Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2006 С. 133 – 146

О. Е. Сенкевич

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Доказано, что *HNN*-расширение финитно аппроксимируемой относительно сопряженности группы с собственными центральными связанными подгруппами при условии финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп, лежащих в их произведении, является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.

It is proved that *HNN*-extension of conjugacy separable group with proper central associated subgroups under the condition of separability of all finitely generated subgroups belonging to the product of associated subgroups is conjugacy separable group if and only if it is residually finite.

УДК 512.543.

Введение

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой (финитно аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых ее различных (соответственно, не сопряженных) элементов x и y найдется гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, относительно которого образы элементов x и y различны (соответственно, не сопряжены). Напомним также, что подмножество M группы G называется финитно отделимым, если для любого элемента $x \in G$, не принадлежащего подмножеству M, существует такой гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, образ элемента x относительно которого не принадлежит образу подмножества M.

Здесь будут рассмотрены условия, при которых *HNN*-расширение является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Доказательства практически всех известных результатов, относящихся к этому вопросу, основаны на теореме Дж. Дайер [6], утверждающей, что *HNN*-расширение произвольной конечной группы является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. Так, в работе [7] для *HNN*-расширения $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ некоторой группы G со связанными циклическими подгруппами A_{-1} и A_1 в том случае, когда пересечение этих подгрупп тривиально, указан ряд условий, достаточных для финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы G^*. В статье [8] показано, что если группа G является конечно порожденной абелевой и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо $A_{-1} = A_1 = X \times Y$

и на подгруппе X отображение φ действует тождественно, а для любого $y \in Y$ $y\varphi = y^{-1}$, то группа G^* финитно аппроксимируема относительно сопряженности. В работе [9] тех же авторов этот результат обобщен следующим образом: если группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности и все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, подгруппы A_{-1} и A_1 конечно порождены и лежат в центре группы G и либо $A_{-1} \cap A_1 = 1$, либо пересечение $A_{-1} \cap A_1$ имеет конечный индекс в каждой из подгрупп A_{-1} и A_1 и $(A_{-1} \cap A_1)\varphi = A_{-1} \cap A_1$, то группа G^* финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

Условия, накладываемые на группу G и ее подгруппы A_{-1} и A_1 в последнем из приведенных результатов, обеспечивают, в частности, согласно [3] финитную аппроксимируемость группы G^*, и здесь будет показано, что в этом и состоит истинная причина того, что при этих (в действительности, при некоторых более общих) условиях группа G^* оказывается финитно аппроксимируемой относительно сопряженности. А именно целью данной статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Пусть A_{-1} и A_1 — конечно порожденные центральные подгруппы группы G, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$, и пусть $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм группы A_{-1} на группу A_1. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Если группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности, то HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, в том и только в том случае, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

В частности, имеет место очевидное

Следствие. *HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы с собственными связанными подгруппами является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, тогда и только тогда, когда оно является финитно аппроксимируемой группой.*

Аналогичное утверждение имеет место в более общем случае HNN-расширения произвольной полициклической группы с собственными центральными связанными подгруппами.

Критерий финитной аппроксимируемости *HNN*-расширения G^* базовой группы G со связанными подгруппами A_{-1} и A_1, удовлетворяющими условиям теоремы, был установлен в работе [3] в терминах последовательностей $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы G, определенных по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Теорема 1 из [3] утверждает, что группа G^* финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$. В теореме 2 той же работы установлено, что другим необходимым и достаточным условием финитной аппроксимируемости группы G^* является следующее свойство группы G: каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы G содержит некоторую (A_{-1}, A_1, φ)-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса этой группы; определение этого понятия напоминается в § 3 данной статьи, и там же получено некоторое усиление этого критерия. В § 1 статьи напоминаются известные свойства конструкции *HNN*-расширения групп и приводятся некоторые необходимые в дальнейшем дополнительные свойства этой конструкции. Сопряженность элементов *HNN*-расширения описывается леммой Коллинза. В § 2 формулируется расширенный вариант этой леммы и устанавливается вид, принимаемый условиями сопряженности при дополнительном предположении центральности связанных подгрупп.

В статье фактически приводится лишь схема доказательства сформулированной теоремы, доказательства почти всех вспомогательных утверждений ввиду ограниченности объема статьи пришлось опустить. Подробное изложение содержится в депонированной рукописи [4].

§ 1. Предварительные замечания о конструкции *HNN*-расширения групп

Пусть G — некоторая группа, A_{-1} и A_1 — подгруппы группы G и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм группы A_{-1} на группу A_1. *HNN*-расширением (базовой) группы G с проходной буквой t и связанными относительно изоморфизма φ подгруппами A_{-1} и A_1 называется группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$, порождаемая образующими группы G и еще одним элементом t и определяемая всеми соотношениями группы G, а также всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$, где $a \in A_{-1}$. Определения всех относящихся к этой конструкции понятий, таких, как t-редукция, приведенная запись и длина элемента, циклически приведенный элемент и т. д., а также формулировки основных свойств, таких, как леммы Бриттона и Коллинза можно найти в [1]. Из леммы Бриттона без труда вытекает следующее

Предложение 1.1. *Пусть*

$$f = f_0t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m \quad \text{и} \quad g = g_0t^{\delta_1}g_1t^{\delta_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\delta_n}g_n$$

— приведенные записи элементов f и g группы G^*, где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Равенство $f = g$ имеет место в группе G^* тогда и только тогда, когда $m = n$, $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и существует последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ таких, что

$$\begin{aligned} &f_0 = g_0a_0, \\ &f_i = a_{2i-1}^{-1}g_ia_{2i}\ (1 \leqslant i < n), \\ &f_n = a_{2n-1}^{-1}g_n, \end{aligned}$$

причем для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ $a_{2i} \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$, $a_{2i+1} \in A_{\varepsilon_{i+1}}$ и $t^{-\varepsilon_{i+1}}a_{2i}t^{\varepsilon_{i+1}} = a_{2i+1}$.

Изоморфизм φ подгруппы A_{-1} группы G на ее подгруппу A_1 является частичным отображением множества G в себя, и для полноты изложения мы напомним здесь ряд соответствующих понятий и свойств. Прежде всего, напомним (см., напр., [2]), что частичным отображением некоторого множества X в себя называется бинарное отношение ψ на множестве X (т. е. подмножество декартова квадрата $X \times X$) такое, что для любых $x, y, z \in X$ из того, что $(x, y) \in \psi$ и $(x, z) \in \psi$, следует

$y = z$. Областью определения бинарного отношения ψ называется множество $D(\psi) = \{x \in X \mid \exists y \in X\,((x,y) \in \psi)\}$, а областью значений ψ — множество $E(\psi) = \{y \in X \mid \exists x \in X\,((x,y) \in \psi)\}$. Если бинарное отношение ψ является частичным отображением, то для любого $x \in D(\psi)$ существует единственный $y \in E(\psi)$ такой, что $(x,y) \in \psi$; элемент y называют образом элемента x относительно отображения ψ и вместо $(x,y) \in \psi$ записывают $y = x\psi$.

Напомним далее, что произведением двух бинарных отношений ψ и ξ называется отношение $\psi\xi = \{(x,y) \mid \exists z\,((x,z) \in \psi \wedge (z,y) \in \xi)\}$. Легко видеть, что произведение двух частичных отображений ψ и ξ снова является частичным отображением, а из определения произведения вытекает, что $D(\psi\xi) = \{x \in D(\psi) \mid x\psi \in D(\xi)\}$. Так как умножение бинарных отношений ассоциативно, мы можем ввести степень отображения ψ с положительным целым показателем, полагая, как обычно, для произвольного целого числа $k > 0$ отображение ψ^k равным произведению k сомножителей, равных ψ. Удобно считать также ψ^0 равным тождественному отображению множества X. Очевидно тогда, что для любых неотрицательных целых чисел m и n имеем $D(\psi^{m+n}) = \{x \in D(\psi^m) \mid x\psi^m \in D(\psi^n)\}$ и для любого $a \in D(\psi^{m+n})$ имеет место равенство $a\psi^{m+n} = (a\psi^m)\psi^n$.

Если бинарное отношение ψ является инъективным частичным отображением (т. е. для любых $x, y \in D(\psi)$ из $x\psi = y\psi$ следует $x = y$), то обратное отношение $\psi^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in \psi\}$ также является частичным отображением, и его называют обратным к отображению ψ, а отображение ψ в этом случае называют обратимым; очевидно, что $D(\psi^{-1}) = E(\psi)$, $E(\psi^{-1}) = D(\psi)$, $\psi\psi^{-1}$ является тождественным отображением множества $D(\psi)$ и $\psi^{-1}\psi$ является тождественным отображением множества $E(\psi)$.

Если частичное отображение ψ обратимо, то, полагая для целого числа $k < 0$ $\psi^k = (\psi^{-1})^{-k}$, мы можем говорить о степени отображения ψ с произвольным целым показателем. Из соотношения $(\psi\xi)^{-1} = \xi^{-1}\psi^{-1}$, справедливого (и легко проверяемого) для любых бинарных отношений ψ и ξ, следует, что если частичное отображение ψ обратимо, то для произвольного целого числа k отображения ψ^k и ψ^{-k} взаимно обратны.

Если ψ — по-прежнему частичное отображение множества X в себя, то образом относительно ψ произвольного подмножества Y области определения $D(\psi)$ отображения ψ называется множество

$$Y\psi = \{y\psi \mid y \in Y\}.$$

Условимся также (из соображений удобства записей) говорить и об образе $Y\psi$ любого подмножества Y множества X, полагая $Y\psi = (D(\psi) \cap Y)\psi$.

Вернемся к изоморфизму φ подгруппы A_{-1} группы G на ее подгруппу A_1. Нашей целью является выражение для произвольного целого числа $k \neq 0$ области определения $D(\varphi^k)$ отображения φ^k в терминах последовательностей $U_0, U_1, \ldots$ и $V_0, V_1, \ldots$ подгрупп группы G, упоминавшихся выше: $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$.

Предложение 1.2. *Для любого целого числа $n \geqslant 0$ в группе G выполнено равенство $A_{-1} \cap V_n = U_{n+1}$.*

Предложение 1.3. *Для любого целого числа* $k \geqslant 1$

(i) $D(\varphi^k) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$ *и* $E(\varphi^k) = V_{k-1}$*;*

(ii) $D(\varphi^{-k}) = V_{k-1}$ *и* $E(\varphi^{-k}) = U_{k-1}\varphi^{-(k-1)}$*.*

В следующих утверждениях наряду с группой G рассматривается и ее *HNN*-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$.

Предложение 1.4. *Для любого элемента* a *группы* G *и для любого целого числа* n *элемент* $t^{-n}at^n$ *группы* G^* *принадлежит подгруппе* G *тогда и только тогда, когда* $a \in D(\varphi^n)$*. Если* $a \in D(\varphi^n)$*, то в группе* G^* *выполнено равенство* $t^{-n}at^n = a\varphi^n$*.*

Предложение 1.5. *Для любого целого числа* $n \geqslant 0$ *в группе* G^* *выполнены равенства*

(i) $t^{-n}A_1t^n \cap A_{-1} = U_{n+1}$*,*

(ii) $t^{-n}A_1t^n \cap A_1 = V_n$*,*

(iii) $t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_{-1} = U_n$*.*

Кроме того, при $n \geqslant 1$ *справедливо равенство* $t^{-n}A_{-1}t^n \cap A_1 = V_{n-1}$*.*

Предложение 1.6. *Для любых целых чисел* $m \geqslant 0$ *и* $k \geqslant 0$ *в группе* G *выполнены равенства*

(i) $A_{-1} \cap U_m\varphi^k = U_{m+k}$*,*

(ii) $A_{-1} \cap V_m\varphi^k = U_{m+k+1}$*,*

(iii) $$A_1 \cap U_m\varphi^k = \begin{cases} U_m\varphi^k, & \text{если } k \geqslant 1, \\ U_m, & \text{если } k = 0 \text{ и } m \geqslant 1, \\ U_1, & \text{если } k = 0 \text{ и } m = 0, \end{cases}$$

(iv) $A_1 \cap V_m\varphi^k = V_m\varphi^k$*.*

Для любых целых чисел $m \geqslant 0$ *и* $k \geqslant 1$ *в группе* G *выполнены равенства*

(v) $A_{-1} \cap U_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-k}$*,*

(vi) $A_{-1} \cap V_m\varphi^{-k} = U_m\varphi^{-(k-1)}$*,*

(vii) $$A_1 \cap U_m\varphi^{-k} = \begin{cases} U_{k+1}\varphi^{-k}, & \text{если } 0 \leqslant m \leqslant k, \\ U_m\varphi^{-k}, & \text{если } m > k, \end{cases}$$

(viii) $$A_1 \cap V_m\varphi^{-k} = \begin{cases} U_k\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } 0 \leqslant m \leqslant k-1, \\ U_m\varphi^{-(k-1)}, & \text{если } m > k-1. \end{cases}$$

Предложение 1.7. *Для любых неотрицательных целых чисел* m *и* k *в группе* G *выполнены равенства* $U_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k}\varphi^{-k}$ *и* $V_m \cap U_k\varphi^{-k} = U_{m+k+1}\varphi^{-k}$*.*

§ 2. Сопряженность элементов *HNN*-расширения

В этом параграфе рассматривается отношение сопряженности в *HNN*-расширении $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ группы G. Условия сопряженности элементов группы G^* содержатся в так называемой лемме Коллинза (см., напр., [1, с. 254]). Тем не менее нам понадобится более детальное, чем в обычно приводимых формулировках леммы Коллинза, описание этих условий.

Предложение 2.1. *Пусть* $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$ *— HNN-расширение группы* G *с проходной буквой* t *и связанными подгруппами* A_{-1} *и* A_1. *Произвольный элемент* $g \in G^*$ *сопряжен в группе* G^* *с некоторым циклически приведенным элементом. Более того, если элемент* g *не сопряжен ни с каким элементом из подгруппы* G, *то он сопряжен с циклически приведенным элементом вида* $t^{\varepsilon_1}g_1t^{\varepsilon_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\varepsilon_n}g_n$. *Пусть* f *и* g *— циклически приведенные элементы группы* G^*.

(i) *Если хотя бы один из элементов* f *или* g *принадлежит подгруппе* G, *то эти элементы сопряжены в группе* G^* *тогда и только тогда, когда и другой содержится в* G, *и если они не сопряжены в группе* G, *то существует последовательность чисел* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, *равных* ± 1, *и существуют две последовательности*

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \quad и \quad y_0, y_1, \ldots, y_{2n+1}$$

элементов группы G *(где* $n \geqslant 1$*) такие, что* $y_0 = f$, $y_{2n+1} = g$, *для каждого* $i = 0, 1, \ldots, n$ *выполнено равенство* $x_i^{-1}y_{2i}x_i = y_{2i+1}$ *и для любого* $i = 1, 2, \ldots, n$ $y_{2i-1} \in A_{-\varepsilon_i}$, $y_{2i} \in A_{\varepsilon_i}$ *и* $t^{-\varepsilon_i}y_{2i-1}t^{\varepsilon_i} = y_{2i}$.

В частности, если хотя бы один из элементов f *или* g *принадлежит подгруппе* G *и не сопряжен в* G *ни с одним элементом из связанных подгрупп* A_{-1} *и* A_1, *то эти элементы сопряжены в группе* G^* *тогда и только тогда, когда и другой содержится в* G *и они сопряжены в группе* G.

(ii) *Если приведенные записи элементов* f *и* g *имеют вид*

$$f = t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m \quad и \quad g = t^{\delta_1}g_1t^{\delta_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\delta_n}g_n,$$

где $m \geqslant 1$ *и* $n \geqslant 1$, *то эти элементы сопряжены в группе* G^* *тогда и только тогда, когда элемент* f *сопряжен относительно подгруппы* $A_{-\varepsilon_1}$ *с некоторой циклической перестановкой*

$$t^{\delta_i}g_it^{\delta_{i+1}}g_{i+1}\cdots t^{\delta_n}g_n\cdots t^{\delta_{i-1}}g_{i-1}$$

(где $i = 1, 2, \ldots, n$*) элемента* g.

Доказательство этого утверждения совершенно элементарно в том смысле, что использует лишь понятие приведенной записи элементов и лемму Бриттона. Дополним его следующим необходимым условием выполнимости утверждения из пункта (ii), непосредственно вытекающим из предложения 1.1:

Предложение 2.2. *Пусть*

$$f = t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m \quad и \quad g = t^{\delta_1}g_1t^{\delta_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\delta_n}g_n$$

— приведенные записи элементов f *и* g *группы* G^*, *где* $m \geqslant 1$ *и* $n \geqslant 1$. *Если элементы* f *и* g *сопряжены относительно подгруппы* $A_{-\varepsilon_1}$, *то* $m = n$, $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$ *элементы* f_i *и* g_i *лежат в одном и том же классе по двойному модулю* $\big(A_{\varepsilon_i}, A_{-\varepsilon_{i+1}}\big)$ *(где* $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1$*).*

Покажем далее, что при дополнительном предположении о том, что подгруппы A_{-1} и A_1 лежат в центре группы G, условия сопряженности элементов группы $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1,\, \varphi\big)$ принимают более простой вид. Начнем с формулировки следующего утверждения:

Предложение 2.3. *Пусть* $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ *— приведенная запись элемента* $x \in G^*$, *причем* $n \geqslant 1$. *Полагая для каждого* $k = 1, 2, \ldots, n$ $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$, *введем следующие обозначения:*

$$\alpha = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k, \quad \beta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k \quad \text{и} \quad W(x) = D(\varphi^{\alpha}) \cap D(\varphi^{\beta}).$$

Если подгруппы A_{-1} *и* A_1 *принадлежат центру группы* G, *то*

$$x^{-1} G x \cap G = x^{-1} W(x) x,$$

подгруппа $W(x)$ *содержится в подгруппе* $A_{-\varepsilon_1}$, *подгруппа* $x^{-1}W(x)x$ *содержится в подгруппе* A_{ε_n} *и для любого* $a \in W(x)$ *имеет место равенство* $x^{-1} a x = t^{-\sigma_n} a t^{\sigma_n}$.

Нам понадобится также явное выражение для подгруппы $W(x)$.

Предложение 2.4. *В обозначениях и предположениях формулировки предложения 2.3*

$$W(x) = \begin{cases} D(\varphi^{\beta}), & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ D(\varphi^{\alpha}), & \text{если } \beta \leqslant 0, \\ U_{\beta-\alpha-1}\varphi^{-(\beta-1)}, & \text{если } \alpha < 0 \text{ и } \beta > 0. \end{cases}$$

Действительно, если $\alpha \geqslant 0$, то $D(\varphi^{\beta}) \subseteq D(\varphi^{\alpha})$, а если $\beta \leqslant 0$, то $D(\varphi^{\alpha}) \subseteq D(\varphi^{\beta})$. Если же $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, то в силу предложения 1.3

$$W(x) = V_{-\alpha-1} \cap U_{\beta-1}\varphi^{-(\beta-1)},$$

и остается воспользоваться предложением 1.7.

В предположении центральности подгрупп A_{-1} и A_1 пункт (i) предложения 2.1 может быть уточнен следующим образом:

Предложение 2.5. *Пусть* A_{-1} *и* A_1 *— центральные подгруппы группы* G. *Если элементы* f *и* g *группы* G *не сопряжены в этой группе, то* f *и* g *сопряжены в группе* $G^* = \big(G, t;\, t^{-1}A_{-1}t = A_1,\, \varphi\big)$ *тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа* $k \neq 0$ *элемент* f *принадлежит области определения* $D(\varphi^k)$ *отображения* φ^k *и* $g = f\varphi^k$.

В самом деле, если $f \in D(\varphi^k)$ и $g = f\varphi^k$, то в силу предложения 1.5 $g = t^{-k} f t^k$. Обратно, пусть $g = x^{-1} f x$ для некоторого $x \in G^*$. Если элементы f и g не сопряжены в группе G, то $l(x) > 0$, и т. к. $x^{-1} f x \in x^{-1} G x \cap G$, из предложения 2.3 следует, что $f \in W(x)$. Более того, если k — сумма показателей степеней у t в приведенной записи элемента x, то $f \in D(\varphi^k)$ и $x^{-1} f x = t^{-k} f t^k$. Теперь из предложения 1.4 следует, что $g = f\varphi^k$.

Предложение 2.5 говорит о том, что в данной ситуации финитная аппроксимируемость относительно сопряженности группы G зависит от финитной отделимости в G любого множества, состоящего из элементов вида $g\varphi^k$, где g — фиксированный элемент группы G и k — произвольное целое число такое, что $g \in D(\varphi^k)$. В связи с этим нам понадобится следующее

Предложение 2.6. *Пусть A — конечно порожденная абелева группа и φ — автоморфизм группы A. Тогда для любого элемента $a \in A$ множество $\{a\varphi^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ финитно отделимо в A.*

Для более детального описания ситуации в пункте (ii) предложения 2.1 введем еще одну подгруппу, связанную с элементом x положительной длины.

Пусть снова $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, причем $n \geqslant 1$. Пусть $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ (т. е. $\sigma(x)$ совпадает с σ_n из предложения 2.3). Рассмотрим множество

$$K(x) = \{(a\varphi^{\sigma(x)})^{-1} a \mid a \in W(x)\}.$$

Если подгруппы A_{-1} и A_1 принадлежат центру группы G, то произведение $K = A_{-1}A_1$ является абелевой подгруппой группы G, и поскольку для любого $a \in W(x)$ элементы a и $a\varphi^{\sigma(x)}$ лежат в K, множество $K(x)$ является подгруппой группы G.

Предложение 2.7. *Пусть A_{-1} и A_1 — центральные подгруппы группы G и пусть $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$ — приведенная запись элемента $x \in G^*$, где $n \geqslant 1$. Если в группе G^* элемент x сопряжен относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ с элементом $y \in G^*$, то пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ непусто.*

Обратно, пусть пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и $A_{-\varepsilon_1}$ непусто, т. е. $x^{-1}ay = b$ для некоторых элементов a и b из подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$. Тогда элементы x и y сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$ в том и только в том случае, когда элементы a и b сравнимы по модулю подгруппы $K(x)$.

В связи с предложением 2.7 нам потребуются некоторые условия непустоты пересечения множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и A_ε.

Предложение 2.8. *Пусть A_{-1} и A_1 — центральные подгруппы группы G и пусть*

$$x = t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n \quad \text{и} \quad y = t^{\delta_1} y_1 t^{\delta_2} y_2 \cdots y_{m-1} t^{\delta_m} y_m$$

— приведенные записи элементов x и y группы G^*, где $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$. Если для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и A_ε непусто, то

(i) *$m = n$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнены равенства $\varepsilon_i = \delta_i$ и $y_i = x_i c_i d_i$ для подходящих элементов $c_i \in A_{\varepsilon_i}$ и $d_i \in A_{-\varepsilon_{i+1}}$ (где $\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon$);*

(ii) *для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ пересечение $(x^{(k)})^{-1}A_{-\varepsilon_1}y^{(k)}$ и $A_{-\varepsilon_{k+1}}$ непусто, где $x^{(k)} = t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots x_{k-1} t^{\varepsilon_k} x_k$ и аналогично $y^{(k)} = t^{\varepsilon_1} y_1 t^{\varepsilon_2} y_2 \cdots y_{k-1} t^{\varepsilon_k} y_k$;*

(iii) *пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и A_ε совпадает со смежным классом $(x^{-1}W(x)x \cap A_\varepsilon)b$ группы A_ε по ее подгруппе $x^{-1}W(x)x \cap A_\varepsilon$, где b — произвольный элемент пересечения $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y \cap A_\varepsilon$.*

Заметим вдобавок, что если элементы x и y удовлетворяют условиям из пункта (i) предложения 2.7 и $n = 1$, то пересечение множеств $x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y$ и A_ε непусто. Действительно, поскольку

$$x^{-1}A_{-\varepsilon_1}y = x_1^{-1}t^{-\varepsilon_1}A_{-\varepsilon_1}t^{-\varepsilon_1}y_1 = x_1^{-1}A_{\varepsilon_1}x_1c_1d_1 = A_{\varepsilon_1}c_1d_1 = A_{\varepsilon_1}d_1,$$

это пересечение содержит элемент d_1.

§ 3. О финитной аппроксимируемости *HNN*-расширения

Стандартная методика изучения условий финитной аппроксимируемости *HNN*-расширений групп основана на использовании понятия совместимой подгруппы, аналогичного введенному Г. Баумслагом [5] понятию пары совместимых подгрупп свободных сомножителей свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами.

Напомним, что если G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A_{-1} и A_1 и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм, то подгруппа H группы G называется (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой, если $(A_{-1} \cap H)\varphi = A_1 \cap H$. Легко видеть, что если H — нормальная (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение

$$\varphi_{_H} : A_{-1}H/H \to A_1H/H,$$

(корректно) определяемое правилом $(aH)\varphi_{_H} = (a\varphi)H$ (где $a \in A_{-1}$), является изоморфизмом подгруппы $A_{-1}H/H$ фактор-группы G/H на ее подгруппу A_1H/H. Поэтому наряду с *HNN*-расширением

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

группы G можно построить *HNN*-расширение

$$G^*_H = \big(G/H, t;\ t^{-1}A_{-1}H/H\, t = A_1H/H,\ \varphi_{_H}\big)$$

группы G/H. Очевидно, что естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_{_H}$ группы G^* на группу G^*_H (переводящего t в t).

Легко видеть также, что если N — произвольная нормальная подгруппа (конечного индекса) группы G^*, то подгруппа $H = G \cap N$ является (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой нормальной подгруппой (конечного индекса) группы G. Отсюда следует хорошо известное утверждение о том, что если группа G^* финитно аппроксимируема, то пересечение всех (A_{-1}, A_1, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G должно совпадать с единичной подгруппой (так что группа G должна обладать значительным запасом (A_{-1}, A_1, φ)-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса).

Заметим также, что в силу результата Дайер [6], утверждающего, что *HNN*-расширение конечной группы G является группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, для доказательства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности группы

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

достаточно для любых двух элементов x и y группы G^*, не сопряженных в этой группе, указать нормальную (A_{-1}, A_1, φ)-совместимую подгруппу H конечного индекса группы G такую, что образы $x\rho_{_H}$ и $y\rho_{_H}$ элементов x и y не сопряжены в группе G^*_H.

Как уже упоминалось выше, условия финитной аппроксимируемости *HNN*-расширения

$$G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1, \varphi\big)$$

при некоторых дополнительных предположениях о базовой группе G и связанных подгруппах A_{-1} и A_1, включающих центральность этих подгрупп, рассматривались в работе [3]. Основные результаты этой работы (теоремы 1 и 2) могут быть сформулированы следующим образом:

Предложение 3.1. *Пусть A_{-1} и A_1 — конечно порожденные центральные подгруппы группы G, причем $A_{-1} \neq G$ и $A_1 \neq G$. Пусть последовательности $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ подгрупп группы G определены по правилу $U_0 = A_{-1}$, $V_0 = A_1$ и $U_{k+1} = U_k \cap V_k$, $V_{k+1} = U_{k+1}\varphi$. Предположим также, что в группе G все подгруппы, лежащие в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделимы. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\big)$ является финитно аппроксимируемой;*

(ii) *для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ имеет место равенство $U_n = V_n$;*

(iii) *в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится некоторая (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса этой группы.*

Нам потребуется здесь некоторое усиление утверждения пункта (iii) из формулировки предложения 3.1.

(A_{-1}, A_1, φ)-совместимую нормальную подгруппу H группы G назовем *сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой*, если для любого целого числа $k \geqslant 0$

$$U_kH/H \,\cap\, V_kH/H = (U_k \cap V_k)H/H.$$

Заметим тут же, что поскольку это равенство равносильно равенству $U_kH \cap V_kH = (U_k \cap V_k)H$, правая часть которого всегда содержится в левой части, (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа H группы G является сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой тогда и только тогда, когда любого целого числа $k \geqslant 0$ справедливо включение $U_kH \cap V_kH \subseteq (U_k \cap V_k)H$.

Значение понятия сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой подгруппы проясняется следующими замечаниями.

Пусть H — (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа группы G. Договоримся для произвольной подгруппы $X \leqslant G$ через $\overline{X}$ обозначать подгруппу XH/H фактор-группы G/H. Построим в фактор-группе G/H последовательности подгрупп $\big(U_k^{(H)}\big)$ и $\big(V_k^{(H)}\big)$, аналогичные построенным выше последовательностям подгрупп $\big(U_k\big)$ и $\big(V_k\big)$ группы G, т. е.

$$U_0^{(H)} = \overline{A_{-1}},\ V_0^{(H)} = \overline{A_1} \quad \text{и} \quad U_{k+1}^{(H)} = U_k^{(H)} \cap V_k^{(H)},\ V_{k+1}^{(H)} = U_{k+1}^{(H)}\varphi_{_H}.$$

Непосредственно из определения отображения $\varphi_{_H}$ легко следует, что для любой подгруппы X группы G и любого целого числа k из включения $X \leqslant D(\varphi^k)$ следуют включение $\overline{X} \leqslant D(\varphi_{_H}^k)$ и справедливость равенства $\overline{X}\varphi_{_H}^k = \overline{X\varphi^k}$. Если поэтому подгруппа H является сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой, то очевидная индукция показывает, что для любого $k \geqslant 0$

имеют место равенства $U_k^{(H)} = \overline{U}_k$ и $V_k^{(H)} = \overline{V}_k$. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы G на ее фактор-группу G/H по сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой подгруппе H члены последовательностей $\bigl(U_k\bigr)$ и $\bigl(V_k\bigr)$ переходят в соответствующие члены аналогичных последовательностей группы G/H, построенных по подгруппам $\overline{A}_{-1}$ и $\overline{A}_1$ и изоморфизму $\varphi_{_H}$. Отсюда с использованием предложения 1.3 получаем, в частности,

Предложение 3.2. *Пусть φ — изоморфизм подгруппы A_{-1} группы G на ее подгруппу A_1 и пусть H — сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа группы G. Тогда для любых целых чисел m и l, где $m \geqslant 0$, выполнено равенство $U_m^{(H)}\varphi_{_H}^l = \overline{U_m\varphi^l}$ и для любого целого числа k выполнено равенство $D(\varphi_{_H}^k) = \overline{D(\varphi^k)}$.*

Упомянутое выше усиление утверждения (iii) из предложения 3.1 формулируется следующим образом:

Предложение 3.3. *Пусть группа G и ее подгруппы A_{-1} и A_1 удовлетворяют условиям предложения 2.1. Тогда если для некоторого целого числа $n \geqslant 0$ выполнено равенство $U_n = V_n$, то в каждой нормальной подгруппе конечного индекса группы G содержится некоторая сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа конечного индекса этой группы.*

§ 4. Доказательство теоремы

Пусть G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A_{-1} и A_1 и $\varphi : A_{-1} \to A_1$ — изоморфизм подгруппы A_{-1} на подгруппу A_1. Всюду ниже предполагается, что

(i) группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности;

(ii) подгруппы A_{-1} и A_1 конечно порождены, отличны от группы G и содержатся в центре этой группы;

(iii) произвольная подгруппа группы G, лежащая в подгруппе $K = A_{-1}A_1$, финитно отделима в G;

(iv) группа $G^* = \bigl(G, t;\ t^{-1}A_{-1}t = A_1,\ \varphi\bigr)$ является финитно аппроксимируемой.

Покажем, что тогда группа G^* финитно аппроксимируема относительно сопряженности. Как отмечено в § 3, для этого достаточно для любых двух элементов x и y группы G^*, не сопряженных в этой группе, указать нормальную (A_{-1}, A_1, φ)-совместимую подгруппу H конечного индекса группы G такую, что образы $x\rho_{_H}$ и $y\rho_{_H}$ элементов x и y не сопряжены в группе G_H^*.

Начнем с формулировки двух вспомогательных утверждений о группе G^*, непосредственно вытекающих из сформулированных предположений.

Предложение 4.1. *Для любого элемента x группы G^* существует нормальная (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа H конечного индекса группы G такая, что длина в группе G_H^* элемента $x\rho_{_H}$ совпадает с длиной в группе G^* элемента x. Если элемент x является циклически приведенным, то подгруппа H может быть выбрана так, чтобы вдобавок элемент $x\rho_{_H}$ был циклически приведенным.*

Предложение 4.2. *Пусть*

$$x = t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots x_{n-1}t^{\varepsilon_n}x_n \quad и \quad y = t^{\delta_1}y_1t^{\delta_2}y_2\cdots y_{m-1}t^{\delta_m}y_m$$

— приведенные записи элементов x и y группы G^*, где $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$. Если в группе G^* элементы x и y не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}$, то существует нормальная (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая подгруппа H конечного индекса группы G такая, что в группе G_H^* элементы $x\rho_H$ и $y\rho_H$ не сопряжены относительно подгруппы $A_{-\varepsilon_1}H/H$.

Доказательство предложения 4.1 совершенно стандартно; доказательство предложения 4.2 использует предложение 4.1 и результаты § 2.

Пусть теперь x и y — фиксированные элементы группы G^*, не сопряженные в этой группе. Ввиду предложения 2.1 можно без потери общности предполагать, что элементы x и y циклически приведены. Для построения нормальной (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой подгруппы H конечного индекса группы G такой, что образы $x\rho_H$ и $y\rho_H$ элементов x и y не сопряжены в группе G_H^*, рассмотрим отдельно ряд случаев.

Случай 1. Длины элементов x и y различны.

Очевидно, что в силу предложения 2.1 в этом случае искомой будет такая (A_{-1}, A_1, φ)-совместимая нормальная подгруппа H конечного индекса группы G, что в группе G_H^* длина элемента $x\rho_H$ совпадает с длиной в группе G^* элемента x и длина элемента $y\rho_H$ совпадает с длиной элемента y. Существование такой подгруппы выводится непосредственно из предложения 4.1.

Случай 2. $l(x) = l(y) = 0$, т. е. x и y — элементы базовой группы G.

Здесь, в свою очередь, придется рассмотреть несколько подслучаев.

Подслучай 2a. Хотя бы один из элементов x или y не принадлежит ни одной из связанных подгрупп A_{-1} и A_1.

Пусть для определенности элемент x не входит ни в подгруппу A_{-1}, ни в подгруппу A_1. Так как каждая из этих подгрупп финитно отделима, в группе G найдутся нормальные подгруппы конечного индекса M и N такие, что $x \notin A_{-1}M$ и $x \notin A_1N$. Кроме того, поскольку элементы x и y не сопряжены в группе G, а группа G предполагается финитно аппроксимируемой относительно сопряженности, существует нормальная подгруппа L конечного индекса группы G такая, что в фактор-группе G/L элементы xL и yL не являются сопряженными.

В соответствии с предложением 3.1 можно выбрать (A_{-1}, A_1, φ)-совместимую нормальную подгруппу H конечного индекса группы G, лежащую в пересечении подгрупп M, N и L. Так как тогда в фактор-группе G/H элементы xH и yH не сопряжены и элемент xH не входит ни в одну из подгрупп $A_{-1}H/H$ и A_1H/H, в силу леммы Коллинза элементы xH и yH не сопряжены в группе G_H^*.

Будем считать теперь, что каждый из элементов x или y входит в одну из связанных подгрупп A_{-1} и A_1. Поскольку $t^{-1}A_{-1}t = A_1$, можно предполагать без потери общности, что элементы x и y лежат в подгруппе $A_1 = V_0$.

Подслучай 2b. Существуют неотрицательные числа k и l такие, что $x \in V_k \setminus V_{k+1}$ и $y \in V_l \setminus V_{l+1}$.

Используя финитную отделимость подгрупп V_{k+1} и V_{l+1} и предложения 2.5 и 3.1, можно доказать существование сильно (A_{-1}, A_1, φ)-совместимой подгруппы H конечного индекса группы G такой, что в фактор-группе G/H элемент yH не принадлежит подгруппе $V_{l+1}^{(H)}$ и отличен от каждого из элементов $(xH)\varphi_{_H}^{-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k+1)$, а элемент xH не принадлежит подгруппе $V_{k+1}^{(H)}$ и отличен от каждого из элементов $(yH)\varphi_{_H}^{-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, l+1)$. Из предложений 2.5 и 3.2 теперь следует, что элементы xH и yH не сопряжены в группе G_H^*.

Подслучай 2c. Для одного из элементов x и y, скажем для элемента x, существует неотрицательное число k такое, что $x \in V_k \setminus V_{k+1}$, а элемент y принадлежит подгруппе V_l при любом $l \geqslant 0$.

Рассматривается аналогично предыдущему подслучаю.

Подслучай 2d. Оба элемента x и y принадлежат подгруппе V_l при любом $l \geqslant 0$.

Существование искомой подгруппы в этом подслучае устанавливается с помощью предложений 2.5 и 2.6.

Случай 3. $l(x) = l(y) > 0$

В этом случае существование искомой подгруппы устанавливается с помощью предложений 4.1 и 4.2. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 447 с.
2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
3. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых *HNN*-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123—133.
4. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых *HNN*-расширений групп. Иваново, 2005. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 22.06.05, № 896-132005.
5. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
6. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamated free products and *HNN* extensions // Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29. P. 35—51.
7. *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of certain *HNN* extensions of groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222. P. 574—594.
8. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain *HNN* extensions // Algebra Colloquium 5:1. 1998. P. 25—31.
9. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain *HNN* extensions of conjugacy separable groups // Algebra Colloquium 7:2. 2000. P. 147—158.