Математические заметки

Том 102 выпуск 4 октябрь 2017

УДК 512.543

# Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами

**Е. В. Соколов, Е. А. Туманова**

Пусть $\mathcal{R}$ – корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и содержащий хотя бы одну неединичную группу. Получен критерий аппроксимируемости классом $\mathcal{R}$ HNN-расширения, связанные подгруппы которого являются циклическими и лежат в центре базовой группы.

Библиография: 21 название.

**Ключевые слова:** аппроксимируемость корневыми классами групп, аппроксимируемость разрешимыми группами, аппроксимируемость конечными $p$-группами, HNN-расширение.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11465

**1. Введение. Формулировка результатов.** Напомним, что группа $X$ называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ (или, короче, $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы $X$ на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-группу), переводящий $x$ в отличный от 1 элемент. В литературе чаще всего рассматривается свойство финитной аппроксимируемости (т.е. аппроксимируемости классом всех конечных групп), поскольку конечно определенная группа, обладающая этим свойством, имеет разрешимую проблему тождества слов. Изучается также аппроксимируемость конечными $p$-группами (где $p$ – некоторое простое число), конечными $\pi$-группами (где $\pi$ – непустое множество простых чисел), разрешимыми, нильпотентными и рядом других классов групп. Поскольку при доказательстве аппроксимируемости одной и той же группы различными классами зачастую применяется схожая аргументация, естественным образом возникает желание провести возможно бóльшую часть рассуждений однократно, используя общие для всех этих классов свойства. Одним из первых данную идею реализовал К. Грюнберг [1], предложивший понятие корневого класса групп.

Согласно [1] класс групп $\mathcal{R}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: для любой группы $X$ и для любой субнормальной последовательности $Z \leqslant Y \leqslant X$ с факторами из класса $\mathcal{R}$ найдется нормальная подгруппа $T$ группы $X$, лежащая в $Z$ и такая, что $X/T \in \mathcal{R}$. Данным определением удобно пользоваться при исследовании аппроксимируемости корневыми классами,

Работа поддержана грантом ИвГУ (договор № 141 от 01.01.2016).

однако оно не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Равносильные определения, упрощающие данную задачу, были получены в [2] (см. предложение 2 ниже). Там же доказано, что пересечение любых двух корневых классов – снова корневой класс групп.

Легко видеть, что корневыми оказываются классы всех разрешимых групп, конечных групп, периодических $\pi$-групп (напомним, что периодическая группа называется *$\pi$-группой* для некоторого множества простых чисел $\pi$, если все простые делители порядков ее элементов содержатся в $\pi$), класс всех групп без кручения, а также ввиду отмеченного выше всевозможные их пересечения. Класс всех нильпотентных групп не замкнут относительно взятия расширений и потому корневым не является.

В [3] было установлено, что каждая свободная группа аппроксимируется любым нетривиальным (т.е. содержащим хотя бы одну неединичную группу) корневым классом. В сочетании с результатами из [1] это утверждение позволило полностью решить вопрос об аппроксимируемости произвольным нетривиальным корневым классом (обычного) свободного произведения групп, а также послужило основой для исследований аппроксимируемости корневыми классами других свободных конструкций групп. Для свободных произведений с объединенной подгруппой в указанном направлении было получено достаточно много результатов (см., например, [2]–[7]). Что же касается HNN-расширений, к моменту написания настоящей статьи имелось, по-видимому, лишь три работы, в которых рассматривалась аппроксимируемость данной конструкции произвольным нетривиальным корневым классом групп $\mathcal{R}$. В [8] получено одно общее достаточное условие $\mathcal{R}$-аппроксимируемости HNN-расширения $G$ (сформулированное в предложении 3 ниже) и критерий $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$ при условии, что ее связанные подгруппы совпадают, а связывающий их изоморфизм является тождественным отображением. В [9] также рассматривается случай совпадающих связанных подгрупп, но уже без ограничений на связывающий изоморфизм. Наконец, в [10] указано достаточное условие $\mathcal{R}$-аппроксимируемости HNN-расширения с центральными тривиально пересекающимися связанными подгруппами (оно приводится в предложении 4 далее); здесь на класс $\mathcal{R}$ накладывается дополнительное требование замкнутости относительно факторизации (т.е. взятия фактор-групп).

Целью данной статьи служит доказательство критерия аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации нетривиальным корневым классом групп HNN-расширения, связанные подгруппы которого являются циклическими и лежат в центре базовой группы. Полученные результаты дополняют работу [10], а также ряд утверждений о финитной аппроксимируемости HNN-расширений с циклическими связанными подгруппами из [11]–[13].

До конца данного пункта будем считать, что $\mathcal{R}$ – замкнутый относительно факторизации нетривиальный корневой класс групп; $B$ – некоторая $\mathcal{R}$-аппроксимируемая группа; $h$ и $k$ – элементы одинакового порядка группы $B$, лежащие в ее центре; $H$ и $K$ – порожденные ими циклические подгруппы; $\varphi\colon H \to K$ – изоморфизм, переводящий элемент $h$ в элемент $k$, и

$$G = \langle B, t;\, t^{-1}Ht = K,\, \varphi\rangle$$

– HNN-расширение группы $B$ с подгруппами $H$ и $K$, связанными при помощи изоморфизма $\varphi$. Если $B$ – циклическая группа, критерий $\mathcal{R}$-аппроксимируемости

HNN-расширения $G$ известен [14]. Поэтому в настоящей статье предполагается, что группа $B$ не является циклической и, в частности, не совпадает ни с одной из связанных подгрупп $H$ и $K$.

Если подгруппы $H$ и $K$ конечны и $L = H \cap K$, то, поскольку в конечной циклической группе есть только одна подгруппа заданного порядка, имеет место равенство $L\varphi = L$. Таким образом, ограничение изоморфизма $\varphi$ на подгруппу $L$ является ее автоморфизмом. Порожденную им циклическую подгруппу группы $\operatorname{Aut} L$ обозначим через $\Phi$.

Теорема 1. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют конечный порядок, $L$ и $\Phi$ определены как и выше. Группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{R}$. В частности, если класс $\mathcal{R}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема.*

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют конечный порядок. Если группа $B$ аппроксимируется разрешимыми группами (конечными разрешимыми группами), то и группа $G$ аппроксимируется разрешимыми группами (соответственно конечными разрешимыми группами).*

Следующие три теоремы полностью решают вопрос об $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$ в случае, когда подгруппы $H$ и $K$ бесконечны.

Теорема 2. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок. Если существует гомоморфизм группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективный на подгруппах $H$ и $K$, то группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема.*

Теорема 3. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок; не существует гомоморфизма группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективного на подгруппах $H$ и $K$; $H \cap K \neq 1$ и $m, n$ – положительные целые числа такие, что $H^m = H \cap K = K^n$. Если $h^m = k^n$, то группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m = n$ и фактор-группы $B/H$ и $B/K$ $\mathcal{R}$-аппроксимируемы. Если $h^m = k^{-n}$, то группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m = n$, фактор-группы $B/H$ и $B/K$ $\mathcal{R}$-аппроксимируемы и класс $\mathcal{R}$ содержит группу порядка 2.*

Теорема 4. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок, $H \cap K = 1$ и не существует гомоморфизма группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективного на подгруппах $H$ и $K$. Пусть также*

$$\Omega = \{N \trianglelefteq B \mid B/N \in \mathcal{R} \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \;\; N \cap HK = (HK)^n\}.$$

*Группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы $H$ и $K$ отделимы семейством $\Omega$, т.е.*

$$\bigcap_{N \in \Omega} HN = H \qquad \text{и} \qquad \bigcap_{N \in \Omega} KN = K.$$

Описание семейства $\Omega$ и ответ на вопрос, отделимы ли им подгруппы $H$ и $K$, для конкретных класса $\mathcal{R}$ и группы $B$ могут оказаться непростой задачей. Потребовав в дополнение к предположениям теоремы 4, чтобы фактор-группа $B/HK$ аппроксимировалась классом $\mathcal{R}$, удается доказать критерий $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$ (теорема 5), условия которого проверить легче. Заметим однако, что $\mathcal{R}$-аппроксимируемость фактор-группы $B/HK$, вообще говоря, не является необходимым условием $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$, как показывает приводимый далее пример. Поэтому теорема 5 не может служить полной заменой теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок, $H \cap K = 1$ и не существует гомоморфизма группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективного на подгруппах $H$ и $K$. Если фактор-группа $B/HK$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема, то группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $m \geqslant 1$ найдется такое $n > m$, что фактор-группа $B/(HK)^n$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема.*

Пример. Пусть $p$ и $q$ – различные простые числа, $B$ – свободная абелева группа ранга 2 с порождающими $a$ и $b$, $h = a$, $k = ab^q$. Тогда подгруппа $HK$ порождается элементами $a$ и $b^q$, ее индекс в группе $B$ равен $q$ и, следовательно, фактор-группа $B/HK$ не аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных $p$-групп. Покажем, что группа $G$, тем не менее, является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

В самом деле, если $r \geqslant 1$, то $B/B^{p^r} \cong \mathbb{Z}_{p^r} \times \mathbb{Z}_{p^r} \in \mathcal{F}_p$. Ввиду взаимной простоты чисел $p$ и $q$ из включения $a^x b^{qy} \in B^{p^r}$ для некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$ вытекает, что $p^r | x$ и $p^r | y$. Поэтому $a^x b^{qy} \in (HK)^{p^r}$ и, следовательно, $B^{p^r} \cap HK = (HK)^{p^r}$. Таким образом, подгруппа $B^{p^r}$ принадлежит семейству

$$\Omega_p = \{N \trianglelefteq B \mid B/N \in \mathcal{F}_p \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ \ N \cap HK = (HK)^n\}.$$

Пусть теперь $a^i b^j$ – произвольный элемент группы $B$ и число $r$ таково, что $p^r > q|i| = |j|$. Если $a^i b^j \in HB^{p^r}$, то $p^r | j$ и, следовательно, $j = 0$ в силу выбора числа $r$. Стало быть, $a^i b^j \in H$. Если же $a^i b^j \in KB^{p^r}$, то для некоторого $x \in \mathbb{Z}$ имеют место сравнения $i \equiv x \pmod{p^r}$ и $j \equiv qx \pmod{p^r}$. Отсюда $j \equiv qi \pmod{p^r}$, и снова в силу выбора числа $r$ получаем, что $j = qi$ и $a^i b^j \in K$. Таким образом, подгруппы $H$ и $K$ отделимы семейством $\Omega_p$ и группа $G$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ по теореме 4.

Пусть $\pi$ – непустое множество простых чисел. Абелеву группу будем называть *$\pi$-ограниченной*, если в каждой ее фактор-группе все компоненты периодической части, соответствующие числам из множества $\pi$, конечны. Нильпотентную (соответственно разрешимую) группу назовем *$\pi$-ограниченной*, если она обладает конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с $\pi$-ограниченными абелевыми факторами. Можно показать [15], что произвольный центральный (соответственно субнормальный) ряд $\pi$-ограниченной нильпотентной (соответственно разрешимой) группы имеет $\pi$-ограниченные абелевы факторы. В частности, нильпотентная группа $\pi$-ограничена тогда и только тогда, когда она является $\pi$-ограниченной разрешимой.

Отметим, что если $\pi$ совпадает с множеством всех простых чисел, то $\pi$-ограниченная разрешимая группа оказывается ограниченной разрешимой в смысле Мальцева [16]. Очевидно также, что полициклические и конечно порожденные нильпотентные группы являются соответственно $\pi$-ограниченными разрешимыми и $\pi$-ограниченными нильпотентными при любом выборе множества $\pi$. Приводимые далее утверждения вытекают из теорем 2–5.

Следствие 2. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок. Тогда*

1) *если группа $B$ является разрешимой или аппроксимируется разрешимыми группами без кручения, то группа $G$ аппроксимируется разрешимыми группами;*

2) *если группа $B$ является ограниченной разрешимой, то группа $G$ аппроксимируется конечными разрешимыми группами тогда и только тогда, когда фактор-группы $H/H \cap K$ и $K/H \cap K$ имеют одинаковые порядки.*

Следствие 3. *Пусть элементы $h$ и $k$ имеют бесконечный порядок, $\pi$ – непустое множество простых чисел, группа $B$ является $\pi$-ограниченной нильпотентной. Группа $G$ аппроксимируется конечными разрешимыми $\pi$-группами тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *периодические части групп $B$, $B/H$ и $B/K$ являются $\pi$-группами;*
2) *фактор-группы $H/H \cap K$ и $K/H \cap K$ имеют одинаковые порядки;*
3) $2 \in \pi$, *если только подгруппа $H \cap K$ не лежит в центре группы $G$.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 1–5 и следствий 2, 3.

**2. Некоторые вспомогательные понятия и утверждения.** Пусть

$$G = \langle B, t;\, t^{-1}Ht = K,\, \varphi \rangle$$

– HNN-расширение группы $B$ с подгруппами $H$ и $K$, связанными при помощи изоморфизма $\varphi\colon H \to K$ (в этом пункте предполагается, что подгруппы $H$ и $K$ могут быть любыми, не обязательно циклическими и лежащими в центре группы $B$). Легко видеть, что произвольный элемент $g \in G$ может быть записан в виде

$$g = g_1 t^{\varepsilon_1} g_2 t^{\varepsilon_2} \dots g_n t^{\varepsilon_n} g_{n+1},$$

где $g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1} \in B$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и, если $-\varepsilon_{i-1} = 1 = \varepsilon_i$, то $g_i \notin H$, если же $\varepsilon_{i-1} = 1 = -\varepsilon_i$, то $g_i \notin K$. Любая запись такого вида называется *приведенной*, а число букв $t$ и $t^{-1}$ в ней – *длиной* данной приведенной записи. Лемма Бриттона (см., например, [17; гл. IV, § 2]) утверждает, что если элемент группы $G$ имеет хотя бы одну приведенную запись ненулевой длины, то он отличен от 1. Известно также [17; гл. IV, теорема 2.1], что тождественное отображение порождающих группы $B$ в группу $G$ определяет вложение первой во вторую.

Подгруппу $N$ группы $B$ будем называть $(H, K, \varphi)$-*совместимой*, если $(N \cap H)\varphi = N \cap K$. Нетрудно показать, что если $N$ – нормальная $(H, K, \varphi)$-совместимая подгруппа, то отображение $\varphi_N\colon HN/N \to KN/N$, переводящее смежный класс $hN$ в смежный класс $(h\varphi)N$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому можно рассмотреть HNN-расширение

$$G_N = \langle B/N, t;\, t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\, \varphi_N \rangle$$

фактор-группы $B/N$ с подгруппами $HN/N$ и $KN/N$, связанными при помощи изоморфизма $\varphi_N$. Следующее утверждение хорошо известно и может быть легко проверено.

Предложение 1. *Пусть $N$ – это нормальная $(H, K, \varphi)$-совместимая подгруппа группы $B$. Тогда естественный гомоморфизм группы $B$ на фактор-группу $B/N$ может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_N$ группы $G$ на группу $G_N$, определенную выше. Ядро гомоморфизма $\rho_N$ совпадает с нормальным замыканием подгруппы $N$ в группе $G$.*

Приведем теперь ряд утверждений, касающихся корневых классов групп и аппроксимируемости ими HNN-расширений.

Предложение 2 [2; теорема 1]. *Пусть $\mathcal{C}$ – класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию Грюнберга* (*и, следовательно, является корневым*);
2) *класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений*;
3) *класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия расширений и для любых двух групп $X, Y \in \mathcal{C}$ содержит декартово произведение $\Pi_{y \in Y} X_y$, где $X_y$ – изоморфная копия группы $X$ для каждого $y \in Y$.*

Предложение 3 [8; теорема 4.1]. *Пусть $\mathcal{R}$ – корневой класс групп. Если группа $B$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективный на подгруппах $H$ и $K$, то группа $G$ также является $\mathcal{R}$-аппроксимируемой.*

Предложение 4 [10; теорема 1]. *Пусть $\mathcal{R}$ – замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, подгруппы $H$ и $K$ лежат в центре группы $B$ и пересекаются тривиально. Если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий*:

1) $B \in \mathcal{R}$;
2) *группа $B$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема, подгруппы $H$ и $K$ конечны*,

*то группа $G$ является $\mathcal{R}$-аппроксимируемой.*

Следуя [16], подгруппу $Y$ группы $X$ будет называть *отделимой* (в этой группе) классом групп $\mathcal{C}$ (или, короче, *$\mathcal{C}$-отделимой*), если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм $\psi$ группы $X$ на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\psi \notin Y\psi$. Если $\Omega$ – семейство нормальных подгрупп группы $X$ и $\bigcap_{N \in \Omega} YN = Y$, будем говорить также, что подгруппа $Y$ *отделима семейством* $\Omega$.

Очевидно, что $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $X$ равносильна $\mathcal{C}$-отделимости ее единичной подгруппы. Напомним также, что если $\mathcal{C}$ – класс всех конечных групп, то отделимость им называется *финитной*.

Для любых групп класса $\mathcal{C}$ и группы $X$ через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство нормальных подгрупп группы $X$, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Поскольку подгруппы из семейства $\mathcal{C}^*(X)$ представляют собой ядра всевозможных гомоморфизмов группы $X$ на $\mathcal{C}$-группы, подгруппа $Y$ группы $X$ $\mathcal{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда $\bigcap_{Z \in \mathcal{C}^*(X)} YZ = Y$. Иначе говоря, $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы $Y$ равносильна ее отделимости семейством $\mathcal{C}^*(X)$.

Предложение 5 [18; предложение 1.1.1]. *Пусть $\mathcal{C}$ – класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, $X$ – произвольная группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{C}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства*;
2) *если группа $X$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $Y$ – ее конечная подгруппа, то подгруппа $Y$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $X$ и существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $Y \cap Z = 1$; в частности, если $X$ – конечная $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, то она принадлежит классу $\mathcal{C}$.*

Предложение 6 [18; предложение 1.1.2]. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс групп, $X$ – некоторая группа, $Y$ – ее нормальная подгруппа. Если фактор-группа $X/Y$*

*$\mathcal{C}$-аппроксимируема, то подгруппа $Y$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $X$. Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно факторизации, то верно и обратное: из $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы $Y$ в группе $X$ следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость фактор-группы $X/Y$.*

Предложение 7 [19; предложение 1.2.4]. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс групп. Если группа $X$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то централизатор $C_X(Y)$ произвольного подмножества $Y$ группы $X$ является $\mathcal{C}$-отделимой подгруппой.*

Заметим, что если $X$ – некоторая группа, $Y$ – ее нормальная подгруппа, то ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы $X$ оказывается автоморфизмом группы $Y$. Множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$ всех автоморфизмов группы $Y$. Легко видеть, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$ группы $X$ по централизатору в этой группе подгруппы $Y$. Отсюда и из предложений 5–7 вытекает

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{C}$ – класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей, $X$ – некоторая $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, $Y$ – ее нормальная подгруппа. Тогда группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой. Если группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ конечна, то она принадлежит классу $\mathcal{C}$.*

Пусть $\pi$ – непустое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа $Y$ группы $X$ называется *$\pi'$-изолированной* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ и для каждого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ вытекает, что $x \in Y$. Приводимые далее утверждения потребуются для доказательства следствий 2 и 3.

Предложение 9 [16; теорема 6]. *В ограниченной (в смысле А. И. Мальцева) разрешимой группе все подгруппы финитно отделимы. В частности, такая группа финитно аппроксимируема.*

Предложение 10 [15; теоремы 2 и 3]. *Пусть $\pi$ – непустое множество простых чисел, $X$ – $\pi$-ограниченная нильпотентная группа. Подгруппа $Y$ группы $X$ отделима классом $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных $\pi$-групп тогда и только тогда, когда она $\pi'$-изолирована в $X$. В частности, группа $X$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть является $\pi$-группой.*

**3. Доказательство теоремы 1.** Так как подгруппа $L$ центральна в группе $B$ и $\varphi$-инвариантна, то она нормальна в группе $G$ и $\mathrm{Aut}_G(L) = \Phi$. Поэтому необходимость условия теоремы вытекает из предложения 8. Для проверки достаточности докажем существование гомоморфизма группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, инъективного на подгруппах $H$ и $K$. В этом случае $\mathcal{R}$-аппроксимируемость группы $G$ будет следовать из предложения 3.

Предположим сначала, что $B \in \mathcal{R}$. Как уже было отмечено выше, подгруппа $L$ $\varphi$-инвариантна и, следовательно, $(H, K, \varphi)$-совместима. Поэтому определены HNN-расширение

$$G_L = \langle B/L, t;\ t^{-1}(H/L)t = K/L,\ \varphi_L \rangle$$

и гомоморфизм $\rho_L \colon G \to G_L$, причем ядро последнего ввиду предложения 1 совпадает с $L$.

Поскольку класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно факторизации, $B/L \in \mathcal{R}$. Легко видеть также, что $H/L \cap K/L = 1$. Значит, группа $G_L$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема в силу предложения 4. Отсюда и из предложения 5 следует, что существует подгруппа $N_L \in \mathcal{R}^*(G_L)$, тривиально пересекающаяся с подгруппами $H/L$ и $K/L$. Обозначим подгруппу $N_L \cap B/L$ через $Q$ и заметим, что $Q \in \mathcal{R}$ в силу замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно взятия подгрупп.

По теореме 6 из [20] группа $N_L$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы $F$ и групп $Q_i$, $i \in \mathcal{I}$, изоморфных подгруппе $Q$. Рассмотрим гомоморфизм $\psi\colon N_L \to Q$, продолжающий изоморфизмы групп $Q_i$ и переводящий все элементы группы $F$ в 1. По теореме Куроша о подгруппах свободного произведения (см., например, [17; гл. IV, теорема 1.10]) ядро $M_L$ гомоморфизма $\psi$ является свободной группой. Обозначая через $M$ и $N$ прообразы подгрупп $M_L$ и $N_L$ относительно гомоморфизма $\rho_L$, получаем в группе $G$ субнормальный ряд

$$1 \leqslant L \leqslant M \leqslant N \leqslant G,$$

где $G/N \in \mathcal{R}$, $N/M \in \mathcal{R}$, $M/L$ – свободная группа и $L \in \mathcal{R}$, так как $B \in \mathcal{R}$ и класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

Хорошо известно, что любое расширение при помощи свободной группы расщепляемо. Поэтому в группе $M$ существует свободная подгруппа $U$, удовлетворяющая условиям $M = UL$ и $L \cap U = 1$. Легко видеть, что отображение $\theta\colon U \to \operatorname{Aut}_G(L)$, сопоставляющее каждому элементу $u \in U$ ограничение на подгруппу $L$ производимого этим элементом внутреннего автоморфизма группы $G$, является гомоморфным. Положим $V = \ker\theta$. Тогда $[V, L] = 1$, откуда следует, что подгруппа $V$ нормальна в группе $M$.

Из соотношения $L \cap U = 1$ легко получается равенство $U \cap VL = V$. Имеем

$$M/VL = UL/VL = UVL/VL \cong U/(U \cap VL) = U/V \cong U\theta \leqslant \operatorname{Aut}_G(L),$$

и $M/VL \in \mathcal{R}$, поскольку $\operatorname{Aut}_G(L) = \Phi \in \mathcal{R}$. Так как $L \cap V \leqslant L \cap U = 1$, то выполнено $LV/V \cong L/(L \cap V) = L \in \mathcal{R}$. Стало быть, все факторы ряда

$$1 \leqslant V \leqslant LV \leqslant M \leqslant N \leqslant G,$$

начиная со второго, принадлежат классу $\mathcal{R}$. Применяя условие Грюнберга к ряду $1 \leqslant V \leqslant LV \leqslant M$, найдем подгруппу $T_1 \in \mathcal{R}^*(M)$, лежащую в $V$. Аналогичным образом получим подгруппы $T_2 \in \mathcal{R}^*(N)$ и $T \in \mathcal{R}^*(G)$, также содержащиеся в $V$. Для этого сначала рассмотрим ряд $1 \leqslant T_1 \leqslant M \leqslant N$, а затем ряд $1 \leqslant T_2 \leqslant N \leqslant G$.

Поскольку подгруппа $N_L$ была выбрана тривиально пересекающейся с подгруппами $H/L$ и $K/L$, имеют место соотношения $N \cap H = L = N \cap K$. Так как $T \leqslant N$, отсюда следует, что $T \cap H \leqslant L$ и $T \cap K \leqslant L$. Но в то же время $T \leqslant V$ и $L \cap V = 1$. Стало быть, $T \cap H = 1 = T \cap K$ и естественный гомоморфизм группы $G$ на фактор-группу $G/T$ является искомым.

Рассмотрим теперь общий случай, когда группа $B$ аппроксимируется классом $\mathcal{R}$. По предложению 5 найдется подгруппа $A \in \mathcal{R}^*(B)$, тривиально пересекающаяся с подгруппами $H$ и $K$. Очевидно, что она является $(H, K, \varphi)$-совместимой. Поэтому определены HNN-расширение

$$G_A = \langle B/A, t;\, t^{-1}(HA/A)t = KA/A,\, \varphi_A\rangle$$

и гомоморфизм $\rho_A\colon G \to G_A$, продолжающий естественный гомоморфизм группы $B$ на фактор-группу $B/A$ и, стало быть, действующий на подгруппах $H$ и $K$ инъективно. Так как $B/A \in \mathcal{R}$, то в силу доказанного выше гомоморфизм $\rho_A$ может быть продолжен до искомого отображения.

Остается заметить, что если класс $\mathcal{R}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то ввиду замкнутости относительно взятия подгрупп и фактор-групп он включает также бесконечную циклическую группу и все ее гомоморфные образы. Это означает, в частности, что $\Phi \in \mathcal{R}$.

**4. Доказательство теоремы 2.** Как и при доказательстве теоремы 1, предположим сначала, что $B \in \mathcal{R}$. Обозначим для каждого $i \in \mathbb{Z}$ через $B_i$ изоморфную копию группы $B$, через $h_i$, $k_i$, $H_i$ и $K_i$ – элементы и подгруппы группы $B_i$, соответствующие при этом изоморфизме элементам $h$, $k$ и подгруппам $H$, $K$. Пусть также для любых целых чисел $m$, $n$, удовлетворяющих условию $m < n$,

$$P_{m,n} = \bigl\langle B_i;\ [B_i, B_j] = 1,\ h_l = k_{l+1},\ m \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,\ m \leqslant l \leqslant n-1\bigr\rangle$$

обозначает фактор-группу прямого произведения групп $B_i$, $m \leqslant i \leqslant n$, по его центральной подгруппе, порожденной множеством $\{h_l^{-1}k_{l+1} \mid m \leqslant l \leqslant n-1\}$, и

$$P_{m,m} \stackrel{\mathrm{def}}{=} B_m.$$

Легко видеть, что при $n > m$ группа $P_{m,n}$ совпадает с фактор-группой прямого произведения $D$ групп $P_{m,n-1}$ и $B_n$ по центральной циклической подгруппе $C \leqslant D$, порожденной элементом $h_{n-1}^{-1}k_n$. Так как $h_{n-1} \in P_{m,n-1}$, $k_n \in B_n$ и оба эти элемента имеют бесконечный порядок, то $C \cap P_{m,n-1} = 1 = C \cap B_n$ и естественный гомоморфизм группы $D$ на группу $P_{m,n}$ действует на подгруппах $P_{m,n-1}$ и $B_n$ инъективно. Отсюда и из равенства $P_{m,m} = B_m$ в силу очевидных индуктивных соображений следует, что для каждого $i \in \{m, \dots, n\}$ тождественное отображение порождающих группы $B_i$ в группу $P_{m,n}$ определяет вложение.

Пусть теперь

$$P = \langle B_i;\ [B_i, B_j] = 1,\ h_i = k_{i+1}\ (i, j \in \mathbb{Z},\ i \neq j)\rangle$$

– фактор-группа прямого произведения групп $B_i$, $i \in \mathbb{Z}$, по центральной подгруппе, порожденной множеством всех элементов вида $h_i^{-1}k_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Предположим, что существуют число $z \in \mathbb{Z}$ и элемент $b \in B_z \setminus 1$, запись которого в виде слова от порождающих символов группы $B_z$ может быть преобразована к пустому слову с помощью конечной последовательности вставок и вычеркиваний определяющих слов группы $P$, слов, обратных к ним, и слов, тривиально равных 1. Поскольку данная последовательность конечна, во всех этих словах встречаются порождающие символы лишь конечного числа групп $B_i$. Но тогда для подходящих целых чисел $m$, $n$ тот же процесс осуществим и в группе $P_{m,n}$, что невозможно ввиду доказанного выше. Следовательно, для любого $i \in \mathbb{Z}$ тождественное отображение порождающих группы $B_i$ в группу $P$ может быть продолжено до вложения.

Легко видеть, что отображение множества порождающих группы $P$ в себя, для каждого $i \in \mathbb{Z}$ переводящее порождающие символы группы $B_i$ в соответствующие им порождающие символы группы $B_{i-1}$, определяет автоморфизм $\tau$ группы $P$. Обозначим через $E$ расширение группы $P$ при помощи этого автоморфизма. Тогда представление группы $E$ выглядит следующим образом:

$$E = \langle B_i, t;\ [B_i, B_j] = 1,\ h_i = k_{i+1},\ t^{-1}bt = b\tau,\ i, j \in \mathbb{Z},\ i \neq j,\ b \in B_i \rangle.$$

Используя преобразования Тице, данное представление несложно привести к виду

$$E = \langle B, t;\ [t^i B t^{-i}, t^j B t^{-j}] = 1,\ t^{-1}ht = k,\ i, j \in \mathbb{Z},\ i \neq j \rangle,$$

из которого следует, что группа $E$ является фактор-группой группы $G$ по нормальному замыканию в последней множества коммутаторов вида $[t^i b_1 t^{-i}, t^j b_2 t^{-j}]$, где $b_1, b_2 \in B$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$. Отметим также, что ввиду доказанного выше тождественное отображение порождающих группы $B$ в группу $E$ определяет вложение первой во вторую.

Так как по условию теоремы существует гомоморфизм группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$, действующий инъективно на бесконечных циклических подгруппах $H$ и $K$, то класс $\mathcal{R}$ заведомо содержит хотя бы одну непериодическую группу. Поскольку данный класс замкнут относительно взятия подгрупп, он включает и бесконечную циклическую группу. Значит, согласно предложению 2 декартово произведение $\mathcal{R}$-групп $B_i$, $i \in \mathbb{Z}$, принадлежит классу $\mathcal{R}$. В силу замкнутости последнего относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений, ему принадлежат также прямое произведение групп $B_i$, $i \in \mathbb{Z}$, группы $P$ и $E$. Остается заметить, что естественный гомоморфизм $\varepsilon$ группы $G$ на $\mathcal{R}$-группу $E$ ввиду коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i_G"] \arrow[d, equal] & G \arrow[d, "\varepsilon"] \\ B \arrow[r, "i_E"] & E \end{tikzcd}$$

(где $i_E$ и $i_G$ обозначают вложения группы $B$, определяемые тождественными отображениями ее порождающих) действует на подгруппе $B$ инъективно. Поэтому группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема согласно предложению 3, и в случае, когда $B \in \mathcal{R}$, теорема доказана.

Общий случай легко сводится к рассмотренному.

В самом деле, если $\psi$ – гомоморфизм группы $B$ на $\mathcal{R}$-группу, действующий инъективно на подгруппах $H$ и $K$, то его ядро $N$ является, очевидно, $(H, K, \varphi)$-совместимой подгруппой. Поэтому определены HNN-расширение

$$G_N = \langle B/N, t;\ t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\ \varphi_N \rangle$$

и гомоморфизм $\rho_N \colon G \to G_N$, продолжающий естественный гомоморфизм группы $B$ на фактор-группу $B/N$ и, стало быть, инъективный на подгруппах $H$ и $K$. Поскольку $B/N \in \mathcal{R}$, в силу доказанного выше отображение $\rho_N$ может быть продолжено до гомоморфизма на группу из класса $\mathcal{R}$, также инъективного на подгруппах $H$ и $K$. Как и ранее, для завершения доказательства $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$ остается воспользоваться предложением 3.

**5. Доказательство теоремы 3.** *Необходимость.* Предположим, что фактор-группа $B/H$ не аппроксимируется классом $\mathcal{R}$. Тогда согласно предложению 6 подгруппа $H$ не является $\mathcal{R}$-отделимой в группе $B$, т.е. существует элемент $b_1 \in B \setminus H$

такой, что $b_1\theta \in H\theta$ для каждого гомоморфизма $\theta$ группы $B$ на группу из класса $\mathcal{R}$. Поскольку подгруппа $K$ содержится в группе $B$ собственным образом, найдется элемент $b_2 \in B \setminus K$. Рассмотрим коммутатор

$$g = [t^{-1}b_1t, b_2] = t^{-1}b_1^{-1}tb_2^{-1}t^{-1}b_1tb_2.$$

Из соотношений $b_1 \notin H$, $b_2 \notin K$ вытекает, что он имеет приведенную запись длины 4 и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если $\psi$ – произвольный гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, то его ограничение на группу $B$ оказывается гомоморфизмом последней на подгруппу $B\psi$ группы $G\psi$, также принадлежащую классу $\mathcal{R}$ в силу замкнутости данного класса относительно взятия подгрупп. Поэтому $b_1\psi = h_1\psi$ для некоторого элемента $h_1 \in H$ и

$$g\psi = [t^{-1}h_1t, b_2]\psi = [h_1\varphi, b_2]\psi \in [K, B]\psi = 1,$$

что противоречит $\mathcal{R}$-аппроксимируемости группы $G$ ввиду произвольности выбора гомоморфизма $\psi$. Значит, фактор-группа $B/H$ аппроксимируется классом $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$-Аппроксимируемость фактор-группы $B/K$ доказывается аналогично. Предположим, что $m \neq n$. Тогда без потери общности можно считать, что $m < n$. Как и выше, возьмем элемент $b \in B \setminus K$ и рассмотрим коммутатор

$$g = [t^{-1}k^mt, b^{-1}t^{-1}k^mtb] = t^{-1}k^{-m}tb^{-1}t^{-1}k^{-m}tbt^{-1}k^mtb^{-1}t^{-1}k^mtb.$$

В силу выбора чисел $m$, $n$ и неравенства $m < n$ справедливо $k^m \notin H$. Значит, элемент $g$ имеет приведенную запись длины 8 и потому отличен от 1. Пусть $\psi$ – произвольный гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$. Тогда его ограничение на группу $B$ также является гомоморфизмом на $\mathcal{R}$-группу и по условию теоремы хотя бы одна из подгрупп $H\psi$, $K\psi$ конечна. Поскольку эти подгруппы сопряжены в группе $G\psi$, они имеют одинаковые порядки и $H\psi \cap K\psi = H^d\psi = K^d\psi$, где $d|(m, n)$. Стало быть, $k^m\psi \in H\psi$, $(t^{-1}k^mt)\psi \in K\psi$ и ввиду центральности подгруппы $K$ в группе $B$

$$g\psi = [t^{-1}k^mt, b^{-1}t^{-1}k^mtb]\psi = [t^{-1}k^mt, t^{-1}k^mt]\psi = 1.$$

Как и выше, получаем противоречие с $\mathcal{R}$-аппроксимируемостью группы $G$, доказывающее, что $m = n$. Из данного равенства вытекает, в частности, что подгруппа $L = H \cap K$ $\varphi$-инвариантна и потому нормальна в группе $G$. Значит, определена группа $\mathrm{Aut}_G(L)$, совпадающая, очевидно, с циклической подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,L$, порожденной ограничением на подгруппу $L$ внутреннего автоморфизма группы $G$, производимого элементом $t$. Так как $t^{-1}h^mt = k^m$, то группа $\mathrm{Aut}_G(L)$ тривиальна, если $h^m = k^m$, и имеет порядок 2, если выполнено $h^m = k^{-m}$. Остается заметить, что согласно предложению 8 $\mathcal{R}$-аппроксимируемость группы $G$ влечет за собой включение $\mathrm{Aut}_G(L) \in \mathcal{R}$. Поэтому при $h^m = k^{-m}$ класс $\mathcal{R}$ должен содержать группу порядка 2.

*Достаточность.* Пусть $g$ – произвольный неединичный элемент группы $G$ и $L = H \cap K$. Покажем, что существует гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, при котором образ элемента $g$ отличен от 1.

Так как $m = n$, то подгруппа $L$ $\varphi$-инвариантна. Поэтому определено HNN-расширение

$$G_L = \langle B/L, t;\ t^{-1}(H/L)t = K/L,\ \varphi_L\rangle,$$

изоморфное фактор-группе $G/L$ в силу предложения 1. Согласно предложению 6 из $\mathcal{R}$-аппроксимируемости фактор-групп $B/H$ и $B/K$ вытекает, что подгруппы $H$ и $K$ $\mathcal{R}$-отделимы в группе $B$. Пользуясь этим фактом, легко показать, что подгруппа $L$ также является $\mathcal{R}$-отделимой в $B$. Значит, в силу того же предложения 6 фактор-группа $B/L$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема. Поскольку $H/L \cap K/L = 1$, отсюда и из предложения 4 следует, что группа $G_L$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема. Таким образом, если $g \notin L$, то $gL \neq 1$ в фактор-группе $G/L$ и в силу $\mathcal{R}$-аппроксимируемости последней естественный гомоморфизм группы $G$ на $G/L$ может быть продолжен до искомого.

Пусть теперь $g \in L$. Поскольку группа $B$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема, существует подгруппа $N \in \mathcal{R}^*(B)$, не содержащая элемента $g$. Так как подгруппа $N$, очевидно, $\mathcal{R}$-отделима в группе $B$, то и подгруппа $M = N \cap L$ также $\mathcal{R}$-отделима в $B$. Значит, фактор-группа $B/M$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема в силу предложения 6.

Поскольку $L$ – бесконечная циклическая $\varphi$-инвариантная подгруппа, $M$ обладает теми же свойствами. Следовательно, определено HNN-расширение

$$G_M = \langle B/M, t;\, t^{-1}(H/M)t = K/M,\, \varphi_M\rangle,$$

изоморфное фактор-группе $G/M$.

Легко видеть, что

$$H/M \cap K/M = L/M \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Aut}_{G_M}(L/M) \cong \operatorname{Aut}_G(L).$$

Если изоморфизм $\varphi$ действует на подгруппе $L$ тождественно, то группа $\operatorname{Aut}_G(L)$ тривиальна и принадлежит классу $\mathcal{R}$, поскольку он содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп. В противном случае $\operatorname{Aut}_G(L)$ – группа порядка 2 и включение $\operatorname{Aut}_G(L) \in \mathcal{R}$ выполнено по условию теоремы. Стало быть, $\operatorname{Aut}_{G_M}(L/M) \in \mathcal{R}$ и группа $G_M$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема по теореме 1. Так как $gM \neq 1$ в фактор-группе $G/M$, отсюда следует, что искомый гомоморфизм может быть получен, как и выше.

**6. Доказательство теоремы 4.** *Необходимость.* Предположим, что подгруппа $H$ не является отделимой семейством $\Omega$, т.е. существует элемент $b_1 \in B \setminus H$ такой, что $b_1 \in HN$ для каждой подгруппы $N \in \Omega$. Возьмем элемент $b_2 \in B \setminus K$ и рассмотрим тот же отличный от 1 коммутатор, что и при доказательстве теоремы 3:

$$g = [t^{-1}b_1t, b_2] = t^{-1}b_1^{-1}tb_2^{-1}t^{-1}b_1tb_2.$$

Пусть $\psi$ – произвольный гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, и пусть $Q = \ker\psi$ и $M = Q \cap B$. Так как $B\psi \in \mathcal{R}$ ввиду замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно взятия подгрупп, то по условию теоремы выполняется хотя бы одно из соотношений $Q \cap H \neq 1$ и $Q \cap K \neq 1$. Поскольку подгруппы $H\psi$ и $K\psi$ сопряжены в группе $G\psi$, отсюда следует, что они имеют одинаковый конечный порядок. Хорошо известно и легко проверить, что отображение фактор-группы $B/M$ в фактор-группу $G/Q$, сопоставляющее смежному классу $bM$ смежный класс $bQ$, корректно определено и является вложением. Прообразами подгрупп $H\psi$ и $K\psi$ относительно этого вложения служат подгруппы $HM/M$ и $KM/M$, которые, стало быть, также имеют одинаковый конечный порядок.

Пусть $N$ – такая подгруппа группы $B$, что $N/M = HM/M \cap KM/M$. Очевидно, что индексы подгруппы $N/M$ в группах $HM/M$ и $KM/M$ совпадают и равны некоторому числу $n \geqslant 1$. Тогда $(HK)^n \leqslant N$ и $\{h^ik^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\} \cap N = 1$, откуда

$N \cap HK = (HK)^n$. Из соотношений

$$B/M \cong BQ/Q \leqslant G/Q \in \mathcal{R}, \qquad B/N \cong (B/M)/(N/M)$$

и замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп вытекает, что $N \in \mathcal{R}^*(B)$. Стало быть, $N \in \Omega$ и $b_1 \in HN$.

Так как $N/M \leqslant HM/M$, то $HN/M \leqslant HM/M$ и потому $HN = HM$. Значит, $b_1 \in HM \leqslant HQ$. Как и при доказательстве теоремы 3, отсюда следует, что $g\psi = 1$, и мы получаем противоречие с $\mathcal{R}$-аппроксимируемостью группы $G$. Отделимость подгруппы $K$ семейством $\Omega$ доказывается аналогично.

*Достаточность.* Прежде всего заметим, что если $N$ – произвольная подгруппа из семейства $\Omega$, то $N \cap HK = (HK)^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^+$ и, следовательно, $N \cap H = H^n$, $N \cap K = K^n$ и $HN/N \cap KN/N = 1$. Отсюда, в частности, вытекает, что подгруппа $N$ $(H, K, \varphi)$-совместима и потому определено HNN-расширение

$$G_N = \langle B/N, t;\, t^{-1}(HN/N)t = KN/N,\, \varphi_N\rangle.$$

Поскольку $B/N \in \mathcal{R}$ и $HN/N \cap KN/N = 1$, это HNN-расширение $\mathcal{R}$-аппроксимируемо в силу предложения 4.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству достаточности: возьмем произвольный элемент $g \in G \setminus 1$ и покажем, что существует гомоморфизм группы $G$ на группу из класса $\mathcal{R}$, при котором образ элемента $g$ отличен от 1.

Если $g \in B$, то поскольку $H \cap K = 1$, $g \notin H$ или $g \notin K$. Так как подгруппа $H$ отделима семейством $\Omega$, то в случае, когда $g \notin H$, найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g \notin HN$. Тогда $gN$ – неединичный элемент $\mathcal{R}$-аппроксимируемой группы $G_N$ и, значит, гомоморфизм $\rho_N\colon G \to G_N$ может быть продолжен до искомого. Случай, когда $g \notin K$, рассматривается аналогично.

Пусть теперь $g \notin B$ и $g = g_1t^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2}\dots g_nt^{\varepsilon_n}g_{n+1}$ – некоторая приведенная запись элемента $g$, имеющая, очевидно, ненулевую длину. Так как подгруппы $H$ и $K$ отделимы семейством $\Omega$, то для каждого элемента $g_i$, не принадлежащего подгруппе $H$, найдется подгруппа $N_i \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g_i \notin HN_i$, и для каждого элемента $g_i$, не принадлежащего подгруппе $K$, найдется подгруппа $N_i \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g_i \notin KN_i$. Если элемент $g_i$ принадлежит пересечению $H \cap K$ и, следовательно, равен 1, положим $N_i = B$. Отметим, что и в этом случае $N_i \in \Omega$.

Пусть $N = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n+1} N_i$. Тогда $g_i \notin HN$, если $g_i \notin H$, и $g_i \notin KN$, если $g_i \notin K$. В силу предложения 5 $N \in \mathcal{R}^*(B)$, откуда легко следует, что $N \in \Omega$. Значит, определено HNN-расширение $G_N$ и $g_1Nt^{\varepsilon_1}g_2Nt^{\varepsilon_2}\dots g_nNt^{\varepsilon_n}g_{n+1}N$ – приведенная запись элемента $g\rho_N$ ненулевой длины. Таким образом, $g\rho_N \neq 1$ и искомый гомоморфизм строится, как и выше.

**7. Доказательство теоремы 5.** *Необходимость.* Пусть $m \geqslant 1$. Так как группа $G$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема, то по теореме 4 подгруппа $H$ отделима семейством

$$\Omega = \{N \trianglelefteq B \mid B/N \in \mathcal{R} \wedge \exists n \in \mathbb{Z}^+\ N \cap HK = (HK)^n\}.$$

Значит, для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ найдется подгруппа $N_i$, удовлетворяющая условию $k^i \notin HN_i$ и, в частности, условию $k^i \notin N_i$. Как и при доказательстве теоремы 4, проверяется, что пересечение $N$ всех подгрупп $N_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, принадлежит семейству $\Omega$. Отсюда, в частности, следует, что $N \cap HK = (HK)^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^+$, причем, как легко видеть, $n > m$. Покажем, что подгруппа $(HK)^n$ $\mathcal{R}$-отделима в группе $B$. Тогда в силу предложения 6 фактор-группа $B/(HK)^n$ будет $\mathcal{R}$-аппроксимируемой.

В самом деле, ввиду $\mathcal{R}$-аппроксимируемости фактор-группы $B/HK$ подгруппа $HK$ $\mathcal{R}$-отделима в группе $B$. Поэтому если $b \in B \setminus HK$, то найдется подгруппа $M \in \mathcal{R}^*(B)$, удовлетворяющая условию $b \notin HKM$, а, значит, и условию $b \notin (HK)^n M$. Если же $b \in HK \setminus (HK)^n$, то, поскольку $N \cap HK = (HK)^n$, справедливы соотношения $b \notin N$ и $b \notin (HK)^n N$.

*Достаточность.* Покажем, что подгруппа $H$ отделима семейством $\Omega$. Для этого возьмем произвольный элемент $b \in B \setminus H$ и укажем подгруппу $N \in \Omega$, удовлетворяющую условию $b \notin HN$.

Если $b \notin HK$, то $bHK \neq 1$ в фактор-группе $B/HK$ и в силу $\mathcal{R}$-аппроксимируемости последней найдется подгруппа $N/HK \in \mathcal{R}^*(B/HK)$, не содержащая элемента $bHK$. Тогда $N \in \mathcal{R}^*(B)$, $b \notin HKN$ и, так как $HK \leqslant N$, то $N \cap HK = HK$. Стало быть, подгруппа $N$ является искомой.

Пусть теперь $b \in HK \setminus H$, $b = h^i k^j$ и $m = |j|$. Из соотношения $b \notin H$ следует, что $m \geqslant 1$. Значит, по условию теоремы найдется число $n$, большее $m$ и такое, что фактор-группа $B/(HK)^n$ $\mathcal{R}$-аппроксимируема. Согласно предложению 5 из конечности подгруппы $HK/(HK)^n$ вытекает существование тривиально пересекающейся с ней подгруппы $N/(HK)^n \in \mathcal{R}^*(B/(HK)^n)$. Тогда $N \in \mathcal{R}^*(B)$ и, как легко видеть, $N \cap HK = (HK)^n$. Значит, $N \in \Omega$ и, предполагая, что $b \in HN$, получаем включение $k^j \in K^n$, противоречащее выбору числа $n$. Стало быть, $b \notin HN$ и $N$ – искомая подгруппа.

Итак, подгруппа $H$ отделима семейством $\Omega$. Аналогичным образом проверяется, что и подгруппа $K$ отделима данным семейством. Поэтому $\mathcal{R}$-аппроксимируемость группы $G$ следует из теоремы 4.

**8. Доказательства следствия 2.** Пользуясь предложением 2, легко показать, что класс $\mathcal{S}$ всех разрешимых групп и класс $\mathcal{FS}_\pi$ конечных разрешимых $\pi$-групп (при любом выборе множества $\pi$) являются корневыми. Из предложения 5 вытекает также, что если группа $B$ аппроксимируется разрешимыми группами без кручения, то существует ее гомоморфизм на группу указанного вида, действующий на подгруппах $H$ и $K$ инъективно. Стало быть, утверждение 1 следствия 2 получается непосредственно из теоремы 2.

Для доказательства утверждения 2 заметим, что любой конечный гомоморфный образ разрешимой группы является конечной разрешимой группой. Поэтому согласно предложению 9 все подгруппы ограниченной разрешимой группы отделимы классом конечных разрешимых групп. В силу предложения 6 это означает, что если группа $B$ является ограниченной разрешимой, то сама она и все ее фактор-группы аппроксимируются конечными разрешимыми группами. Таким образом, утверждение 2 следствия 2 вытекает из теорем 3 и 5.

**9. Доказательства следствия 3.** Приведенные выше рассуждения показывают, что в формулировке предложения 10 класс $\mathcal{F}_\pi$ можно заменить классом $\mathcal{FS}_\pi$. Поэтому в случае, когда $H \cap K \neq 1$, утверждение следствия получается непосредственно из теоремы 3 и далее можно считать, что $H \cap K = 1$.

Согласно теореме 4, если группа $G$ $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема, то подгруппы $H$ и $K$ отделимы семейством

$$\Omega_\pi = \{N \trianglelefteq B \mid B/N \in \mathcal{FS}_\pi \wedge \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \;\; N \cap HK = (HK)^n\}.$$

Отсюда легко следует, что указанные подгруппы $\mathcal{FS}_\pi$-отделимы в группе $B$ и в силу предложения 10 $\pi'$-изолированы в ней. Значит, периодические части фактор-групп $B/H$ и $B/K$ оказываются $\pi$-группами. Будучи подгруппой $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируемой группы, группа $B$ сама $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема. Стало быть, ее периодическая часть также является $\pi$-группой в силу предложения 10, и необходимость утверждения следствия доказана. Для проверки достаточности покажем сначала, что если $n$ – положительное $\pi$-число (т.е. все его простые делители принадлежат множеству $\pi$), то существует подгруппа $N \in \mathcal{FS}^*_\pi(B)$, удовлетворяющая условию $N \cap HK = (HK)^n$.

В самом деле, пусть $\pi'$ обозначает множество всех простых чисел, не содержащихся в $\pi$, $M$ – множество всех элементов группы $B$, каждый из которых в некоторой степени, являющейся $\pi'$-числом, принадлежит подгруппе $(HK)^n$. Ввиду нильпотентности группы $B$ множество $M$ оказывается подгруппой [21; теорема 4.5]. Легко видеть, что эта подгруппа $\pi'$-изолирована в $B$ и, так как $n$ – $\pi$-число, то $M \cap HK = (HK)^n$. Центр $Z$ группы $B$ $\pi'$-изолирован в данной группе, поскольку периодическая часть последней по условию является $\pi$-группой [21; лемма 4.7]. Значит, $M \leqslant Z$.

Так как подгруппа $M$ $\pi'$-изолирована в группе $B$, то периодическая часть фактор-группы $B/M$ оказывается $\pi$-группой. В силу предложения 2 из [15] группа $B/M$ по-прежнему $\pi$-ограничена и, стало быть, $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема согласно предложению 10. Значит, по предложению 5 существует подгруппа $N/M \in \mathcal{FS}^*_\pi(B/M)$, тривиально пересекающаяся с конечной подгруппой $HKM/M$. Тогда $N \cap HK = M \cap HK$ и, следовательно, подгруппа $N$ оказывается искомой.

Покажем теперь, что подгруппа $H$ отделима семейством $\Omega_\pi$.

Пусть $b \in B \setminus H$ – произвольный элемент. Как и выше, устанавливается, что фактор-группа $B/H$ $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема, поскольку ее периодическая часть является $\pi$-группой. Следовательно, существует подгруппа $M/H \in \mathcal{FS}^*_\pi(B/H)$, не содержащая неединичного элемента $bH$. Пусть число $n$ таково, что $M \cap K = K^n$. Легко видеть, что тогда $n$ – $\pi$-число и $M \cap HK = H \cdot K^n$. В силу доказанного выше существует подгруппа $N \in \mathcal{FS}^*_\pi(B)$, удовлетворяющая условию $N \cap HK = (HK)^n$. Полагая $L = M \cap N$, получаем, что $L \in \mathcal{FS}^*_\pi(B)$ ввиду предложения 5 и $L \cap HK = (HK)^n$. Значит, $L \in \Omega_\pi$ и, так как $bH \notin M/H$, то $b \notin HL$.

Тем самым, установлено, что подгруппа $H$ отделима семейством $\Omega_\pi$. Отделимость этим семейством подгруппы $K$ проверяется аналогично. Стало быть, группа $G$ $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема в силу теоремы 4.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] K. W. Gruenberg, "Residual properties of infinite soluble groups", *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.

[2] E. V. Sokolov, "A characterization of root classes of groups", *Comm. Algebra*, **43**:2 (2015), 856–860.

[3] Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо, “Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп”, *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика*, 2002, № 5, 6–10; D. N. Azarov, D. Tieudjo, *On Root-Class Residuality of Generalized Free Products*, 2004, arXiv: math/0408277.

[4] Д. Н. Азаров, Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами”, *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика*, 2008, № 6, 29–42.

[5] Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:1 (2013), 133–137.

[6] Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 10, 27–44.

[7] Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, “Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:1 (2016), 171–185.

[8] D. Tieudjo, “On root-class residuality of some free constructions”, *JP J. Algebra Number Theory Appl.*, **18**:2 (2010), 125–143.

[9] Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп”, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:4 (2014), 148–180.

[10] Д. В. Гольцов, “Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп”, *Матем. заметки*, **97**:5 (2015), 665–669.

[11] G. Rosenberger, S. L. Sasse, “Residual properties of HNN-extensions with cyclic associated subgroups”, *Algebra Colloq.*, **3**:1 (1996), 91–96.

[12] G. Kim, C. Y. Tang, “Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups”, *Canad. Math. Bull.*, **42**:3 (1999), 335–343.

[13] K. B. Wong, P. C. Wong, “Residual finiteness, subgroup separability and conjugacy separability of certain HNN extensions”, *Math. Slovaca*, **62**:5 (2012), 875–884.

[14] Е. А. Туманова, “Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра”, *Сиб. матем. журн.*, **58**:3 (2017), 700–709.

[15] Е. В. Соколов, “Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных $\pi$-групп”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1381–1390.

[16] А. И. Мальцев, “О гомоморфизмах на конечные группы”, *Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та*, **18** (1958), 49–60.

[17] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980.

[18] Е. А. Туманова, *Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, Иваново, 2014.

[19] Е. В. Соколов, *Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп*, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2012.

[20] A. Karras, D. Solitar, “Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 627–643.

[21] Ф. Холл, “Нильпотентные группы”, *Математика. Сб. переводов*, **12**:1 (1968), 3–36.

**Е. В. Соколов**
Ивановский государственный университет
*E-mail*: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
28.11.2016

**Е. А. Туманова**
Ивановский государственный университет
*E-mail*: helenfog@bk.ru