$(x^{(1)})^{-1} a x^{(1)} = x_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} x_0^{-1} a x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 = x_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} a t^{\varepsilon_1} x_1 = t^{-\varepsilon_1} a t^{\varepsilon_1} = t^{-\sigma_1} a t^{\sigma_1},$$

и если при некотором $k < n$ указанное равенство справедливо,

$$(x^{(k+1)})^{-1} a x^{(k+1)} = x_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+1}} (x^{(k)})^{-1} a x^{(k)} t^{\varepsilon_{k+1}} x_{k+1} = x_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+1}} t^{-\sigma_k} a t^{\sigma_k} t^{\varepsilon_{k+1}} x_{k+1} = x_{k+1}^{-1} t^{-\sigma_{k+1}} a t^{\sigma_{k+1}} x_{k+1} = t^{-\sigma_{k+1}} a t^{\sigma_{k+1}}.$$

Итак, мы показали, что для любого элемента $a \in W(x)$ имеет место равенство $x^{-1}ax = t^{-\sigma_n}at^{\sigma_n}$, откуда следует, что

$$x^{-1}W(x)x = t^{-\sigma_n}W(x)t^{\sigma_n} \leqslant A_{\varepsilon_n}$$

и потому, в частности, $x^{-1}W(x)x \subseteq x^{-1}Gx \cap G$.

Нам остается доказать справедливость противоположного включения

$$x^{-1}Gx \cap G \subseteq x^{-1}W(x)x.$$

Для произвольного элемента $g \in G$ полагаем

$$g_k = (x^{(k)})^{-1}gx^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Покажем, что если для элемента $g$ имеет место включение $x^{-1}gx \in G$, то $g \in A_{-\varepsilon_1}$, для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство $g_k = t^{-\sigma_k}gt^{\sigma_k}$ и при $n > 1$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ элемент $g_k$ принадлежит подгруппе $A_{-\varepsilon_{k+1}}$.

Действительно, если элемент

$$x^{-1}gx = \\ x_n^{-1}t^{-\varepsilon_n}x_{n-1}^{-1}\cdots x_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}x_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}x_0^{-1}gx_0t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n$$

лежит в подгруппе $G$, то в силу леммы Бриттона должно выполняться включение $x_0^{-1}gx_0 \in A_{-\varepsilon_1}$, которое ввиду центральности подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ равносильно включению $g \in A_{-\varepsilon_1}$. Поэтому

$$g_1 = x_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}x_0^{-1}gx_0t^{\varepsilon_1}x_1 \in x_1^{-1}A_{\varepsilon_1}x_1 = A_{\varepsilon_1}$$

и $g_1 = t^{-\sigma_1}gt^{\sigma_1}$. Таким образом, при $n = 1$ все объявленные утверждения выполнены. Если $n > 1$, то из того, что

$$x^{-1}gx = x_n^{-1}t^{-\varepsilon_n}x_{n-1}^{-1}\cdots x_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}(x^{(1)})^{-1}gx^{(1)}t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n = \\ x_n^{-1}t^{-\varepsilon_n}x_{n-1}^{-1}\cdots x_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}g_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n,$$

снова в силу леммы Бриттона следует, что $g_1 \in A_{-\varepsilon_2}$. Предположим, что для некоторого $k$, $1 \leqslant k < n-1$, включение $g_k \in A_{-\varepsilon_{k+1}}$ и равенство $g_k = t^{-\sigma_k} g t^{\sigma_k}$ имеют место. Тогда

$$g_{k+1} = x_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+1}} g_k t^{\varepsilon_{k+1}} x_{k+1} \in A_{\varepsilon_{k+1}},$$

и так как элемент $g_{k+1}$ принадлежит, в частности, подгруппе $G$, в силу леммы Бриттона из равенства

$$x^{-1} g x = x_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-1} \cdots x_{k+2}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+2}} g_{k+1} t^{\varepsilon_{k+2}} x_{k+2} \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$$

следует, что $g_{k+1} \in A_{-\varepsilon_{k+2}}$. Кроме того,

$$g_{k+1} = t^{-\varepsilon_{k+1}} g_k t^{\varepsilon_{k+1}} = t^{-\varepsilon_{k+1}} t^{-\sigma_k} g t^{\sigma_k} t^{\varepsilon_{k+1}} = t^{-\sigma_{k+1}} g t^{\sigma_{k+1}}.$$

Мы видим, таким образом, что при $n > 1$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено включение $g_k \in A_{-\varepsilon_{k+1}}$ и равенство $g_k = t^{-\sigma_k} g t^{\sigma_k}$. Так как тогда $g_{n-1} \in A_{-\varepsilon_n}$ и потому $t^{-\varepsilon_n} g_{n-1} t^{\varepsilon_n} \in A_{\varepsilon_n}$, имеем

$$g_n = x_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} g_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n = t^{-\varepsilon_n} g_{n-1} t^{\varepsilon_n} = t^{-\sigma_n} g t^{\sigma_n}.$$

Сформулированное утверждение полностью доказано.

Переходя теперь непосредственно к доказательству включения

$$x^{-1} G x \cap G \subseteq x^{-1} W(x) x,$$

индукцией по $n$ покажем, что если для элемента $g \in G$ элемент $x^{-1} g x$ принадлежит подгруппе $G$, то $g \in W(x)$.

При $n = 1$ это очевидно, поскольку в этом случае $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1$, $\alpha = \beta = \sigma_1 = \varepsilon_1$, $W(x) = D(\varphi^{\varepsilon_1}) = A_{-\varepsilon_1}$ и, как только что было показано, из $x^{-1} g x \in G$ следует, что $g \in A_{-\varepsilon_1}$.

Предположим, что $n > 1$ и что для некоторого элемента $g \in G$ элемент $x^{-1} g x$ принадлежит подгруппе $G$. Тогда в силу доказанного выше элемент

$$(x^{(n-1)})^{-1} g x^{(n-1)}$$

лежит в подгруппе $A_{-\varepsilon_n}$ и потому — в подгруппе $G$. По индуктивному предположению $g \in W(x^{(n-1)})$, т. е. $g \in D(\varphi^{\alpha'}) \cap D(\varphi^{\beta'})$, где

$$\alpha' = \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \sigma_k, \quad \beta' = \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \sigma_k.$$

Утверждается, что $g \in D(\varphi^{\alpha})$. Это очевидно, если $\alpha = \alpha'$. Но если $\alpha$ не совпадает с $\alpha'$, то $\alpha = \sigma_n$. С другой стороны, как показано выше, из включения $x^{-1}gx \in G$ следует, что $x^{-1}gx = t^{-\sigma_n} g t^{\sigma_n}$, откуда ввиду предложения 1.5 получаем $g \in D(\varphi^{\sigma_n})$. Аналогично доказывается, что $g \in D(\varphi^{\beta})$. Таким образом, $g \in W(x)$, и индукция завершена. Предложение 2.3 доказано.

Нам понадобится также более явное выражение для подгруппы $W(x)$.

**Предложение 2.4.** *В обозначениях и предположениях формулировки предложения 2.3*

$$W(x) = \begin{cases} D(\varphi^{\beta}), & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ D(\varphi^{\alpha}), & \text{если } \beta \leqslant 0, \\ U_{\beta-\alpha-1}\varphi^{-(\beta-1)}, & \text{если } \alpha < 0 \text{ и } \beta > 0. \end{cases}$$

Действительно, если $\alpha \geqslant 0$, то $D(\varphi^{\beta}) \subseteq D(\varphi^{\alpha})$, а если $\beta \leqslant 0$, то $D(\varphi^{\alpha}) \subseteq D(\varphi^{\beta})$. Если же $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, то в силу предложения 1.4

$$W(x) = V_{-\alpha-1} \cap U_{\beta-1}\varphi^{-(\beta-1)},$$

и остается воспользоваться предложением 1.8.

В предположении центральности подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$ пункт (i) предложения 2.1 может быть уточнен следующим образом:

**Предложение 2.5.** *Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — центральные подгруппы группы $G$. Если элементы $f$ и $g$ группы $G$ не сопряжены в этой группе, то $f$ и $g$ сопряжены в группе $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1,\, \varphi\big)$*

*тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $k \neq 0$ элемент $f$ принадлежит области определения $D(\varphi^k)$ отображения $\varphi^k$ и $g = f\varphi^k$.*

В самом деле, если $f \in D(\varphi^k)$ и $g = f\varphi^k$, то в силу предложения 1.5 $g = t^{-k}ft^k$. Обратно, пусть $g = x^{-1}fx$ для некоторого $x \in G^*$. Если элементы $f$ и $g$ не сопряжены в группе $G$, то $l(x) > 0$, и так как $x^{-1}fx \in x^{-1}Gx \cap G$, из предложения 2.3 следует, что $f \in W(x)$. Более того, если $k$ — сумма показателей степеней у $t$ в приведенной записи элемента $x$, то $f \in D(\varphi^k)$ и $x^{-1}fx = t^{-k}ft^k$. Теперь предложения 1.5 следует, что $g = f\varphi^k$.

Предложение 2.5 говорит о том, что в данной ситуации финитная аппроксимируемость относительно сопряженности группы $G$ зависит от финитной отделимости в $G$ любого множества, состоящего из элементов вида $g\varphi^k$, где $g$ — фиксированный элемент группы $G$ и $k$ — произвольное целое число такое, что $g \in D(\varphi^k)$. В связи с этим нам понадобится следующее

**Предложение 2.6.** *Пусть $A$ — конечно порожденная абелева группа и $\varphi$ — автоморфизм группы $A$. Тогда для любого $a \in A$ множество $\{a\varphi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ финитно отделимо в $A$.*

*Доказательство.* Пусть элемент $b$ группы $A$ не принадлежит множеству $M = \{a\varphi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим $HNN$-расширение

$$A^* = \big(A, t;\, t^{-1}xt = x\varphi \ (x \in A)\big),$$

где связанные подгруппы совпадают с базовой группой $A$. В силу предложения 2.5 элементы $a$ и $b$ не сопряжены в группе $A^*$. Очевидно, что группа $A^*$ является расщепляемым расширением группы $A$ при помощи бесконечной циклической группы и потому — полициклической группой. Так как полициклические группы финитно аппроксимируемы относительно сопряженности (см. [9]), существует гомоморфизм $\theta$ группы $A^*$ на некоторую конечную группу $F$ такой, что образы $a\theta$ и $b\theta$

элементов $a$ и $b$ не сопряжены в $F$. Если предположить, что $b\theta \in M\theta$, то для некоторого целого $k$ будем иметь

$$b\theta = (a\varphi^k)\theta = (t^{-k}at^k)\theta = (t^k\theta)^{-1}a(t^k\theta),$$

что невозможно. Таким образом, ограничение отображения $\theta$ на подгруппу $A$ является гомоморфизмом группы $A$ на конечную группу, при котором образ элемента $b$ не входит в образ множества $M$. Предложение 2.6 доказано.

Для более детального описания ситуации в пункте (ii) предложения 2.1 введем еще одну подгруппу, связанную с элементом $x$ положительной длины.

Пусть снова $x = x_0t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, причем $n \geqslant 1$. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

(т. е. $\sigma(x)$ совпадает с $\sigma_n$ из предложения 2.3). Рассмотрим множество

$$K(x) = \left\{(a\varphi^{\sigma(x)})^{-1}a \;\middle|\; a \in W(x)\right\}.$$

Если подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ принадлежат центру группы $G$, то произведение $K = A_{-1}A_1$ является абелевой подгруппой группы $G$, и поскольку для любого $a \in W(x)$ элементы $a$ и $a\varphi^{\sigma(x)}$ лежат в $K$, множество $K(x)$ является подгруппой группы $G$.

**Предложение 2.7.** *Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — центральные подгруппы группы $G$ и пусть $x = x_0t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, где $n \geqslant 1$. Если в группе $G^*$ элемент $x$ сопряжен относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ с элементом $y \in G^*$, то пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ не пусто.*

*Обратно, пусть пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ не пусто, т. е. $x^{-1}ay = b$ для некоторых элементов $a$ и $b$ из подгруппы*

$A_{-\varepsilon_1}$. *Тогда элементы* $x$ *и* $y$ *сопряжены относительно подгруппы* $A_{-\varepsilon_1}$ *в том и только в том случае, когда элементы* $a$ *и* $b$ *сравнимы по модулю подгруппы* $K(x)$.

*Доказательство.* Первое утверждение очевидно, так как если $y = a^{-1}xa$ для некоторого $a \in A_{-\varepsilon_1}$, то $a = x^{-1}ay \in x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y \cap A_{-\varepsilon_1}$.

Для доказательства второго утверждения предположим сначала, что

$$b = (c\varphi^{\sigma(x)})^{-1}c \cdot a$$

для некоторого $c \in W(x)$. Поскольку тогда ввиду предложений 2.3 и 1.5 $x^{-1}cx = t^{-\sigma(x)}ct^{\sigma(x)} = c\varphi^{\sigma(x)}$, имеем $y = a^{-1}xb = a^{-1}x \cdot (x^{-1}cx)^{-1}c \cdot a = (ca)^{-1}x(ca)$, причем $ca \in A_{-\varepsilon_1}$, так как $a \in A_{-\varepsilon_1}$ и $W(x) \subseteq A_{-\varepsilon_1}$.

Обратно, пусть $y = c^{-1}xc$ для некоторого $c \in A_{-\varepsilon_1}$. Так как $y = a^{-1}xb$, имеем $a^{-1}xb = c^{-1}xc$, откуда $ba^{-1} = (x^{-1}dx)^{-1}d$, где $d = ca^{-1}$. Так как элементы $ba^{-1}$ и $d$ принадлежат подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$, из этого равенства следует, что

$$x^{-1}dx \in x^{-1}A_{-\varepsilon_1}x \cap A_{-\varepsilon_1}.$$

Далее, учитывая предложение 2.3, имеем

$$x^{-1}A_{-\varepsilon_1}x \cap A_{-\varepsilon_1} = (x^{-1}A_{-\varepsilon_1}x \cap x^{-1}Gx) \cap (A_{-\varepsilon_1} \cap G) =$$
$$x^{-1}A_{-\varepsilon_1}x \cap x^{-1}W(x)x \cap A_{-\varepsilon_1} = x^{-1}W(x)x \cap A_{-\varepsilon_1} \subseteq x^{-1}W(x)x.$$

Таким образом, $d \in W(x)$, и так как снова в силу предложений 2.3 и 1.5 $x^{-1}dx = t^{-\sigma(x)}dt^{-\sigma(x)} = d\varphi^{\sigma(x)}$, элемент $ba^{-1}$ принадлежит подгруппе $K(x)$, что и требовалось доказать.

В связи с предложением 2.7 нам потребуются некоторые условия непустоты пересечения множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_\varepsilon$.

**Предложение 2.8.** *Пусть* $A_{-1}$ *и* $A_1$ *— центральные подгруппы группы* $G$ *и пусть*

$$x = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2 \cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n \quad \text{и} \quad y = t^{\delta_1}y_1t^{\delta_2}y_2 \cdots y_{m-1}t^{\delta_m}y_m$$

*— приведенные записи элементов $x$ и $y$ группы $G^*$, где $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$. Если для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_\varepsilon$ непусто, то*

(i) *$m = n$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнены равенства $\varepsilon_i = \delta_i$ и $y_i = x_i c_i d_i$ для подходящих элементов $c_i \in A_{\varepsilon_i}$ и $d_i \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$ (где $\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon$);*

(ii) *для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ пересечение подмножеств $(x^{(k)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k)}$ и $A_{-\varepsilon_{k+1}}$ непусто, где, как и выше, $x^{(k)} = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{k-1}t^{\varepsilon_k}x_k$ и $y^{(k)} = t^{\varepsilon_1}y_1t^{\varepsilon_2}y_2\cdots y_{k-1}t^{\varepsilon_k}y_k$;*

(iii) *пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_\varepsilon$ совпадает со смежным классом $\left(x^{-1}W(x)x \cap A_\varepsilon\right)b$ группы $A_\varepsilon$ по ее подгруппе $x^{-1}W(x)x \cap A_\varepsilon$, где $b$ — произвольный элемент пересечения $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y \cap A_\varepsilon$.*

*Доказательство.* Утверждение пункта (i) следует непосредственно из предложения 1.2 и центральности подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$. Докажем утверждение пункта (ii). Так как при $n = 1$ оно тривиально, будем предполагать, что $n > 1$.

Пусть $b$ — произвольный элемент пересечения $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y \cap A_\varepsilon$, т. е. $b = x^{-1}ay$ для некоторого $a \in A_{-\varepsilon_1}$. Полагая для $k = 1, 2, \ldots, n$ $a_k = (x^{(k)})^{-1}ay^{(k)}$, покажем, что для каждого такого $k$ $a_k \in A_{-\varepsilon_{k+1}}$. Это и будет, очевидно, означать, непустоту соответствующего пересечения.

Так как элемент $a$ принадлежит подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$, элемент

$$a_1 = x_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}at^{\varepsilon_1}y_1 = x_1^{-1}(a\varphi^{\varepsilon_1})x_1c_1d_1 = (a\varphi^{\varepsilon_1})c_1d_1$$

принадлежит подгруппе $K = A_{-1}A_1$ и, следовательно — подгруппе $G$, а потому с учетом условия $n > 1$ из принадлежности подгруппе $G$ элемента

$$b = x_n^{-1}t^{-\varepsilon_n}\cdots x_2^{-1}t^{-\varepsilon_2}a_1t^{\varepsilon_2}y_2\cdots t^{\varepsilon_n}y_n$$

в силу леммы Бриттона следует включение $a_1 \in A_{-\varepsilon_2}$.

Предположим теперь, что для некоторого $k < n$ включение $a_k \in A_{-\varepsilon_{k+1}}$ имеет место, и докажем, что тогда справедливо и включение $a_{k+1} \in A_{-\varepsilon_{k+2}}$. Так как при $k + 1 = n$, это содержится в предположении, можем считать, что $k + 1 < n$. Ввиду включения $a_k \in A_{-\varepsilon_{k+1}}$

элемент

$$a_{k+1} = x_{k+1}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+1}} a_k t^{-\varepsilon_{k+1}} y_{k+1} = x_{k+1}^{-1} (a_k \varphi^{\varepsilon_{k+1}}) x_{k+1} c_{k+1} d_{k+1} = (a\varphi^{\varepsilon_{k+1}}) c_{k+1} d_{k+1}$$

входит в подгруппу $G$, и потому с учетом условия $n > k+1$ из принадлежности подгруппе $G$ элемента

$$b = x_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} \cdots x_{k+2}^{-1} t^{-\varepsilon_{k+2}} a_{k+1} t^{\varepsilon_{k+2}} y_{k+2} \cdots t^{\varepsilon_n} y_n$$

как и выше, следует включение $a_1 \in A_{-\varepsilon_{k+2}}$. Таким образом, утверждение пункта (ii) доказано.

Для доказательства утверждения пункта (iii) фиксируем произвольный элемент $b$ из множества $x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y \cap A_\varepsilon$ и покажем сначала, что

$$x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y \cap A_\varepsilon = (x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap A_\varepsilon) b.$$

Запишем произвольный элемент $g \in x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y \cap A_\varepsilon$ в виде $g = x^{-1} cy$, где $c \in A_{-\varepsilon_1}$. Так как $b = x^{-1} ay$ для некоторого $a \in A_{-\varepsilon_1}$, имеем

$$g = x^{-1} cy = x^{-1} c \cdot a^{-1} xb = x^{-1} (ca^{-1}) xb,$$

причем $ca^{-1} \in A_{-\varepsilon_1}$ и, поскольку элементы $g$ и $b$ принадлежат подгруппе $A_{-\varepsilon_1}$, $x^{-1}(ca^{-1})x \in A_{-\varepsilon_1}$. Таким образом, $g \in (x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap A_\varepsilon) b$, и включение

$$x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y \cap A_\varepsilon \subseteq (x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap A_\varepsilon) b$$

доказано. Так как при любом $c \in A_{-\varepsilon_1}$

$$x^{-1} cxb = x^{-1} cx \cdot x^{-1} ay = x^{-1} (ca) y \in x^{-1} A_{-\varepsilon_1} y,$$

и из того, что $x^{-1} cx \in A_\varepsilon$, следует $x^{-1} cxb \in A_\varepsilon$, противоположное включение также справедливо, и требуемое равенство доказано. Наконец, с учетом предложения 2.3 имеем

$$x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap A_\varepsilon = x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap x^{-1} G x \cap G \cap A_\varepsilon = x^{-1} A_{-\varepsilon_1} x \cap x^{-1} W(x) x \cap A_\varepsilon = x^{-1} W(x) x \cap A_\varepsilon.$$

Предложение 2.8 доказано.

Заметим, вдобавок, что если элементы $x$ и $y$ удовлетворяют условиям из пункта (i) предложения 2.7 и $n = 1$, то пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_\varepsilon$ не пусто. Действительно, так как

$$x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y = x_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}A_{-\varepsilon_1}t^{-\varepsilon_1}y_1 = x_1^{-1}A_{\varepsilon_1}x_1c_1d_1 = A_{\varepsilon_1}c_1d_1 = A_{\varepsilon_1}d_1,$$

это пересечение содержит элемент $d_1$.

## § 3. О финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения

Как уже отмечалось выше, начало систематическим исследованиям условий финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп было положено работой Г. Баумслага [15], где была предложена определенная методика изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений, базирующаяся на доказанном в ней утверждении о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп и использующая введенное там же понятие пары совместимых подгрупп из свободных множителей. Аналогичная методика для изучения финитной аппроксимируемости $HNN$-расширений базируется на следующем результате, полученном независимо в работах [14] и [17]:

**Предложение 3.1.** *Если группа $G$ конечна, то $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ является финитно аппроксимируемой группой.*

Применение этого результата к изучению финитной аппроксимируемости $HNN$-расширений с бесконечной базовой группой происходит с использованием следующего аналога понятия пары совместимых подгрупп, фактически сформулированного в работе [14].

Пусть $G$ — некоторая группа с изоморфными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-*совместимой*, если $(A_{-1} \cap H)\varphi = A_1 \cap H$.

Легко видеть, что если $H$ — нормальная $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая подгруппа группы $G$, то отображение

$$\varphi_{_H} : A_{-1}H/H \to A_1H/H,$$

(корректно) определяемое правилом $(aH)\varphi_{_H} = (a\varphi)H$ (где $a \in A_{-1}$), является изоморфизмом подгруппы $A_{-1}H/H$ фактор-группы $G/H$ на ее подгруппу $A_1H/H$. Поэтому наряду с $HNN$-расширением $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ группы $G$ можно построить $HNN$-расширение

$$G^*_H = \big(G/H, t;\ t^{-1}A_{-1}H/H\, t = A_1H/H,\, \varphi_{_H}\big))$$

группы $G/H$. Очевидно, что естественный гомоморфизм группы $G$ на фактор-группу $G/H$ может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_{_H}$ группы $G^*$ на группу $G^*_H$ (переводящего $t$ в $t$). Кроме того, если подгруппа $H$ имеет конечный индекс в группе $G$, то группа $G^*_H$ оказывается в силу предложения 3.1 финитно аппроксимируемой.

Легко видеть также, что если $N$ — произвольная нормальная подгруппа группы $G^*$, то подгруппа $H = G \cap N$ является $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппой группы $G$:

$$(A_{-1} \cap H)\varphi = (A_{-1} \cap G \cap N)\varphi = (A_{-1} \cap N)\varphi = t^{-1}(A_{-1} \cap N)t = A_1 \cap N.$$

В частности, произвольный гомоморфизм группы $G^*$ в некоторую группу проходит через подходящий гомоморфизм вида $\rho_{_H}$, причем если образ группы $G^*$ при этом гомоморфизме конечен, то подгруппа $H$ имеет конечный индекс в $G$.

Договоримся, следуя Г. Баумслагу, семейство $\mathcal{X}$ нормальных подгрупп некоторой группы $G$ называть *фильтрацией*, если пересечение всех подгрупп этого семейства совпадает с единичной подгруппой. Если $A$ — подгруппа группы $G$, то фильтрация $\mathcal{X}$ называется *$A$-фильтрацией*, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе $A$, найдется подгруппа $N \in \mathcal{X}$ такая, что $g \notin AN$. Если $A$ и $B$ — две подгруппы группы $G$, то фильтрацию $\mathcal{X}$ будем называть *$(A, B)$-фильтрацией*, если она одновременно является и $A$-фильтрацией, и $B$-фильтрацией.

Очевидно, что если все подгруппы из семейства $\mathcal{X}$ имеют конечный индекс в группе $G$, то из того, что семейство $\mathcal{X}$ является фильтрацией, следует финитная аппроксимируемость группы $G$, а из того, что семейство $\mathcal{X}$ является $A$-фильтрацией, следует финитная отделимость подгруппы $A$.

Договоримся, наконец, через $\mathcal{F}_G(A_{-1}, A_1, \varphi)$ обозначать семейство всех $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$. Следующее утверждение, сформулированное в [5] и являющееся некоторой модификацией теоремы 4.2 из [14], использу-

ется практически в каждом исследовании финитной аппроксимируемости $HNN$-расширений и легко получается из предыдущих замечаний.

**Предложение 3.2.** *Пусть $G$ — некоторая группа, $A_{-1}$ и $A_1$ — подгруппы группы $G$ и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм. Пусть*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

*— $HNN$-расширение группы $G$. Тогда*

(1) *если группа $G^*$ финитно аппроксимируема, то семейство $\mathcal{F}_G(A_{-1}, A_1, \varphi)$ является фильтрацией;*
(2) *если семейство $\mathcal{F}_G(A_{-1}, A_1, \varphi)$ является $(A_{-1}, A_1)$-фильтрацией, то группа $G^*$ финитно аппроксимируема.*

Условия финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

при некоторых дополнительных предположениях о базовой группе $G$ и связанных подгруппах $A_{-1}$ и $A_1$, включающих центральность этих подгрупп, рассматривались в работе [5]. Основные результаты этой работы (теоремы 1 и 2) могут быть сформулированы следующим образом:

**Предложение 3.3.** *Пусть $A_{-1}$ и $A_1$ — конечно порожденные центральные подгруппы группы $G$, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$. Пусть последовательности $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы $G$ определены по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Предположим также, что в группе $G$ все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является финитно аппроксимируемой;*

(ii) *для некоторого целого числа* $n \geqslant 0$ *имеет место равенство* $U_n = V_n$*;*

(iii) *в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы* $G$ *содержится некоторая* $(A_{-1}, A_1, \varphi)$*-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса этой группы.*

Следует заметить, что в [5] предполагалась финитная отделимость в группе $G$ лишь тех подгрупп, лежащих в $K$, индекс в $K$ которых конечен. Легко видеть, тем не менее, что если $K$ — конечно порожденная центральная подгруппа некоторой группы $G$ и если произвольная подгруппа группы $K$, имеющая конечный индекс в $K$, финитно отделима в группе $G$, то и любая подгруппа группы $K$ финитно отделима в $G$.

Действительно, пусть $H$ — подгруппа группы $G$, лежащая в подгруппе $K$, и пусть элемент $g \in G$ не входит в $H$. Тогда в группе $K$ найдется подгруппа $M$, имеющая в $K$ конечный индекс и такая, что $g \notin HM$: если $g \notin K$, в качестве $M$ может быть выбрана произвольная подгруппа конечного индекса группы $K$, а если $g \in K$, существование $M$ следует из финитной отделимости каждой подгруппы конечно порожденной абелевой группы $K$. Из отделимости подгруппы $M$ следует что фактор-группа $G/M$ финитно аппроксимируема. Так как элемент $gM$ не входит в ее конечную подгруппу $HM/M$, найдется нормальная подгруппа конечного индекса $N/M$ группы $G/M$ такая, что элемент $gM$ не входит в подгруппу $HM/M \cdot N/M = HN/M$. Поскольку тогда $N$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы $G$ и $g \notin HN$, финитная отделимость подгруппы $H$ доказана.

Нам потребуется здесь некоторое усиление утверждения пункта (iii) из формулировки предложения 3.3.

$(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу $H$ группы $G$ назовем *сильно* $(A_{-1}, A_1, \varphi)$*-совместимой*, если для любого целого числа $k \geqslant 0$

$$U_k H/H \cap V_k H/H = (U_k \cap V_k)H/H.$$

Заметим тут же, что поскольку равенство

$$U_kH/H \cap V_kH/H = (U_k \cap V_k)H/H$$

равносильно равенству $U_kH \cap V_kH = (U_k \cap V_k)H$, правая часть которого всегда содержится в левой части, $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа $H$ группы $G$ является сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой, тогда и только тогда, когда любого целого числа $k \geqslant 0$ справедливо включение $U_kH \cap V_kH \subseteq (U_k \cap V_k)H$.

Значение понятия сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппы проясняется следующими замечаниями.

Пусть $H$ — $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа группы $G$. Договоримся для произвольной подгруппы $X \leqslant G$ через $\overline{X}$ обозначать подгруппу $XH/H$ фактор-группы $G/H$. Построим в фактор-группе $G/H$ последовательности подгрупп $\left(U_k^{(H)}\right)$ и $\left(V_k^{(H)}\right)$, аналогичные построенным выше последовательностям подгрупп $\left(U_k\right)$ и $\left(V_k\right)$ группы $G$, т. е.

$$U_0^{(H)} = \overline{A_{-1}},\ V_0^{(H)} = \overline{A_1} \quad \text{и} \quad U_{k+1}^{(H)} = U_k^{(H)} \cap V_k^{(H)},\ V_{k+1}^{(H)} = U_{k+1}^{(H)}\varphi_{_H}.$$

Заметим также, что непосредственно из определения отображения $\varphi_{_H}$ легко следует, что для любой подгруппы $X$ группы $G$ и любого целого числа $k$ из включения $X \leqslant D(\varphi^k)$ следуют включение $\overline{X} \leqslant D(\varphi_{_H}^k$ и справедливость равенства $\overline{X}\varphi_{_H}^k = \overline{X\varphi^k}$.

Если поэтому подгруппа $H$ является сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой, то очевидная индукция показывает, что для любого $k \geqslant 0$ имеют место равенства $U_k^{(H)} = \overline{U}_k$ и $V_k^{(H)} = \overline{V}_k$. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы $G$ на ее фактор-группу $G/H$ по сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппе $H$ члены последовательностей $\left(U_k\right)$ и $\left(V_k\right)$ переходят в соответствующие члены аналогичных последовательностей группы $G/H$, построенных по подгруппам $\overline{A}_{-1}$ и $\overline{A}_1$ и изоморфизму $\varphi_{_H}$.

Отсюда с использованием предложения 1.4 получаем, в частности,

**Предложение 3.4.** *Пусть $\varphi$ — изоморфизм подгруппы $A_{-1}$ группы $G$ на ее подгруппу $A_1$ и пусть $H$ — сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая подгруппа группы $G$. Тогда для любых целых чисел $m$ и $l$, где $m \geqslant 0$, выполнено равенство $U_m^{(H)}\varphi_H^l = \overline{U_m\varphi^l}$ и для любого целого числа $k$ выполнено равенство $D(\varphi_H^k) = \overline{D(\varphi^k)}$.*

Упомянутое выше усиление утверждения (iii) из предложения 3.3 формулируется следующим образом:

**Предложение 3.5.** *Пусть группа $G$ и ее подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ удовлетворяют условиям предложения 2.1. Тогда если для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ выполнено равенство $U_n = V_n$, то в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы $G$ содержится некоторая сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая подгруппа конечного индекса этой группы.*

*Доказательство.* Подгруппа $A_1$ группы $G$ содержит подгруппы $U_1$ и $V_1$, а ограничение отображения $\varphi$ на подгруппу $U_1$ (обозначаемое тем же символом $\varphi$) является изоморфизмом подгруппы $U_1$ на подгруппу $V_1$. Поэтому можно говорить о $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимых и сильно $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимых подгруппах группы $A_1$.

**Лемма 1.** *Пусть $D$ — сильно $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимая подгруппа конечного индекса группы $A_1$. Пусть $C = D\varphi^{-1}$ и $H$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$, пересечение которой с подгруппой $K = A_{-1}A_1$ совпадает с $CD$. Тогда $H$ является сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой.*

Докажем сначала, что подгруппа $H$ является $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой. Заметим, что

$$A_{-1} \cap CD = C \quad \text{и} \quad A_1 \cap CD = D.$$

Действительно, поскольку подгруппы $U_1$ и $C$ лежат в подгруппе $A_{-1}$, учитывая $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимость подгруппы $D$ имеем

$$(U_1 \cap C)\varphi = U_1\varphi \cap C\varphi = V_1 \cap D = (U_1 \cap D)\varphi,$$

откуда ввиду инъективности $\varphi$ следует, что $U_1 \cap C = U_1 \cap D$. Если теперь элемент $g$ группы $G$ принадлежит подгруппе $A_{-1} \cap CD$, то $g = xy$, где $x \in C$, $y \in D$. Так как элементы $g$ и $x$ лежат в подгруппе $A_{-1}$, то элемент $y$ принадлежит подгруппе

$$A_{-1} \cap D = A_{-1} \cap A_1 \cap D = U_1 \cap D = U_1 \cap C,$$

и потому $g \in C$, так что $A_{-1} \cap CD \subseteq C$. Включение $A_1 \cap CD \subseteq D$ доказывается аналогично, и так как противоположные включения очевидны, требуемые равенства доказаны.

Поскольку тогда

$$A_{-1} \cap H = A_{-1} \cap K \cap H = A_{-1} \cap CD = C,$$
$$A_1 \cap H = A_1 \cap K \cap H = A_1 \cap CD = D$$

и $C\varphi = D$, подгруппа $H$ действительно является $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой.

Покажем теперь, что для всякого $k \geqslant 0$ справедливо включение

$$U_k H \cap V_k H \subseteq (U_k \cap V_k)H.$$

Если $x \in U_k H \cap V_k H$, то $x = uh_1$ и $x = vh_2$ для некоторых элементов $u \in U_k$, $v \in V_k$ и $h_1, h_2 \in H$. Тогда элемент $u^{-1}v = h_1 h_2^{-1}$ принадлежит подгруппе $U_k V_k \cap H$.

Если $k = 0$, то поскольку $A_{-1}A_1 \cap H = CD$, $u^{-1}v = cd$, где $c \in C$ и $d \in D$. Так как $u, c \in A_{-1}$ и $v, d \in A_1$, элемент $uc = vd^{-1}$ принадлежит подгруппе $A_{-1} \cap A_1$. Следовательно, $v = ucd \in (A_{-1} \cap A_1)d$ и с учетом включения $d \in H$ получаем $x = vh_2 \in (U_0 \cap V_0)H$.

Если $k \geqslant 1$, то подгруппы $U_k$ и $V_k$ лежат в подгруппе $A_1$ и совпадают с $(k-1)$-ми членами соответствующих последовательностей, построенных в $A_1$ по подгруппам $U_1$ и $V_1$ и изоморфизму $\varphi$. В частности, из условия леммы следует справедливость включения $U_k D \cap V_k D \subseteq (U_k \cap V_k)D$. В этом случае элемент $u^{-1}v = h_1 h_2^{-1}$ принадлежит подгруппе $A_1 \cap H = D$, и полагая $d = u^{-1}v$, имеем

$v = ud \in U_k D$. Но поскольку из $v \in V_k$ следует $v \in V_k D$, мы видим, что $v \in U_k D \cap V_k D$, и потому $v \in (U_k \cap V_k)D$. Так как $D \leqslant H$, получаем отсюда $x = vh_2 \in (U_k \cap V_k)H$, что и требовалось. Лемма 1 доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть $M$ — нормальная подгруппа конечного индекса некоторой группы $G$, $X$ и $K$ — подгруппы группы $G$, $X$ содержится в каждой из подгрупп $M$ и $K$, причем индекс ее в подгруппе $K$ конечен. Если подгруппа $X$ является нормальной и финитно отделимой в $G$, то группа $G$ содержит нормальную подгруппу $H$ конечного индекса такую, что $H \cap K = X$ и $H \leqslant M$.*

В самом деле, поскольку $K/X$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы $G/X$, то в группе $G/X$ найдется нормальная подгруппа конечного индекса $H_1/X$ такая, что пересечение $H_1/X \cap K/X$ является единичной подгруппой. Легко видеть, что подгруппа $H = H_1 \cap M$ является искомой.

Мы готовы теперь доказать предложение 3.5. Пусть $M$ — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$. Существование содержащейся в $M$ сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппы конечного индекса группы $G$ будем доказывать индукцией по числу $n$ такому, что $U_n = V_n$.

Пусть $n = 0$, т. е. $A_{-1} = A_1$ и $\varphi$ является автоморфизмом подгруппы $A_1$. Подгруппа $M_0 = M \cap A_1$ имеет конечный индекс в группе $A_1$. Хорошо известно, что в каждой подгруппе конечного индекса конечно порожденной группы содержится характеристическая подгруппа, также имеющая в этой группе конечный индекс. Поэтому группа $A_1$ содержит такую подгруппу $D$ конечного индекса, что $D \subseteq M_0$ и $D\varphi = D$. Поскольку для любого $k \geqslant 1$ $U_k = V_k = A_1$, подгруппа $D$ является, очевидно, сильно $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимой подгруппой конечного индекса группы $A_1$. Так как $D$ является финитно отделимой нормальной подгруппой группы $G$, из леммы 2 (при $X = D$ и $K = A_1$)

следует существование в группе $G$ такой нормальной подгруппы $H$ конечного индекса, что $H \cap A_1 = D$ и $H \leqslant M$. Поскольку в этом случае $C = D\varphi^{-1} = D$ и $K = A_{-1}A_1 = A_1$, в силу леммы 1 $H$ является сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппой группы $G$.

Пусть $n \geqslant 1$. Так как подгруппы $U_n$ и $V_n$ лежат в подгруппе $A_1$ и совпадают с $(n-1)$-ми членами соответствующих последовательностей, построенных в $A_1$ по подгруппам $U_1$ и $V_1$ и изоморфизму $\varphi$, по индуктивному предположению в подгруппе $M_0 = M \cap A_1$ содержится некоторая сильно $(U_1, V_1, \varphi)$-совместимая подгруппа $D$ конечного индекса группы $A_1$. Применение леммы 2 к группе $G$ и ее подгруппам $K = A_{-1}A_1$ и $X = CD$ (где $C = D\varphi^{-1}$) дает существование в группе $G$ такой нормальной подгруппы $H$ конечного индекса, что $H \cap K = CD$ и $H \leqslant M$. Снова в силу леммы 1 $H$ является сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппой группы $G$. Этим завершен индуктивный шаг и предложение 3.5 доказано.

## § 4. Доказательство теоремы 1

Пусть $G$ — некоторая группа с изоморфными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм подгруппы $A_{-1}$ на подгруппу $A_1$. Всюду ниже в этом параграфе предполагается, что

(i) группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности;

(ii) подгруппы $A_{-1}$ и $A_1$ конечно порождены, отличны от группы $G$ и содержатся в центре этой группы;

(iii) произвольная подгруппа группы $G$, лежащая в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделима в $G$;

(iv) группа $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\rangle$ является финитно аппроксимируемой.

Покажем, что тогда группа $G^*$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Ввиду теоремы Дж. Дайер [18], утверждающей, что $HNN$-расширение конечной группы является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, для этого достаточно для любых двух элементов $x$ и $y$ группы $G^*$, не сопряженных в этой группе, указать нормальную $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу $H$ конечного индекса группы $G$ такую, что образы $x\rho_H$ и $y\rho_H$ элементов $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G^*_H$.

Начнем с доказательства двух вспомогательных утверждений о группе $G^*$, вытекающих из сформулированных предположений.

**Предложение 4.1.** *Для любого неединичного элемента $x$ группы $G^*$ существует нормальная $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая подгруппа $H$ конечного индекса группы $G$ такая, что длина в группе $G^*_H$ элемента $x\rho_H$ совпадает с длиной в группе $G^*$ элемента $x$, причем если $l(x) = 0$, то $x\rho_H \neq 1$. Если элемент $x$ является циклически приведенным, то подгруппа $H$ может быть выбрана так, чтобы вдобавок элемент $x\rho_H$ был циклически приведенным.*

*Доказательство.* Пусть $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$. Из определения отображения $\rho_H$ оче-

видно, что при $n = 0$ и $n = 1$ требованиям предложения 4.1 удовлетворяет любая $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$ (не содержащая элемента $x$ при $n = 0$). Будем считать поэтому, что $n > 1$.

Фиксируем некоторую $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу $M_0$ конечного индекса группы $G$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу $M_i$ конечного индекса группы $G$ следующим образом:

Пусть сначала $1 \leqslant i < n$. Если $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \neq 0$, полагаем $M_i = M_0$. Если же $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, то в силу приведенности рассматриваемой записи элемента $x$ элемент $x_i$ не входит в подгруппу $A_{-\varepsilon_i}$. Поскольку по предположению в группе $G$ эта подгруппа финитно отделима, найдется такая нормальная подгруппа $M$ конечного индекса группы $G$, что элемент $x_i$ не входит в подгруппу $A_{-\varepsilon_i}M$. Так как группа $G^*$ финитно аппроксимируема, из предложения 3.3 следует существование содержащейся в $M$ $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппы конечного индекса группы $G$, и через $M_i$ мы обозначим некоторую такую подгруппу.

Подгруппу $M_n$ в случаях, когда $\varepsilon_n + \varepsilon_1 \neq 0$ или $\varepsilon_n + \varepsilon_1 = 0$ и элемент $x_n x_0$ принадлежит подгруппе $A_{\varepsilon_n}$, полагаем равной $M_0$. Если же $\varepsilon_n + \varepsilon_1 = 0$ и $x_n x_0 \notin A_{\varepsilon_n}$, то в качестве $M_n$ возьмем такую $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса группы $G$, что $x_n x_0 \notin A_{\varepsilon_n} M_n$; возможность такого выбора обосновывается точно так же, как в предыдущем абзаце.

Поскольку пересечение произвольного семейства $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимых подгрупп является, как легко видеть, $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппой, подгруппа

$$H = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$$

является $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппой конечного индекса группы $G$. Утверждается, что она является искомой.

Действительно, по определению отображения $\rho_{_H}$ образ $x\rho_{_H}$ элемента $x$ имеет вид

$$\overline{x_0}t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n},$$

где $\overline{x_i} = x_iH$. Так как для любого $i$, $1 \leqslant i < n$, при $\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1} = 0$ элемент $x_i$ в силу выбора подгруппы $H$ не входит в подгруппу $A_{-\varepsilon_i}H$, т. е. элемент $\overline{x_i}$ не входит в подгруппу $\overline{A_{-\varepsilon_i}} = A_{-\varepsilon_i}H/H$, эта запись элемента $x\rho_{_H}$ в группе $G^*_H$ является приведенной. Если, к тому же, элемент $x$ является циклически приведенным и если $\varepsilon_n + \varepsilon_1 = 0$, то в в силу выбора подгруппы $H$ $\overline{x_nx_0} \notin \overline{A_{\varepsilon_n}}$, так что элемент $x\rho_{_H}$ оказывается циклически приведенным.

**Предложение 4.2.** *Пусть*

$$x = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n \quad и \quad y = t^{\delta_1}y_1t^{\delta_2}y_2\cdots y_{m-1}t^{\delta_m}y_m$$

*— приведенные записи элементов $x$ и $y$ группы $G^*$, где $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$. Если в группе $G^*$ элементы $x$ и $y$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, то существует нормальная $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая подгруппа $H$ конечного индекса группы $G$ такая, что в группе $G^*_H$ элементы $x\rho_{_H}$ и $y\rho_{_H}$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H/H$.*

*Доказательство.* Выберем в соответствии с предложением 4.1 нормальные $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимые подгруппы $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ конечного индекса группы $G$ так, чтобы длина в группе $G^*_{H^{(1)}}$ элемента $x\rho_{_{H^{(1)}}}$ совпала с длиной в группе $G^*$ элемента $x$ и длина в группе $G^*_{H^{(2)}}$ элемента $y\rho_{_{H^{(2)}}}$ совпала с длиной в группе $G^*$ элемента $y$, и положим

$$H_0 = H^{(1)} \cap H^{(2)}.$$

Очевидно тогда, что в группе $G^*_{H_0}$ приведенные записи элементов $x\rho_{_{H_0}}$ и $y\rho_{_{H_0}}$ имеют вид

$$t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n} \quad и \quad t^{\delta_1}\overline{y_1}t^{\delta_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{m-1}}t^{\delta_m}\overline{y_m}$$

соответственно (где, как и выше, для $g \in G$ $\overline{g} = gH_0$). Поэтому если $m \neq n$ или $m = n$, но для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$ $\varepsilon_i \neq \delta_i$, то в силу предложения 2.2 в группе $G^*_{H_0}$ элементы $x\rho_{H_0}$ и $y\rho_{H_0}$ не являются сопряженными относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H_0/H_0$. Таким образом, в этом случае подгруппа $H_0$ является искомой.

Пусть $m = n$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ $\varepsilon_i = \delta_i$. Предположим, что для некоторого номера $s$ элементы $x_s$ и $y_s$ лежат в разных смежных классах по подгруппе $A_{\varepsilon_s}A_{-\varepsilon_{s+1}}$ (где $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1$), т. е. элемент $x_s^{-1}y_s$ группы $G$ не принадлежит этой подгруппе. Так как по предположению подгруппа $A_{\varepsilon_s}A_{-\varepsilon_{s+1}}$ является финитно отделимой в $G$, найдется нормальная подгруппа $M$ конечного индекса группы $G$ такая, что $x_s^{-1}y_s \notin A_{\varepsilon_s}A_{-\varepsilon_{s+1}}M$. Поскольку группа $G^*$ предполагается финитно аппроксимируемой, ввиду предложения 3.3 подгруппу $M$ можно считать $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой, и нетрудно видеть, что искомой подгруппой в этом случае является $H = H_0 \cap M$.

Действительно, из включения $H \subseteq H_0$ следует, что в группе $G^*_H$ приведенные записи элементов $x\rho_H$ и $y\rho_H$ имеют вид

$$t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n} \quad \text{и} \quad t^{\varepsilon_1}\overline{y_1}t^{\varepsilon_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{y_n}$$

(где снова $\overline{g} = gH$ для $g \in G$), а из включения $H \subseteq M$ следует, что элементы $\overline{x_s}$ и $\overline{y_s}$ лежат в разных смежных классах по подгруппе $A_{\varepsilon_s}H/H \cdot A_{-\varepsilon_{s+1}}H/H$. Поэтому в силу предложений 2.7 и 2.8 в группе $G^*_H$ элементы $x\rho_H$ $y\rho_H$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H/H$.

Будем считать теперь, что приведенные записи элементов $x$ и $y$ имеют вид

$$x = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n \quad \text{и} \quad y = t^{\varepsilon_1}y_1t^{\varepsilon_2}y_2\cdots y_{n-1}t^{\varepsilon_n}y_n,$$

причем для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство $y_i = x_ic_id_i$ для подходящих элементов $c_i \in A_{\varepsilon_i}$ и $d_i \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$ (где $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1$).

Рассмотрим сначала случай, когда пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ является пустым. Пусть, как и выше,

$$x^{(k)} = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{k-1}t^{\varepsilon_k}x_k \quad \text{и} \quad y^{(k)} = t^{\varepsilon_1}y_1t^{\varepsilon_2}y_2\cdots y_{k-1}t^{\varepsilon_k}y_k$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Поскольку ввиду замечания, сделанного в конце параграфа 2, пересечение множеств $(x^{(1)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(1)}$ и $A_{-\varepsilon_2}$ не пусто, найдется номер $k$, $1 \leqslant k < n$, такой, что пересечение множеств $(x^{(k)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k)}$ и $A_{-\varepsilon_{k+1}}$ не пусто, а пересечение множеств $(x^{(k+1)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k+1)}$ и $A_{-\varepsilon_{k+2}}$ является пустым.

Из пункта (iii) предложения 2.8 следует, что пересечение

$$(x^{(k)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k)} \cap A_{-\varepsilon_{k+1}}$$

совпадает с некоторым смежным классом $Rb$ группы $A_{-\varepsilon_{k+1}}$ по подгруппе

$$R = (x^{(k)})^{-1}W(x^{(k)})x^{(k)} \cap A_{-\varepsilon_{k+1}}.$$

Отметим сразу же, что из предложений 2.3, 2.4 и 1.4 следует, что подгруппа $(x^{(k)})^{-1}W(x^{(k)})x^{(k)}$ имеет вид $U_m\varphi^l$ для некоторых целых чисел $m$ и $l$, где $m \geqslant 0$, однозначно определяемых лишь последовательностью показателей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k+1}$. В силу предложения 1.7 аналогичный вид, тоже однозначно определяемый той же последовательностью, имеет подгруппа $R$, а потому и подгруппа $R_1 = t^{-\varepsilon_{k+1}}Rt^{\varepsilon_{k+1}}$.

Пусть еще $b_1 = t^{-\varepsilon_{k+1}}bt^{\varepsilon_{k+1}}$. Легко видеть, что пересечение множеств $(x^{(k+1)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k+1)}$ и $A_{-\varepsilon_{k+2}}$ является пустым тогда и только тогда, когда пусто пересечение смежного класса $R_1b_1c_{k+1}d_{k+1}$ и подгруппы $A_{-\varepsilon_{k+2}}$, т. е. тогда и только тогда, когда элемент $b_1c_{k+1}$ не входит в подгруппу $R_1A_{-\varepsilon_{k+2}}$. Поскольку эта подгруппа финитно отделима, найдется нормальная подгруппа $M$ конечного индекса группы $G$ такая, что элемент $b_1c_{k+1}$ не принадлежит подгруппе $R_1A_{-\varepsilon_{k+2}}M$. В силу предложений 3.3 и 3.5 из предположений, сформулированных в начале параграфа, следует существование сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$, лежащей в пересечении подгрупп $H_0$ и $M$ (где $H_0$ — подгруппа, выбранная выше). Утверждается, что в группе $G_H^*$ пересечение множеств $\overline{x}^{-1}\overline{A}_{-\varepsilon_1}\overline{y}$ и $\overline{A}_{-\varepsilon_1}$ является пустым. (Здесь, как и выше, $\overline{g}$ и $\overline{X}$ обозначают образы относительно гомоморфизма $\rho_H$ элемента $g$ и подгруппы $X$ соответственно.)

Действительно, так как $H \subseteq H_0$, приведенные записи элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ имеют вид

$$\overline{x} = t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n} \quad \text{и} \quad \overline{y} = t^{\varepsilon_1}\overline{y_1}t^{\varepsilon_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{m-1}}t^{\varepsilon_m}\overline{y_m}.$$

Очевидно также, что для любого $l = 1, 2, \ldots, n$ образами элементов $x^{(l)}$ и $y^{(l)}$ являются

$$\overline{x}^{(l)} = t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{l-1}}t^{\varepsilon_l}\overline{x_l} \quad \text{и} \quad \overline{y}^{(l)} = t^{\varepsilon_1}\overline{y_1}t^{\varepsilon_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{l-1}}t^{\varepsilon_l}\overline{y_l}$$

Поэтому образ пересечения $(x^{(k)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k)} \cap A_{-\varepsilon_{k+1}}$ лежит в пересечении множеств $(\overline{x}^{(k)})^{-1}\overline{A}_{-\varepsilon_1}\overline{y}^{(k)}$ и $\overline{A}_{-\varepsilon_{k+1}}$, и, следовательно, это пересечение не пусто.

Применяя к этому пересечению те же аргументы, что и при вычислении подгруппы $R$, и учитывая совпадение последовательностей показателей у $t$ в записях элементов $x$ и $\overline{x}$, мы видим, что это пересечение совпадает со смежным классом группы $\overline{A}_{-\varepsilon_{k+1}}$ по подгруппе вида $U_m^{(H)}\varphi_H^l$. Так как подгруппа $H$ сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместима, из предложения 3.4 следует поэтому, что

$$(\overline{x}^{(k)})^{-1}\overline{A}_{-\varepsilon_1}\overline{y}^{(k)} \cap \overline{A}_{-\varepsilon_{k+1}} = \overline{Rb}.$$

Далее, так как в группе $G_H^*$

$$t^{-\varepsilon_{k+1}}\overline{R}t^{\varepsilon_{k+1}} = \overline{R}\varphi_H^{\varepsilon_{k+1}} = \overline{R\varphi^{\varepsilon_{k+1}}} = \overline{R_1}$$

и аналогично $t^{-\varepsilon_{k+1}}\overline{b}t^{\varepsilon_{k+1}} = \overline{b_1}$ и так как ввиду включения $H \subseteq M$ элемент $b_1c_{k+1}$ не принадлежит подгруппе $R_1A_{-\varepsilon_{k+2}}H$, в фактор-группе $G/H$ элемент $\overline{b_1}\overline{c_{k+1}}$ не принадлежит подгруппе $\overline{R_1}\,\overline{A_{-\varepsilon_{k+2}}}$, и потому в группе $G_H^*$ пересечение множеств $\overline{(}x^{(k+1)})^{-1}\overline{A}_{-\varepsilon_1}\overline{y}^{(k+1)}$ и $\overline{A}_{-\varepsilon_{k+1}}$ является пустым. Поэтому в силу предложения 2.8 пустым является и пересечение множеств $\overline{x}^{-1}\overline{A}_{-\varepsilon_1}\overline{y}$ и $\overline{A}_{-\varepsilon_1}$. Из предложения 2.7 теперь следует, что в группе $G_H^*$ элементы $x\rho_H$ $y\rho_H$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H/H$, т. е. подгруппа $H$ искомая.

Предположим, наконец, что пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ не пусто, т. е. $x^{-1}ay = b$ для некоторых элементов $a$ и $b$ из подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$. Так как элементы $x$ и $y$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, по предложению 2.7 элементы $a$ и $b$ не сравнимы по модулю подгруппы

$$K(x) = \big\{(a\varphi^{\sigma(x)})^{-1}a \mid a \in W(x)\big\},$$

где, напомним, $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$. Таким образом, элемент $ab^{-1}$ не входит в подгруппу $K(x)$, и так как по предположению эта подгруппа финитно отделима в $G$, мы можем выбрать такую нормальную подгруппу $M$ конечного индекса группы $G$, что $ab^{-1} \notin K(x)M$. Снова обозначим через $H$ некоторую сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, лежащую в пересечении подгрупп $H_0$ и $M$, и покажем, что в группе $G_H^*$ элементы $\overline{x} = x\rho_{_H}$ $\overline{y} = y\rho_{_H}$ не сопряжены относительно подгруппы $\overline{A}_{-\varepsilon_1} = A_{-\varepsilon_1}H/H$.

Действительно, ввиду включения $H \subseteq H_0$ приведенные записи элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ имеют вид

$$\overline{x} = t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n} \quad \text{и} \quad \overline{y} = t^{\varepsilon_1}\overline{y_1}t^{\varepsilon_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{m-1}}t^{\varepsilon_m}\overline{y_m}.$$

Так как подгруппа $H$ сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместима, отсюда и из предложений 2.4 и 3.4 следует, что $W(\overline{x}) = \overline{W(x)}$. Очевидно тогда, что подгруппа $K(\overline{x})$ совпадает с подгруппой $\overline{K(x)} = K(x)H/H$ и потому ввиду включения $H \subseteq M$ не содержит элемента $\overline{a}\overline{b}^{-1}$. Поскольку в группе $G_H^*$ выполнено равенство $\overline{x}^{-1}\overline{a}\overline{y} = \overline{b}$, в силу предложения 2.7 элементы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ не сопряжены относительно подгруппы $\overline{A}_{-\varepsilon_1}$. Предложение 4.2 доказано.

Пусть теперь $x$ и $y$ — фиксированные элементы группы $G^*$, не сопряженные в этой группе. Ввиду предложения 2.1 можно без потери общности предполагать, что элементы $x$ и $y$ циклически приведены. Для построения нормальной $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ такой, что образы $x\rho_{_H}$ и $y\rho_{_H}$ элементов $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G_H^*$, рассмотрим отдельно ряд случаев.

*Случай 1.* Длины элементов $x$ и $y$ различны.

Очевидно, что в силу предложения 2.1 в этом случае искомой будет такая $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа $H$ конечного индекса группы $G$, что в группе $G_H^*$ длина элемента $x\rho_H$ совпадает с длиной в группе $G^*$ элемента $x$ и длина элемента $y\rho_H$ совпадает с длиной элемента $y$. Существование такой подгруппы выводится из предложения 4.1 дословным повторением рассуждений, приведенных в начале доказательства предложения 4.2.

*Случай 2.* $l(x) = l(y) = 0$, т. е. $x$ и $y$ — элементы базовой группы $G$.

Здесь, в свою очередь, придется рассмотреть несколько подслучаев.

*Подслучай 2а.* Хотя бы один из элементов $x$ или $y$ не принадлежит ни одной из связанных подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$.

Пусть, для определенности, элемент $x$ не входит ни в подгруппу $A_{-1}$, ни в подгруппу $A_1$. Так как каждая из этих подгрупп финитно отделима, в группе $G$ найдутся нормальные подгруппы конечного индекса $M$ и $N$ такие, что $x \notin A_{-1}M$ и $x \notin A_1N$. Кроме того, поскольку элементы $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G$, а группа $G$ предполагается финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, существует нормальная подгруппа $L$ конечного индекса группы $G$ такая, что в фактор-группе $G/L$ элементы $xL$ и $yL$ не являются сопряженными.

В соответствии с предложением 3.1 можно выбрать $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую нормальную подгруппу $H$ конечного индекса группы $G$, лежащую в пересечении подгрупп $M$, $N$ и $L$. Так как тогда в фактор-группе $G/H$ элементы $xH$ и $yH$ не сопряжены и элемент $xH$ не входит ни в одну из подгрупп $A_{-1}H/H$ и $A_1H/H$, в силу леммы Коллинза элементы $xH$ и $yH$ не сопряжены в группе $G_H^*$.

Будем считать теперь, что каждый из элементов $x$ или $y$ входит в одну из связанных подгрупп $A_{-1}$ и $A_1$. Поскольку $t^{-1}A_{-1}t = A_1$, можно предполагать без потери общности, что элементы $x$ и $y$ лежат в подгруппе $A_1 = V_0$.

*Подслучай 2b.* Существуют неотрицательные числа $k$ и $l$ такие, что $x \in V_k \setminus V_{k+1}$ и $y \in V_l \setminus V_{l+1}$.

Так как подгруппы $V_{k+1}$ и $V_{l+1}$ финитно отделимы, в группе $G$ найдутся нормальные подгруппы конечного индекса $M$ и $N$ такие, что $x \notin V_{k+1}M$ и $y \notin V_{l+1}N$.

Поскольку, далее, элементы $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G^*$, из предложения 2.5 следует, что $y \neq x\varphi^{-i}$ и $x \neq y\varphi^{-j}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k+1$ и $j = 0, 1, \ldots, l+1$. Так как группа $G$ финитно аппроксимируема, для подходящей нормальной подгруппы $L$ конечного индекса группы $G$ элемент $y$ не сравним с каждым из элементов $x\varphi^{-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k+1)$ и элемент $x$ не сравним с каждым из элементов $y\varphi^{-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, l+1)$ по модулю подгруппы $L$.

Обозначим теперь через $H$ некоторую сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, лежащую в пересечении подгрупп $M$,$N$ и $L$. Тогда в фактор-группе $G/H$ элемент $yH$ не принадлежит подгруппе $\overline{V}_{l+1}$, совпадающей с подгруппой $V_{l+1}^{(H)}$, и отличен от каждого из элементов $(xH)\varphi_H^{-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k+1)$, а элемент $xH$ не принадлежит подгруппе $\overline{V}_{k+1}$, совпадающей с подгруппой $V_{k+1}^{(H)}$, и отличен от каждого из элементов $(yH)\varphi_H^{-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, l+1)$.

Если бы элементы $xH$ и $yH$ оказались сопряженными в группе $G_H^*$, то поскольку они не сопряжены в группе $G/H$ (как ее различные центральные элементы), ввиду предложения 2.5 для некоторого целого числа $s \neq 0$ должно было бы выполняться равенство $xH = (yH)\varphi_H^s$. Меняя, если необходимо, элементы $xH$ и $yH$ местами, без потери общности можем считать, что $s > 0$ и потому область значений отображения $\varphi_H^s$ совпадает с подгруппой $V_{s-1}^{(H)}$. Так как $xH \in V_{s-1}^{(H)}$ и $xH \notin V_{k+1}^{(H)}$, имеем $s-1 \leqslant k$, т. е. $s \leqslant k+1$, что невозможно, поскольку $yH = (xH)\varphi_H^{-s}$. Таким образом, $H$ является искомой подгруппой.

*Подслучай 2c.* Для одного из элементов $x$ и $y$, скажем, для элемента $x$ существует неотрицательное число $k$ такое, что $x \in V_k \setminus V_{k+1}$, а другой элемент $y$ принадлежит подгруппе $V_l$ при любом $l \geqslant 0$.

Выберем подгруппу $M$ как в подслучае 2b, так что $x \notin V_{k+1}M$,

и обозначим через $H$ некоторую сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, лежащую в подгруппе $M$. Тогда в фактор-группе $G/H$ элемент $xH$ не принадлежит подгруппе $V_{k+1}^{(H)}$. Из наших предположений и предложения 3.3 следует существование неотрицательного целого $n$ такого, что $U_n = V_n$. Тогда $U_n^{(H)} = V_n^{(H)}$, и так как для любого $l \geqslant n$ выполнено равенство $V_l^{(H)} = V_n^{(H)}$, имеем $n \geqslant k+1$, так что $xH$ не входит в подгруппу $U_n^{(H)}$. С другой стороны, $yH \in U_n^{(H)}$, и так как ограничение отображения $\varphi_{H}$ на подгруппу $U_n^{(H)}$ является ее автоморфизмом, для любого целого числа $s$ элемент $(yH)\varphi_{H}^{s}$ лежит в этой подгруппе. Таким образом, равенство $xH = (yH)\varphi_{H}^{s}$ невозможно ни при каком целом $s$, и потому в силу предложения 2.5 элементы $xH$ и $yH$ не сопряжены в группе $G_H^*$.

*Подслучай 2d.* Оба элемента $x$ и $y$ принадлежат подгруппе $V_l$ при любом $l \geqslant 0$.

Если снова $n \geqslant 0$ — такое целое число, что $U_n = V_n$, то элементы $x$ и $y$ лежат в подгруппе $U_n$, причем ограничение отображения $\varphi$ на эту подгруппу является ее автоморфизмом. Поскольку элементы $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G^*$, из предложения 2.5 следует, что элемент $x$ не принадлежит подмножеству $Y = \left\{y\varphi^k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ конечно порожденной абелевой группы $U_n$. Поэтому в силу предложения 2.6 существует подгруппа $N$ конечного индекса группы $U_n$ такая, что $x \notin YN$. Так как по предположению подгруппа $N$ финитно отделима в группе $G$, из леммы 2 в доказательстве предложения 3.5 следует существование нормальной подгруппы $M$ конечного индекса группы $G$ такой, что $M \cap U_n = N$ и потому $x \notin YM$. Снова фиксируем некоторую сильно $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу $H$ конечного индекса группы $G$, лежащую в подгруппе $M$. Тогда в фактор-группе $G/H$ выполнено равенство $U_n^{(H)} = V_n^{(H)}$, ограничение отображения $\varphi_{H}$ на подгруппу $U_n^{(H)}$ является ее автоморфизмом и элемент $xH$ не принадлежит подмножеству $\left\{(yH)\varphi_{H}^{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Поэтому в силу предложения 2.5 элементы $xH$ и $yH$ не сопряжены в группе $G_H^*$.

*Случай 3.* $l(x) = l(y) > 0$

В этом случае приведенные записи элементов $x$ и $y$ имеют вид

$$x = t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n \quad \text{и} \quad y = t^{\delta_1} y_1 t^{\delta_2} y_2 \cdots y_{n-1} t^{\delta_n} y_n,$$

где $n \geqslant 1$. Пусть

$$g_i = t^{\delta_i} y_i t^{\delta_{i+1}} y_{i+1} \cdots t^{\delta_n} y_n \cdots t^{\delta_{i-1}} y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— все циклические перестановки элемента $y$. Так как элементы $x$ и $y$ не сопряжены в группе $G^*$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ элементы $x$ и $g_i$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, и потому в соответствии с предложением 4.2 можно выбрать нормальную $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу $H_i$ конечного индекса группы $G$ такая, что в группе $G^*_{H_i}$ элементы $x\rho_{H_i}$ и $g_i\rho_{H_i}$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H_i/H_i$. Кроме того, обозначим через $H_0$ такую нормальную $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, что длина в группе $G^*_H$ элементов $x\rho_{H_0}$ и $y\rho_{H_0}$ совпадает с длиной в группе $G^*$ элементов $x$ и $y$ соответственно, причем элементы $x\rho_{H_0}$ и $y\rho_{H_0}$ являются циклически приведенными. Тогда

$$H = \bigcap_{i=0}^{n} H_i$$

является нормальной $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой подгруппой конечного индекса группы $G$, в группе $G^*_H$ приведенные записи элементов $x\rho_H$ и $y\rho_H$ имеют вид

$$t^{\varepsilon_1}\overline{x_1}t^{\varepsilon_2}\overline{x_2}\cdots\overline{x_{n-1}}t^{\varepsilon_n}\overline{x_n} \quad \text{и} \quad t^{\delta_1}\overline{y_1}t^{\delta_2}\overline{y_2}\cdots\overline{y_{n-1}}t^{\delta_n}\overline{y_n}$$

соответственно (где, как и выше, для $g \in G$ $\overline{g} = gH$), эти элементы циклически приведены и элемент $x\rho_H$ не сопряжен относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H/H$ ни с одним из элементов $g_1\rho_H$, $g_2\rho_H$, $\ldots$, $g_n\rho_H$. Поскольку произвольная циклическая перестановка элемента $y\rho_H$ совпадает, очевидно, с $\rho_H$-образом подходящего элемента $g_i$, из предложения 2.1 следует, что элементы $x\rho_H$ и $y\rho_H$ не сопряжены в группе $G^*_H$. Теорема 1 доказана.

# ГЛАВА II

## Аппроксимационные свойства нисходящих $HNN$-расширений абелевых групп

### § 5. Предварительные замечания. Формулировка результатов

В этой главе рассматривается частный случай конструкции $HNN$-расширения, так называемое нисходящее $HNN$-расширение. $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ группы $G$ с проходной буквой $t$ и связанными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ называется *нисходящим*, если хотя бы одна из связанных подгрупп, скажем $A_{-1}$, совпадает с базовой группой $G$. Таким образом, если $G$ — некоторая группа, $\varphi$ — инъективный эндоморфизм группы $G$ и $B = G\varphi$, то нисходящим $HNN$-расширением группы $G$, соответствующим эндоморфизму $\varphi$, является группа $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$. В этом случае будем также записывать $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$.

В случае нисходящего $HNN$-расширения решение ряда вопросов приобретает более законченный характер, чем в общем случае. Так, в работе [6] замечено, что необходимое условие финитной аппроксимируемости $HNN$-расширения, доставляемое пунктом (1) предложения 3.2 и не являющееся достаточным в общем случае, для нисходящего $HNN$-расширения оказывается необходимым и достаточным: группа $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда пересечение всех ее $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса совпадает с единичной подгруппой. Отсюда легко следует, что каждое нисходящее $HNN$-расширение конечно порожденной абелевой группы $G$ является финитно аппроксимируемой группой. В этой главе будет изучен ряд других аппроксимационных свойств нисходящих $HNN$-расширений абелевых групп с конечным числом порождающих, и начнем мы с рассмотрения финитной отделимости подгрупп.

Пример группы Баумслага – Солитэра $H(1,2) = \langle a, b;\, b^{-1}ab = a^2\rangle$ показывает, что уже нисходящее $HNN$-расширение бесконечной цик-

лической группы может иметь неотделимую циклическую подгруппу. (Элемент $a$ группы $H(1,2)$ не принадлежит подгруппе, порожденной элементом $a^2$, но в каждом конечном гомоморфном образе группы $H(1,2)$ образы элементов $a$ и $a^2$, будучи сопряженными, имеют одинаковые порядки и потому порождают одну и ту же циклическую подгруппу.) Напомним, что группа, все циклические подгруппы которой финитно отделимы, называется $\pi_c$-группой. Первый результат этой главы дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы нисходящее $HNN$-расширение конечно порожденной абелевой группы являлось $\pi_c$-группой.

Пусть $\varphi$ — инъективный эндоморфизм конечно порожденной абелевой группы $G$. Если группа $G$ является свободной абелевой, отображению $\varphi$ обычным способом сопоставляется целочисленная матрица, характеристический многочлен которой называют характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$. В общем же случае периодическая часть $\tau(G)$ группы $G$ содержится в подгруппе $B = G\varphi$, и потому отображение $\varphi$ индуцирует инъективный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ факторгруппы $G/\tau(G)$ (являющейся свободной абелевой группой), и характеристическим многочленом эндоморфизма $\varphi$ будем называть характеристический многочлен эндоморфизма $\overline{\varphi}$. Договоримся также целочисленный унитарный многочлен $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_0$ называть *сверхпримитивным*, если наибольший общий делитель его коэффициентов $c_0, \ldots, c_{k-1}$ равен 1. Упомянутый результат формулируется следующим образом:

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Нисходящее $HNN$-расширение $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$ является $\pi_c$-группой тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.*

Следующим рассматриваемым здесь свойством является финитная аппроксимируемость относительно сопряженности. Будем говорить, что элемент $g \in G$ является сопряженно финитно отделимым,

если для любого элемента $h \in G$, не сопряженного с $g$, найдется такой гомоморфизм $\theta$ группы $G$ на конечную группу $X$, что элементы $g\theta$ и $h\theta$ не сопряжены в группе $X$. Таким образом, группа $G$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый элемент этой группы является сопряженно финитно отделимым. Здесь будет доказана

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — ее подгруппа, $\varphi : G \to B$ — изоморфизм и*

$$G^* = \big(G, t;\, t^{-1}Gt = B, \varphi\big)$$

*— соответствующее нисходящее $HNN$-расширение. Тогда произвольный элемент группы $G^*$, не сопряженный ни с каким элементом из базовой группы $G$, является сопряженно финитно отделимым.*

Для случая, когда определяющий нисходящее $HNN$-расширение эндоморфизм имеет специальный вид, получен результат более законченного характера:

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа конечного ранга $n$ и пусть $\varphi$ — эндоморфизм группы $G$, определяемый в некоторой ее базе $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равенствами*

$$a_i\varphi = a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — ненулевые целые числа. Тогда группа*

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

*финитно аппроксимируема относительно сопряженности.*

Отметим, что теорема 4 является обобщением одного из результатов работы [8], утверждающего, что при любом $k \neq 0$ группа вида $\langle a, b;\ a{-}1ba = b^k\rangle$ (являющаяся нисходящим $HNN$-расширением бесконечной циклической группы) финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Следует также отметить, что в недавней работе Е. В. Соколова [12] с использованием теоремы 3 и некоторых весьма неэлементарных теоретико-числовых результатов, установленных им же, доказано, что любое нисходящее $HNN$-расширение произвольной абелевой группы с конечным числом порождающих является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Теорема 4, разумеется, следует из этого результата; тем не менее, ее доказательство приведено здесь, поскольку оно, в отличие от доказательства Е. В. Соколова, кроме чисто теоретико-групповых методов использует лишь ряд элементарных свойств делимости целых чисел.

## § 6. О финитной отделимости циклических подгрупп нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы

Напомним (см. § 3), что если $G$ — некоторая группа с изоморфными подгруппами $A_{-1}$ и $A_1$ и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм, то подгруппа $H$ группы $G$ называется $(A_{-1}, A_1, \varphi)$-совместимой, если $(A_{-1} \cap H)\varphi = A_1 \cap H$. В случае, когда $\varphi$ является инъективным эндоморфизмом группы $G$, т. е. изоморфизмом группы $G$ на ее подгруппу $B$, то определение $(G, B, \varphi)$-совместимости подгруппы $H$ группы $G$ превращается в требование выполнимости равенства $H\varphi = H \cap B$. В этом случае нам понадобятся и другие характеризации $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$ .

**Предложение 6.1.** *Пусть $G$ — некоторая группа, $B \leqslant G$ и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Для произвольной нормальной подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *подгруппа $H$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой;*
(2) *подгруппа $H$ $\varphi$-допустима (т. е. $H\varphi \subseteq H$) и $G = BH$;*
(3) *подгруппа $H$ $\varphi$-допустима и для любого элемента $g \in G$ из того, что $g\varphi \in H$, следует $g \in H$.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что если нормальная подгруппа $H$ группы $G$ оказывается $\varphi$-допустимой, то отображение $\varphi_H$, переводящее смежный класс $aH$ в смежный класс $(a\varphi)H$, является эндоморфизмом фактор-группы $G/H$ (индуцируемым эндоморфизмом $\varphi$), образ которого совпадает с подгруппой $BH/H$.

Предположим теперь, что $H$ — $(G, B, \varphi)$-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы $G$. Тогда $H$ является, очевидно, $\varphi$-допустимой. Покажем, что индуцированный эндоморфизм $\varphi_H$ фактор-группы $G/H$ инъективен.

В самом деле, если элемент $aH$ фактор-группы $G/H$ лежит в ядре эндоморфизма $\varphi_H$, то $a\varphi \in H$, и потому $a\varphi \in B \cap H$. Так как $H \cap B = H\varphi$, имеем $a\varphi \in H\varphi$, откуда ввиду инъективности отобра-

жения $\varphi$ получаем $a \in H$. Таким образом, ядро эндоморфизма $\varphi_{_H}$ действительно совпадает с единичной подгруппой.

Поскольку произвольный инъективный эндоморфизм конечной группы должен быть сюръективным, отсюда следует, что $BH = G$, и импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Из условия (2) следует, что $\varphi_{_H}$ является сюръективным, а потому и инъективным эндоморфизмом фактор-группы $G/H$. Если теперь для некоторого элемента $g \in G$ имеет место включение $g\varphi \in H$, то элемент $gH$ фактор-группы $G/H$ лежит в ядре эндоморфизма $\varphi_{_H}$, откуда ввиду инъективности этого эндоморфизма следует, что $g \in H$. Таким образом, доказана и импликация (2) $\Rightarrow$ (3).

Докажем, наконец, импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Ввиду $\varphi$-допустимости подгруппы $H$ включение $H\varphi \subseteq B \cap H$ очевидно. Пусть элемент $g \in G$ принадлежит подгруппе $B \cap H$. Тогда $g = x\varphi$ для некоторого элемента $x \in G$, и так как $g \in H$, имеем в силу (3) $x \in H$. Следовательно, $g \in H\varphi$, и равенство $H\varphi = H \cap B$ доказано. Тем самым закончено доказательство предложения 6.1.

Из доказательства предложения 6.1 получаем очевидное

**Следствие.** *Если $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ — нисходящее $HNN$-расширение группы $G$, то для любой $(G, B, \varphi)$-совместимой нормальной подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ отображение $\varphi_{_H}$ является автоморфизмом фактор-группы $G/H$ и потому группа $G^*_H$ является расщепляемым расширением конечной группы $G/H$ при помощи бесконечной циклической группы, порождаемой элементом $t$.*

Пусть $G$ — группа, $H$ — подгруппа группы $G$ и $\{N_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство нормальных подгрупп группы $G$. Будем говорить, что подгруппа $H$ *отделима семейством* $\{N_i\}_{i\in I}$, если

$$\bigcap_{i\in I} HN_i = H.$$

Таким образом, $H$ является финитно отделимой подгруппой группы $G$,

тогда и только тогда, когда она отделима семейством всех нормальных подгрупп конечного индекса этой группы.

Если $A$ — еще одна подгруппа группы $G$, то будем говорить, что подгруппа $H$ *отделима семейством* $\{N_i\}_{i\in I}$ *внутри* $A$, если для любого элемента $a \in A$, не принадлежащего подгруппе $H$, найдется индекс $i \in I$ такой, что $a \notin HN_i$. Ясно, что подгруппа $H$, отделимая семейством $\{N_i\}_{i\in I}$, отделима этим семейством внутри каждой подгруппы группы $G$.

**Предложение 6.2.** *Пусть $G$ — группа и $A$ — бесконечная циклическая подгруппа группы $G$, порожденная элементом $a$. Пусть $\{N_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$, замкнутое относительно конечных пересечений. Тогда все подгруппы группы $G$, лежащие в подгруппе $A$, отделимы внутри $A$ семейством $\{N_i\}_{i\in I}$ тогда и только тогда, когда для любого целого числа $m > 1$ найдется индекс $i \in I$ такой, что порядок элемента $aN_i$ фактор-группы $G/N_i$ делится на $m$.*

Для доказательства предположим сначала, что произвольная подгруппа, лежащая в $A$, отделима внутри $A$ семейством $\{N_i\}_{i\in I}$, и для произвольного целого числа $m > 1$ рассмотрим подгруппу $A^m$, порожденную элементом $a^m$. Так как семейство $\{N_i\}_{i\in I}$ замкнуто относительно конечных пересечений, найдется номер $i \in I$ такой, что все элементы $a, a^2, \ldots, a^{m-1}$ не входят в подгруппу $A^m N_i$. Обозначим через $n$ порядок в фактор-группе $G/N_i$ элемента $aN_i$, и пусть $d = (m, n)$ — наибольший общий делитель чисел $m$ и $n$. Тогда для подходящих целых чисел $x$ и $y$ имеем $d = mx + ny$, и потому

$$a^d = a^{mx+ny} \equiv a^{mx} \pmod{N_i},$$

т. е. $a^d \in A^m N_i$. Из выбора подгруппы $N_i$ теперь следует, что $d = m$, а это и означает, что число $n$ делится на $m$.

Обратно, если элемент $a^x$ не входит в подгруппу $A^m$, и индекс $i \in I$ выбран так, что порядок $n$ элемента $aN_i$ фактор-группы $G/N_i$

делится на $m$, то легко видеть, что $a^x \notin A^m N_i$. В самом деле, если $a^x \equiv a^{my} \pmod{N_i}$ для некоторого целого $y$, то число $x - my$ должно делиться на $n$, а потому и на $m$, что невозможно, так как $x$ на $m$ не делится.

**Предложение 6.3.** (см. [7]) *Пусть $G$ — некоторая группа, $B \leqslant G$ и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$ — нисходящее $HNN$-расширение группы $G$. Каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ финитно отделима тогда и только тогда, когда каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$.*

Из предложения 6.3 следует, что теорема 2, сформулированная выше, равносильна следующему утверждению, которое мы и будем доказывать.

*Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — ее подгруппа и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы $G$ тогда и только тогда, когда все делители характеристического многочлена отображения $\varphi$ сверхпримитивны.*

Справедливость этого утверждения докажем сначала для случая, когда группа $G$ является свободной абелевой.

Пусть $G$ — свободная абелева группа с базой $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Как уже отмечалось выше, произвольному эндоморфизму $\varphi$ группы $G$ сопоставляется целочисленная матрица, $i$-ой строкой которой является последовательность показателей степеней выражения элемента $a_i\varphi$ через элементы базы. Характеристический многочлен этой матрицы (не зависящий от выбора базы группы $G$) будем называть характеристическим многочленом отображения $\varphi$.

Для произвольного целочисленного многочлена

$$f(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_{m-1} x + c_m$$

как обычно определяется его значение $f(\varphi)$ от эндоморфизма $\varphi$: $f(\varphi)$ является эндоморфизмом группы $G$, действие которого на произвольный элемент $g \in G$ задается по правилу

$$gf(\varphi) = (g\varphi^m)^{c_0} \cdot (g\varphi^{m-1})^{c_1} \cdot \dots \cdot (g\varphi)^{c_{m-1}} \cdot g^{c_m}.$$

Многочлен $f(x)$ будем называть *аннулятором* элемента $g$ (относительно эндоморфизма $\varphi$), если $gf(\varphi) = 1$. По теореме Гамильтона – Кэли характеристический многочлен отображения $\varphi$ является аннулятором всех элементов группы $G$, и потому у каждого элемента $g \in G$ имеется аннулятор $h(x)$ наименьшей положительной степени. Легко видеть, что поскольку $G$ без кручения, этот аннулятор можно без потери общности считать примитивным многочленом (напомним, что целочисленный многочлен называется примитивным, если наибольший общий делитель всех его коэффициентов равен 1). Используя далее естественное вложение группы $G$ в линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$, нетрудно понять, что многочлен $h(x)$ является делителем в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x]$ характеристического многочлена отображения $\varphi$, а так как $h(x)$ примитивен, то в действительности делимость имеет место уже в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Поскольку характеристический многочлен отображения $\varphi$ унитарен, то и многочлен $h(x)$ является унитарным.

Таким образом, для любого элемента $g \in G$ существует аннулятор, являющийся унитарным многочленом и имеющий наименьшую степень среди всех ненулевых аннуляторов этого элемента; мы будем называть его *минимальным аннулятором* элемента $g$. Кроме того, легко показать, снова используя вложимость группы $G$ в линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$, что каждый делитель характеристического многочлена отображения $\varphi$ является аннулятором некоторого неединичного элемента группы $G$.

**Предложение 6.4.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ — подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$*

*— изоморфизм. Если каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса, то произвольный унитарный аннулятор любого неединичного элемента группы $G$ сверхпримитивен.*

*Доказательство.* Пусть $a$ — неединичный элемент группы $G$ и пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1x + c_0$ — аннулятор элемента $a$, так что

$$(a\varphi^k) \cdot (a\varphi^{k-1})^{c_{k-1}} \cdot \cdots \cdot (a\varphi)^{c_1} \cdot a^{c_0} = 1.$$

Пусть $d \geqslant 1$ — произвольный общий делитель чисел $c_0$, $c_1$, ... , $c_{k-1}$ и $c_i = dc'_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Для произвольной $(G, B, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ обозначим через $m$ наименьшее положительное число такое, что элемент $a^m$ принадлежит подгруппе $H$. Пусть $t \geqslant 1$ — общий делитель чисел $d$ и $m$ и $d = td_1$, $m = tm_1$. Тогда для любого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ выполнено равенство $c_i m_1 = mc'_i d_1$. Имеем

$$(a\varphi^k)^{m_1} = \left((a\varphi^{k-1})^{c_{k-1}} \cdot \cdots \cdot (a\varphi)^{c_1} \cdot a^{c_0}\right)^{-m_1} = \left((a\varphi^{k-1})^{c'_{k-1}m} \cdot \cdots \cdot (a\varphi)^{c'_1 m} \cdot a^{c_0 m}\right)^{-d_1},$$

так что $(a^{m_1})\varphi^k \in H$, и из предложения 6.1 следует, что элемент $a^{m_1}$ принадлежит подгруппе $H$. Поэтому $t = 1$, так что числа $d$ и $m$ взаимно просты.

Таким образом, для любой $(G, B, \varphi)$-совместимой подгруппы $H$ конечного индекса группы $G$ порядок элемента $a$ по модулю $H$ является числом, взаимно простым с $d$. Применение предложения 6.2 к подгруппе $A$, порожденной элементом $a$, дает теперь $d = 1$, и предложение 6.4 доказано.

**Предложение 6.5.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ — подгруппа группы $G$ и $\varphi : A \to B$*

*— изоморфизм. Произвольная максимальная циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса.*

*Доказательство.* Пусть, как обычно, для положительного целого числа $m$ $G^m$ обозначает подгруппу группы $G$, состоящую из всевозможных элементов вида $g^m$, где $g \in G$. Очевидно, что любая такая подгруппа является $\varphi$-допустимой, а если число $m$ взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то выполнено равенство $G = BG^m$. Таким образом, из предложения 6.1 следует, что если число $m$ взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то подгруппа $G^m$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой.

Предположим теперь, что элемент $a$ группы $G$ порождает максимальную циклическую подгруппу $A$. Тогда в группе $G$ существует такая база $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a = a_1$. Если элемент $g = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ не принадлежит подгруппе $A$, то $k_i \neq 0$ для некоторого номера $i > 1$. Если теперь число $m$ не является делителем $k_i$ и взаимно просто с индексом подгруппы $B$ группы $G$, то подгруппа $G^m$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой и $g \notin AG^m$.

**Предложение 6.6.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ — подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ — минимальный аннулятор элемента $a$ группы $G$. Тогда система элементов $a$, $a\varphi$, ... , $a\varphi^{k-1}$ составляет базу наименьшей $\varphi$-допустимой подгруппы группы $G$, содержащей элемент $a$.*

*Для каждого целого числа $m \geqslant k$ определим, далее, последовательность чисел $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots u_{k-1}^{(m)}$, полагая $u_i^{(k)} = -c_i$ ($i = 0, 1, \ldots, k-1$) и*

$$u_0^{(m+1)} = -c_0 u_{k-1}^{(m)}, \quad u_i^{(m+1)} = u_{i-1}^{(m)} - c_i u_{k-1}^{(m)} \ (i = 1, 2, \ldots, k-1).$$

*Тогда для любого $m \geqslant k$ имеет место равенство*

$$a\varphi^m = a^{u_0^{(m)}} (a\varphi)^{u_1^{(m)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(m)}}.$$

*Доказательство.* Так как

$$a\varphi^k = \left((a\varphi^{k-1})^{c_{k-1}} \cdot \dots \cdot (a\varphi)^{c_1} \cdot a^{c_0}\right)^{-1},$$

подгруппа $H$ группы $G$, порожденная элементами $a$, $a\varphi$, $\dots$, $a\varphi^{k-1}$, является, очевидно $\varphi$-допустимой и содержится в любой $\varphi$-допустимой подгруппе, содержащей элемент $a$. Если

$$a^{r_0}(a\varphi)^{r_1} \cdots (a\varphi^{k-1})^{r_{k-1}} = 1$$

для некоторых целых чисел $r_0$, $r_1$, $\dots$, $r_{k-1}$, то многочлен

$$r_{k-1}x^{k-1} + \cdots + r_1 x + r_0$$

является аннулятором элемента $a$, и так как степень минимального аннулятора этого элемента равна $k$, имеем $r_0 = r_1 = \cdots = r_{k-1} = 0$. Таким образом, система элементов $a$, $a\varphi$, $\dots$, $a\varphi^{k-1}$ является базой подгруппы $H$.

Докажем теперь последнее утверждение предложения 6.6. Так как

$$a\varphi^k = a^{-c_0}(a\varphi)^{-c_1} \cdot (a\varphi^{k-1})^{-c_{k-1}},$$

при $m = k$ оно очевидно. Если для некоторого $m \geqslant k$ оно справедливо, то

$$\begin{aligned}
a\varphi^{m+1} = & \left(a^{u_0^{(m)}}(a\varphi)^{u_1^{(m)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(m)}}\right)\varphi = \\
& (a\varphi)^{u_0^{(m)}}(a\varphi^2)^{u_1^{(m)}} \cdots (a\varphi^k)^{u_{k-1}^{(m)}} = \\
& (a\varphi)^{u_0^{(m)}}(a\varphi^2)^{u_1^{(m)}} \cdots \left(a^{-c_0}(a\varphi)^{-c_1} \cdot (a\varphi^{k-1})^{-c_{k-1}}\right)^{u_{k-1}^{(m)}} = \\
& a^{-c_0 u_{k-1}^{(m)}}(a\varphi)^{u_0^{(m)} - c_1 u_{k-1}^{(m)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-2}^{(m)} - c_{k-1}u_{k-1}^{(m)}} = \\
& a^{u_0^{(m+1)}}(a\varphi)^{u_1^{(m+1)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(m+1)}},
\end{aligned}$$

и предложение 6.6 доказано полностью.

**Предложение 6.7.** *Пусть $G$ — свободная абелева группа с конечным числом порождающих, $B$ — подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Если минимальные аннуляторы всех элементов группы $G$ являются сверхпримитивными многочленами, то каждая циклическая подгруппа группы $G$ отделима семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$.*

*Доказательство.* Ввиду предложения 6.5 достаточно показать, что все подгруппы произвольной максимальной циклической подгруппы $A$ группы $G$ отделимы внутри $A$ семейством всех $(G, B, \varphi)$-совместимых подгрупп конечного индекса группы $G$. Для этого, в свою очередь, в силу предложения 6.2 достаточно для любого целого числа $m \geqslant 1$ построить $(G, B, \varphi)$-совместимую подгруппу конечного индекса группы $G$, по модулю которой порядок порождающего элемента $a$ подгруппы $A$ равен $m$.

Пусть $f(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ — минимальный аннулятор элемента $a$ и пусть $A_\varphi$ обозначает наименьшую $\varphi$-допустимую подгруппу группы $G$, содержащую элемент $a$. Тогда в соответствии с предложением 6.6 система элементов $a$, $a\varphi$, … , $a\varphi^{k-1}$ составляет базу этой подгруппы. Обозначим через $H$ совокупность всех таких элементов $g \in G$, что $g\varphi^s \in A_\varphi^m$ для некоторого $s \geqslant 0$. Очевидно, что $H$ — $\varphi$-допустимая подгруппа группы $G$. Покажем, что порядок элемента $a$ по модулю $H$ равен $m$.

Пусть $a^t \in H$ для некоторого целого числа $t$. Это означает, что для подходящего числа $s \geqslant 0$ элемент $(a\varphi^s)^t$ входит в подгруппу $A_\varphi^m$. Если $0 \leqslant s \leqslant k-1$, то $a\varphi^s$ является элементом базы $a^m$, $(a\varphi)^m$, … , $(a\varphi^{k-1})^m$ подгруппы $A_\varphi^m$ и потому число $t$ делится на $m$. Если же $s \geqslant k$, то ввиду предложения 6.6 выражение элемента $a\varphi^s$ через базу подгруппы $A_\varphi$ имеет вид

$$a\varphi^s = a^{u_0^{(s)}}(a\varphi)^{u_1^{(s)}} \cdots (a\varphi^{k-1})^{u_{k-1}^{(s)}}.$$

Поэтому условие $(a\varphi^s)^t \in A_\varphi^m$ означает, что каждое из чисел

$$u_0^{(s)}t,\ u_1^{(s)}t, \ldots,\ u_{k-1}^{(s)}t$$

должно делиться на $m$. Так как многочлен $f(x)$ сверхпримитивен, непосредственная индукция показывает, что наибольший общий делитель чисел $u_0^{(s)}$, $u_1^{(s)}$, ... , $u_{k-1}^{(s)}$ равен 1. Поэтому число $t$ делится на $m$.

Таким образом, порядок элемента $a$ (а потому и любого элемента вида $a\varphi^s$) по модулю подгруппы $H$ равен $m$. Но эта подгруппа может не иметь конечного индекса в группе $G$. Для устранения этого недостатка рассмотрим фактор-группу $G/H$. Пусть $T/H$ — периодическая часть группы $G/H$; отметим, что все элементы вида $a\varphi^s$ принадлежат подгруппе $T$ группы $G$. Для некоторой подгруппы $S$ группы $G$ имеет место разложение группы $G/H$ в прямое произведение $G/H = S/H \times T/H$. Тогда для произвольного целого числа $k > 0$ имеем

$$(G/H)/(G/H)^k = (S/H)/(S/H)^k \times (T/H)/(T/H)^k,$$

и потому при $k$, равном порядку группы $T/H$, пересечение подгрупп $(G/H)^k$ и $T/H$ группы $G/H$ является единичной подгруппой. Так как $(G/H)^k = G^kH/H$, отсюда следует, что $G^kH \cap T = H$, и потому порядок по модулю подгруппы $G^kH$ произвольного элемента $g \in T$ совпадает с его порядком по модулю подгруппы $H$. Таким образом, подгруппа $G^kH$ является $\varphi$-допустимой, имеет конечный индекс в группе $G$, а порядок по модулю этой подгруппы любого элемента вида $a\varphi^s$ равен $m$.

Обозначим теперь через $M$ совокупность всех таких элементов $g \in G$, что $g\varphi^s \in G^kH$ для некоторого $s \geqslant 0$. Очевидно, что $M$ является $\varphi$-допустимой подгруппой конечного индекса группы $G$, а из предложения 6.1 следует, что эта подгруппа $(G, B, \varphi)$-совместима. Так как для любого элемента $g \in G$ и произвольного целого $n$ из включения $g^n \in M$ следует включение $(g\varphi^s)^n \in G^kH$, порядок элемента $a$ по модулю подгруппы $M$ равен $m$. Предложение 6.7 доказано.

Очевидно теперь, что в случае, когда группа $G$ является свободной абелевой, сформулированное выше утверждение, равносильное

теореме 2, следует из предложений 6.4 и 6.7. Возвращаясь к общей ситуации, когда базовая группа является произвольной абелевой группой с конечным числом порождающих, докажем следующее утверждение, представляющее и определенный самостоятельный интерес.

**Предложение 6.8.** *Пусть $G$ — финитно аппроксимируемая группа и $H$ — конечная нормальная подгруппа группы $G$. Все (все конечно порожденные или все циклические) подгруппы группы $G$ являются финитно отделимыми тогда и только тогда, когда все (соответственно, все конечно порожденные или все циклические) подгруппы фактор-группы $G/H$ финитно отделимы.*

В самом деле, предположим сначала, что все подгруппы одного из указанных в формулировке классов финитно отделимы в группе $G$. Для произвольной подгруппы $X$ фактор-группы $G/H$ можно указать такую подгруппу $A$ группы $G$, что $X = AH/H$, причем $A$ можно считать конечно порожденной или циклической, если соответствующим свойством обладает подгруппа $X$. Если теперь элемент $Hg$ фактор-группы $G/H$ не входит в подгруппу $AH/H$, то элемент $g$ группы $G$ не принадлежит подгруппе $AH$. Поэтому подгруппа $A$ не содержит ни одного элемента вида $gh$, где $h \in H$, и так как семейство таких элементов конечно, найдется нормальная подгруппа $N$ конечного индекса группы $G$ такая, что для любого $h \in H$ элемент $gh$ не принадлежит подгруппе $AN$. Это означает, что $g \notin ANH$, и потому элемент $Hg$ фактор-группы $G/H$ не входит в подгруппу $AH/H \cdot NH/H$, причем $NH/H$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G/H$. Следовательно, подгруппа $X$ финитно отделима.

С другой стороны, поскольку группа $G$ является финитно аппроксимируемой, а ее подгруппа $H$ конечна, найдется нормальная подгруппа $K$ конечного индекса группы $G$ такая, что $K \cap H = 1$. Тогда $K$ вложима в фактор-группу $G/H$ и потому наследует от нее свойство финитной отделимости всех подгрупп соответствующего класса. Так как это свойство наследуется также конечными расширениями, справедливо и обратное утверждение.

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть $G$ — конечно порожденная абелева группа, $B$ — подгруппа группы $G$ и $\varphi : G \to B$ — изоморфизм. Очевидно, что периодическая часть $T$ группы $G$ содержится в подгруппе $B$ и $T\varphi = T$. Следовательно, подгруппа $T$ является $(G, B, \varphi)$-совместимой и инвариантной подгруппой группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}Gt = B, \varphi)$, а потому группа

$$G_T^* = (G/T, t;\ t^{-1}AT/Tt = BT/T, \varphi_{_T})$$

совпадает с фактор-группой $G^*/T$. Из предложения 6.8 теперь следует, что каждая циклическая подгруппа группы $G^*$ является финитно отделимой тогда и только тогда, когда финитно отделима каждая циклическая подгруппа группы $G_T^*$, являющейся $HNN$-расширением свободной абелевой группы $G/T$.

## § 7. О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящего $HNN$-расширения конечно порожденной абелевой группы

Пусть $G$ — некоторая группа, $\varphi$ — инъективный эндоморфизм группы $G$ и $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\rangle$ — нисходящее $HNN$-расширение группы $G$. Следующее утверждение хорошо известно и является простым следствием леммы Бриттона о произвольных $HNN$-расширениях.

**Предложение 7.1.** *Произвольный элемент $u \in G^*$ однозначно представим в виде $u = t^m g t^{-n}$, где $g \in G$ и $m$ и $n$ — неотрицательные целые числа, причем при $m > 0$ и $n > 0$ элемент $g$ не принадлежит подгруппе $G\varphi$.*

**Предложение 7.2.** *Произвольный элемент $u \in G^*$ сопряжен в группе $G^*$ с элементом вида $t^k g$, где $g \in G$ и $k$ — некоторое целое число. Если элементы $u = t^k g$ и $v = t^l h$ (где $g, h \in G$) сопряжены в группе $G^*$, то $k = l$. Элементы $u = t^k g$ и $v = t^k h$, где $k \geqslant 0$, сопряжены в группе $G^*$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента $f \in G$ и некоторых целых чисел $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$ в группе $G$ имеет место равенство $(f\varphi^k)(g\varphi^m)f^{-1} = h\varphi^n$.*

В самом деле, первое утверждение вытекает непосредственно из предложения 7.1, а второе становится очевидным при рассмотрении гомоморфизма группы $G^*$ на бесконечную циклическую группу с порождающим $t$. Элементы $u = t^k g$ и $v = t^k h$ (где $k \geqslant 0$) сопряжены в группе $G^*$, тогда и только тогда, когда $wuw^{-1} = v$ для некоторого $w \in G^*$ . Записывая элемент $w$ в виде $w = t^n f t^{-m}$, где $f \in G$ и $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, перепишем равенство $wuw^{-1} = v$ в виде

$$t^n f t^{-m} \cdot t^k g \cdot t^m f^{-1} t^n = t^k h,$$

которое, в свою очередь, переписывается в виде

$$t^{-k} f t^k \cdot t^{-m} g t^m \cdot f = t^{-n} h t^n.$$

Так как для любого целого числа $l \geqslant 0$ и произвольного элемента $x \in G$ выполнено соотношение $t^{-l}xt^l = x\varphi$, последнее равенство принимает вид $(f\varphi^k)(g\varphi^m)f^{-1} = h\varphi^n$.

Если группа $G$ абелева, то равенство $(f\varphi^k)(g\varphi^m)f^{-1} = h\varphi^n$ из формулировки предложения 7.2 может быть переписано в виде $(f\varphi^k f^{-1})(g\varphi^m) = h\varphi^n$, что подсказывает целесообразность введения следующих понятий.

Пусть $\psi$ — эндоморфизм некоторой группы $X$. Будем говорить, что элементы $x$ и $y$ группы $X$ являются *$\psi$-эквивалентными*, если для некоторых неотрицательных чисел $m$ и $n$ выполнено равенство $x\psi^m = y\psi^n$. Если $Y$ — нормальная $\psi$-допустимая подгруппа группы $X$, то элементы $x$ и $y$ назовем *$\psi$-эквивалентными относительно $Y$*, если для некоторых неотрицательных чисел $m$ и $n$ имеет место сравнение $x\psi^m \equiv y\psi^n \pmod{Y}$. Непосредственно проверяется, что оба отношения действительно являются эквивалентностями.

Для произвольного целого числа $k \geqslant 1$ обозначим через $X_k(\psi)$ множество всех элементов вида $(x\psi^k)x^{-1}$, где $x \in X$. Очевидно, что если группа $X$ абелева, то множество $X_k(\psi)$ является ее подгруппой и притом $\psi$-допустимой. Поэтому эндоморфизм $\psi$ индуцирует эндоморфизм $\overline{\psi}_k$ фактор-группы $\overline{X} = X/X_k(\psi)$, действующий по правилу $(xX_k(\psi))\overline{\psi}_k = (x\psi)X_k(\psi)$. Так как $\overline{\psi}_k^k = 1$, эндоморфизм $\overline{\psi}_k$ является автоморфизмом группы $\overline{X}$. Следовательно, соответствующее нисходящее $HNN$-расширение

$$\overline{X}^* = \left(\overline{X}, t;\ t^{-1}xX_k(\psi)t = (xX_k(\psi))\overline{\psi}_k\ (x \in X)\right)$$

является расщепляемым расширением группы $\overline{X}$ при помощи бесконечной циклической группы с порождающим $t$. В частности, если абелева группа $X$ конечно порождена, группа $\overline{X}^*$ оказывается полициклической и, следовательно (см. [9]), финитно аппроксимируемой относительно сопряженности.

Из предложения 7.2 непосредственно следует

**Предложение 7.3.** *Пусть* $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$ — *нисходящее* $HNN$*-расширение абелевой группы* $G$ *и* $u = t^k g$ *и* $v = t^k h$ — *элементы группы* $G$, $k \geqslant 0$. *Если* $k \geqslant 1$, *то элементы* $u$ *и* $v$ *сопряжены в группе* $G^*$ *тогда и только тогда, когда в группе* $G$ *элементы* $g$ *и* $h$ *являются* $\varphi$*-эквивалентными относительно подгруппы* $G_k(\varphi)$. *Если же* $k = 0$, *то элементы* $u$ *и* $v$ *сопряжены в группе* $G^*$ *тогда и только тогда, когда в группе* $G$ *элементы* $g$ *и* $h$ *являются* $\varphi$*-эквивалентными.*

Докажем теперь теорему 3. Пусть

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

— нисходящее $HNN$-расширение конечно порожденной абелевой группы $G$ и пусть элемент $u$ группы $G^*$ не сопряжен в этой группе ни с одним элементом ее подгруппы $G$. В силу предложения 7.2 можно считать, что этот элемент имеет вид $u = t^k g$ для некоторого целого числа $k$ и элемента $g \in G$, причем из предложения 7.1 следует, что $k \neq 0$. Более того, поскольку элементы $u$ и $u^{-1}$ являются или не являются сопряженно финитно отделимыми одновременно, мы можем считать, что $k > 0$.

Пусть $v$ — произвольный элемент группы $G^*$, не сопряженный с элементом $u$; снова без потери общности можно считать, что $v = t^l h$ для некоторого целого числа $l$ и элемента $h \in G$. Если $k \neq l$, то выбрав целое число $m > 0$ так, чтобы числа $k$ и $l$ оставались различными по модулю $m$, мы видим, что в фактор-группе группы $G^*$ по нормальному замыканию подгруппы $G$ и элемента $t^m$ (являющейся циклической группой порядка $m$) образы элементов $u$ и $v$ различны и потому не сопряжены.

Если $k = l$, то в силу предложения 7.3 элементы $g$ и $h$ не являются $\varphi$-эквивалентными относительно подгруппы $G_k(\varphi)$. Это означает, очевидно, что в группе $\overline{G} = G/G_k(\varphi)$ элементы $gG_k(\varphi)$ и $hG_k(\varphi)$ не являются $\overline{\varphi}_k$-эквивалентными, т. е. не являются $\overline{\varphi}_k$-эквивалентными относительно единичной подгруппы $\overline{G}_k(\overline{\varphi}_k)$. Поэтому ввиду того же

предложения 7.3 элементы $\overline{u} = t^k \cdot gG_k(\varphi)$ и $\overline{v} = t^k \cdot hG_k(\varphi)$ не сопряжены в нисходящем $HNN$-расширении

$$\overline{G}^* = \big(\overline{G}, t;\ t^{-1}xG_k(\varphi)t = (xG_k(\varphi))\overline{\varphi}_k\ (x \in G)\big).$$

Как отмечено выше, группа $\overline{G}^*$ финитно аппроксимируема относительно сопряженности, и поскольку элементы $\overline{u}$ и $\overline{v}$ являются образами элементов $u$ и $v$ при гомоморфизме группы $G^*$ на группу $\overline{G}^*$, продолжающем естественное отображение группы $G$ на фактор-группу $\overline{G}$ и переводящем $t$ в $t$, доказательство теоремы 3 закончено.

Докажем теперь теорему 4.

Пусть $G$ — свободная абелева группа с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и пусть эндоморфизм $\varphi$ группы $G$ определяется отображением

$$a_i \mapsto a_i^{m_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — ненулевые целые числа. Ввиду предложения 7.3 с учетом теоремы 3 и аргументов, использованных при ее доказательстве, для доказательства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi\ (g \in G)\big)$$

достаточно показать, что для любых элементов $g$ и $h$ группы $G$, не являющихся $\varphi$-эквивалентными, существует целое число $k \geqslant 1$ такое, что элементы $g$ и $h$ не являются $\varphi$-эквивалентными относительно подгруппы $G_k(\varphi)$.

Так как при отображении $\varphi$ образ элемента $g = a_1^{r_1}a_2^{r_2}\cdots a_n^{r_n}$ группы $G$ имеет вид $g\varphi = a_1^{m_1r_1}a_2^{m_2r_2}\cdots a_n^{m_nr_n}$, элемент $a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}$ принадлежит подгруппе $G_k(\varphi)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место сравнение $x_i \equiv 0 \pmod{(m^k - 1)}$. (Запись $x \equiv y \pmod{m}$ используется здесь не только, как обычно, для положительных, но и для произвольных целых чисел $m$; поскольку она означает делимость целого числа $x - y$ на число $m$, все основные свойства

сравнений сохраняются.) Следовательно, элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и $h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$ $\varphi$-эквивалентны относительно подгруппы $G_k(\varphi)$ тогда и только тогда, когда существуют целые числа $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ такие, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено сравнение $m_i^p r_i \equiv m_i^q s_i \pmod{(m_i^k - 1)}$. Считая без потери общности, что $p \geqslant q$, и полагая $x = p - q$, мы можем заменить каждое из этих сравнений равносильным ему сравнением вида $m_i^x r_i \equiv s_i \pmod{(m_i^k - 1)}$.

Таким образом, наша задача сводится к доказательству того, что если элементы

$$g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} \quad \text{и} \quad h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$$

группы $G$ не являются $\varphi$-эквивалентными, то для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ система сравнений

$$\begin{cases} m_1^x r_1 \equiv s_1 \pmod{(m_1^k - 1)} \\ m_2^x r_2 \equiv s_2 \pmod{(m_2^k - 1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n^x r_n \equiv s_n \pmod{(m_n^k - 1)} \end{cases} \qquad (*)$$

относительно переменной $x$ не имеет решений.

Докажем сначала следующее простое

**Предложение 6.4.** *В каждом из следующих случаев система* (*) *для некоторого целого числа $k \geqslant 1$ не имеет решений:*

(i) *существует номер $i$ такой, что $m_i = 1$ и $r_i \neq s_i$;*

(ii) *существует номер $i$ такой, что $m_i = -1$ и $r_i \neq \pm s_i$;*

(iii) *существует номер $i$ такой, что или $r_i = 0$ и $s_i \neq 0$, или $r_i \neq 0$ и $s_i = 0$;*

(iv) *существуют номера $i$ и $j$, $i \neq j$, такие, что $m_i = m_j = -1$, $r_i = s_i \neq 0$ и $r_j \neq s_j$;*

(v) *существует номер $i$ такой, что $|m_i| > 1$ и если числа $r_i$ и $s_i$ записаны в виде $r_i = m_i^{\alpha_i} r_i'$ и $s_i = m_i^{\beta_i} s_i'$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$ и $r_i'$ и $s_i'$ не делятся на $m_i$, то $r_i' \neq s_i'$.*

В самом деле, неразрешимость системы $(*)$ в случаях (i) и (ii) очевидна, так как при $m_i = 1$ соответствующее сравнение из этой системы при любом $k \geqslant 1$ является равенством $r_i = s_i$, а при $m_i = -1$ соответствующее сравнение из этой системы при любом четном $k \geqslant 1$ принимает вид $(-1)^x r_i = s_i$.

Предположим, что для некоторого номера $i$ $r_i = 0$ и $s_i \neq 0$. Поскольку тогда $r_i \neq \pm s_i$, ввиду рассмотренных случае (i) и (ii) можем считать, что $|m_i| \geqslant 2$. Тогда при любом $k \geqslant 1$

$$|m_i^k - 1| \geqslant |m_i^k| - 1 \geqslant 2^k - 1,$$

и потому выбрав $k$ так, чтобы $2^k > |s_i| + 1$, будем иметь $|m_i^k - 1| > |s_i|$, что и означает неразрешимость соответствующего сравнения системы $(*)$.

Если для некоторых номеров $i$ и $j$, таких, что $m_i = m_j = -1$, имеют место условия $r_i = s_i \neq 0$ и $r_j \neq s_j$, то поскольку ввиду рассмотренного случая (ii) можно считать, что $r_j = -s_j$, при любом четном $k \geqslant 1$ система $(*)$ содержит неразрешимую подсистему

$$\begin{cases} (-1)^x r_i = r_i \\ (-1)^x r_j = -r_j. \end{cases}$$

Неразрешимость системы $(*)$ в случае (v) вытекает непосредственно из следующего утверждения, доказанного в работе [9]:

**Лемма 1.** *Для любого целого числа $m$, $|m| > 1$, и для произвольных различных целых чисел $r$ и $s$, не делящихся на $m$, существует такое целое число $k \geqslant 1$, что сравнение*

$$m^x r \equiv s \pmod{(m^k - 1)}$$

*относительно переменной $x$ не имеет решений.*

Предложение 6.4 доказано.

Из предложения 6.4 следует, в частности, что рассматривая не являющиеся $\varphi$-эквивалентными элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и

$h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$, мы можем предполагать, что для любого номера $i$ с условием $m_i = 1$ выполнено равенство $r_i = s_i$, а для всех номеров $i$ с условием $m_i = -1$ либо одновременно выполнены равенства $r_i = s_i$, либо одновременно выполнены равенства $r_i = -s_i$. Заменив в последнем случае элемент $h$ элементом $h\varphi$, $\varphi$-эквивалентным элементу $h$, мы можем, следовательно, считать, что для любого номера $i$ с условием $|m_i| = 1$ имеет место равенство $r_i = s_i$. Таким образом, нам остается доказать

**Предложение 6.5.** *Пусть элементы $g = a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ и $h = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}$ группы $G$ не являются $\varphi$-эквивалентными и пусть для каждого номера $i$, для которого $r_i \neq s_i$, выполнено неравенство $|m_i| > 1$, а числа $r_i$ и $s_i$ записываются в виде $r_i = m_i^{\alpha_i} u_i$ и $s_i = m_i^{\beta_i} u_i$ для некоторого целого числа $u_i \neq 0$ и целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$ и $\beta_i \geqslant 0$. Тогда существует такое целое число $k \geqslant 1$, что система $(*)$ не имеет решений.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся некоторые свойства делимости чисел вида $m^k - 1$.

**Лемма 2.** *Для любого целого числа $m$, $|m| > 1$, и любых целых чисел $k > 2$ и $l$ число $m^l - 1$ делится на число $m^k - 1$ тогда и только тогда, когда число $l$ делится на $k$.*

Действительно, достаточность условия следует из известных тождеств для многочленов. Докажем необходимость. Разделим $l$ на $k$ с остатком: $l = kq + r$, где $0 \leqslant r < k$. Тогда, как легко видеть, $m^l - 1 = (m^k - 1)f(m) + (m^r - 1)$ для некоторого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Если число $m^l - 1$ делится на $m^k - 1$, то и число $m^r - 1$ делится на $m^k - 1$, откуда $|m^k - 1| \leqslant |m^r - 1|$. Покажем, что при $r > 0$ из этого неравенства следует, что $k = 2$.

В самом деле, так как $|m^k - 1| \geqslant |m^k| - 1$ и $|m^r - 1| \leqslant |m^r| + 1$, имеем $|m^k| - 1 \leqslant |m^r| + 1$, откуда $|m|^r(|m|^{k-r} - 1) \leqslant 2$. Поскольку $|m| > 1$, $r > 0$ и $k - r > 0$, получаем $|m|^r = 2$ и $|m|^{k-r} - 1 = 1$, откуда $r = 1$ и $k = 2$.

Для произвольного целого числа $k \geqslant 1$ обозначим через $s_k(x)$ многочлен вида $1 + x + \cdots + x^{k-1}$. Так как $x^k - 1 = (x-1)s_k(x)$, для любого целого числа $m \neq 1$ и произвольных целых чисел $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 1$ число $m^l - 1$ делится на $m^k - 1$ тогда и только тогда, когда $s_l(m)$ делится на $s_k(m)$.

**Лемма 3.** *Если простое число $p$ является делителем числа $s_k(m)$, где $k \geqslant 1$, то число $k$ делится или на число $p$, или на некоторый отличный от единицы делитель числа $p-1$.*

В самом деле, если простое число $p$ является делителем числа $s_k(m)$, то имеет место сравнение $m^k \equiv 1 \pmod{p}$. Поскольку по теореме Ферма имеем также $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, обозначив через $d$ наибольший общий делитель чисел $k$ и $p-1$, получаем $m^d \equiv 1 \pmod{p}$. Поэтому если $d = 1$, т. е. $m \equiv 1 \pmod{p}$, то $s_k(m) \equiv k \pmod{p}$, откуда и следует, что $k$ делится на $p$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству предложения 6.5. Предположим сначала, что для некоторых номеров $i$ и $j$ таких, что $r_i \neq s_i$ и $r_j \neq s_j$, числа $\alpha_i - \beta_i$ и $\alpha_j - \beta_j$ различны. Обозначим через $l$ произведение чисел вида $p!$, где $p$ пробегает по всем простым делителям числа $u_i u_j$, и выберем произвольное число $k > 2$, взаимно простое с $l$ и не делящее числа $(\alpha_i - \beta_i) - (\alpha_j - \beta_j)$. Утверждается что для этого $k$ соответствующая подсистема

$$\begin{cases} m_i^{x+\alpha_i} u_i \equiv m_i^{\beta_i} u_i \pmod{(m_i^k - 1)} \\ m_j^{x+\alpha_j} u_j \equiv m_j^{\beta_j} u_j \pmod{(m_j^k - 1)} \end{cases}.$$

системы $(*)$ не имеет решений.

Действительно, эта система равносильна системе вида

$$\begin{cases} (m_i^{x+\delta_i} - 1)u_i \equiv 0 \pmod{(m_i^k - 1)} \\ (m_j^{x+\delta_j} - 1)u_j \equiv 0 \pmod{(m_j^k - 1)}, \end{cases}.$$

где $\delta_i = \alpha_i - \beta_i + k\gamma_i$ и $\delta_j = \alpha_j - \beta_j + k\gamma_j$ для некоторых чисел $\gamma_i$ и $\gamma_j$ таких, что $k\gamma_i \geqslant \beta_i$ и $k\gamma_j \geqslant \beta_j$. Существование решения $\mu$ этой

системы означает, что число $s_{\mu+\delta_i}(m_i)u_i$ должно делиться на $s_k(m_i)$ и число $s_{\mu+\delta_j}(m_j)u_j$ должно делиться на $s_k(m_j)$. С учетом выбора числа $k$ из лемм 3 и 2 следует тогда, что $k$ является общим делителем чисел $\mu+\delta_i$ и $\mu+\delta_j$, откуда, в свою очередь вытекает, что разность $(\alpha_i-\beta_i)-(\alpha_j-\beta_j)$ делится на $k$. Так как это противоречит выбору $k$, неразрешимость системы $(*)$ в этом случае доказана.

Остается рассмотреть случай, когда существует такое число $\delta$, что для всех номеров $i$ и $j$ таких, что $r_i \neq s_i$ имеет место равенство $\alpha_i = \beta_i + \delta$; можно предполагать без потери общности, что $\delta \geqslant 0$. Заметим, что как в случае, когда $\delta$ является четным числом, так и в случае, когда для любого номера $j$ с условием $m_j = -1$ числа $r_j$ и $s_j$ равны 0, выполнено равенство $h\varphi^\delta = g$. Так как элементы $g$ и $h$ предполагались не $\varphi$-эквивалентными, это невозможно, и потому система $(*)$ содержит подсистему

$$\begin{cases} m_i^{x+\beta_i+\delta}u_i \equiv m_i^{\beta_i}u_i \pmod{(m_i^k-1)} \\ m_j^x r_j \equiv r_j \pmod{(m_j^k-1)}, \end{cases}.$$

где $|m_i| > 1$, $m_j = -1$, $r_j \neq 0$ и $\delta$ — нечетное число. При любом четном $k$ второе сравнение этой системы превращается в уравнение $(-1)^x r_j = r_j$, множество решений которого совпадает с множеством неотрицательных четных чисел. Так как первое сравнение при любом $k$ равносильно сравнению $m_i^{x+\delta}u_i \equiv u_i \pmod{(m_i^k-1)}$, нам достаточно указать четное число $k$, при котором сравнение

$$(m_i^{2y+1}-1)u_i \equiv 0 \pmod{(m_i^k-1)}$$

не имеет решений.

Рассмотрим сначала случай, когда число $m_i$ нечетно. Поскольку тогда при любом $y \geqslant$ число $s_{2y+1}(m_i)$ нечетно, показатель максимальной степени числа 2, делящей левую часть этого сравнения, имеет вид $c+d$, где $c$ — показатель максимальной степени числа 2, делящей число $m_i-1$, $d$ — показатель максимальной степени числа 2, делящей число $u_i$. С другой стороны, по теореме Эйлера для любого целого числа

$n \geqslant 0$ имеет место сравнение $m_i^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$, и потому искомым является число $k = 2^n$, где $n \geqslant c + d$.

Предположим, что число $m_i$ четно. Тогда для любого целого числа $n > 0$ числа $m_i^{2^n} - 1$ и $m_i^{2^n} + 1$ взаимно просты, и потому существует целое число $n > 0$ такое, что число $m_i^{2^n} - 1$ обладает простым делителем $p$, не являющимся делителем числа $u_i(m_i - 1)$. Утверждается, что при $k = 2^n$ рассматриваемое сравнение не имеет решений. Действительно, в противном случае имели бы место сравнения

$$m_i^{2^n} \equiv 1 \pmod{p} \qquad \text{и} \qquad m_i^{2y+1} \equiv 1 \pmod{p},$$

откуда следовало бы сравнение $m_i \equiv 1 \pmod{p}$, невозможное в силу выбора $p$. Предложение 6.5 доказано, и вместе с тем закончено доказательство теоремы 4.

## Литература


1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5. Иваново. 2002. С. 3–5.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
4. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. Зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
5. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых $HNN$-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123–133.
6. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 6. С. 842–845.
7. *Молдаванский Д. И.* Об отделимости циклических подгрупп нисходящего $HNN$-расширения групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3. Иваново. 2000. С. 56–58.
8. *Молдаванский Д. И., Кравченко Л. В., Фролова Е. Н.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритм. проблемы теории групп и полугрупп: Межвуз. сб. науч. трудов. Тула: Изд. Тульского гос. пед. ин-та им. Л. Н. Толстого, 1986. С. 81–92.
9. *Ремесленников В. Н.* Сопряженность в полициклических группах // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 712–725.
10. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. ж. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085–1099.
11. *Романовский Н. С.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324–1329.

12. *Соколов Е. В.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Матем. заметки. Т. 78. 2005. Вып. 5. С. 748–762.
13. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.
14. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite $HNN$ extensions // Communs in Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179–194.
15. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193–209.
16. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.
17. *Cohen D.* Residual finiteness and Britton's lemma// J. London Math. Soc.(2). 1977. Vol. 16. P. 232–234.
18. *Dyer J.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extentions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29. № 1. P. 35–51.
19. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3) 1957. Vol. 7. P. 29–62.
20. *Higman G.* A finitely generated group with an isomorphic proper factor group // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 59–61.
21. *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. of Algebra. Vol. 222. 1999. P. 574–594.
22. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105–114.
23. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain $HNN$ extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25–31.
24. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain $HNN$ extensions of conjugacy separable groups // Algebra Colloquium 7:2. 2000. P. 147–158.

Работы автора по теме диссертации

25. *Сенкевич О. Е.* Отделимость циклических подгрупп нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Науч. труды Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3. 2000. С. 81–90.
26. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых нисходящих HNN-расширений // Молодая наука - XXI веку. Тез. докл. межд. науч. конф. Иваново, 19-20 апреля 2001 г. Ч. 6. Иваново: ИвГУ, 2001. С. 66–67.
27. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 21-25 апреля 2003 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 86–87.
28. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. V Международная конференция, Тула, 19-24 мая 2003 года. Тезисы докладов. Тула: ТГПУ, 2003. С. 201–202.
29. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 20-23 апреля 2004 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2004. С. 73–74.
30. *Сенкевич О. Е.* О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности нисходящих HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 2. С. 121–130.
31. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Иванов. гос. ун-т. Иваново, 2005. - Рук. деп. в ВИНИТИ 22.06.2005, № 896-132005. 38 с.