Алгебра и логика, 58, № 6 (2019), 720—740

DOI: 10.33048/alglog.2019.58.604 УДК 512.543

ОБОБЩЁННЫЕ ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП*)

Е. В. СОКОЛОВ, Е. А. ТУМАНОВА

Введение

В связи с изучением строения подгрупп свободного произведения двух групп с объединённой подгруппой Х. Нейман [1] ввела понятие обобщённого свободного произведения произвольного семейства групп. Несколько позднее в совместной работе Б. Неймана и Х. Нейман [2] было определено аналогичное понятие обобщённого прямого произведения групп. К сожалению, вопрос о существовании данных конструкций, точная формулировка которого приводится ниже, удалось решить лишь в самых простых случаях (краткий обзор результатов, полученных для обобщённого прямого произведения, см. в конце § 1). Поэтому широкого распространения в самом общем своём виде они не получили.

Решение упомянутой выше задачи описания подгрупп свободного произведения двух групп с объединённой подгруппой (представляющего собой одновременно обобщённое свободное произведение двух групп) получили А. Каррас и Д. Солитэр [3] с использованием теории групп, дей-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-31-00187.

ствующих на деревьях [4]. Для этого, помимо прочего, ими была введена конструкция древесного произведения групп, её существование обеспечивалось лишь свойствами обобщённого свободного произведения двух групп. Ещё одной структурой, известные теоремы о существовании которой также опираются на свойства обобщённого свободного произведения двух групп, является полигональное произведение групп, см. [5]. Обе эти конструкции достаточно активно изучаются со времени своего появления, однако их аналогов, в основе которых лежало бы не свободное, а прямое произведение групп, до настоящего времени определено не было. Единственным исключением служит центральное произведение групп [6, с. 29], представляющее собой обобщённое прямое произведение двух групп. Вместе с тем, авторы настоящей статьи полагают, что указанные аналоги могут найти широкое применение при исследовании аппроксимационных свойств фундаментальных групп графов групп, определение последней конструкции см. [4, § 5.1]. В данной работе такое применение иллюстрируется на примере HNN-расширения с одной проходной буквой, чьи связанные подгруппы содержатся в центре базовой группы.

С целью описания с единых позиций ряда упоминавшихся выше конструкций и результатов в § 1 определяются обобщённое свободное и обобщённое прямое произведения, ассоциированные с графом групп. Их частными случаями служат обобщённые свободное и прямое произведения, введённые в [1, 2], древесное, полигональное и центральное произведения групп. Основными результатами работы являются два достаточных условия существования ассоциированного с графом групп обобщённого прямого произведения, доставляемые теоремами 1 и 2. В § 2 обсуждаются полученные с их помощью новые результаты об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп. Отметим, что теорема 1 может быть использована и при изучении аппроксимируемости древесных произведений, однако данные исследования выходят за рамки настоящей статьи. Доказательства сформулированных в §§ 1, 2 теорем и следствий приводятся в §§ 3–6.

§ 1. Обобщённые свободные и обобщённые прямые произведения групп

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — непустой связный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством рёбер E, не обязательно конечный, но без кратных рёбер и петель (все вводимые в данном параграфе обозначения и предположения остаются неизменными до конца статьи). Сопоставляя каждой вершине $v \in V$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{e,v}\colon H_e \to G_v$, $\varphi_{e,w}\colon H_e \to G_w$, получаем *граф групп*, который далее для краткости будем называть просто графом и обозначать той же буквой Γ. Группы G_v $(v \in V)$, H_e $(e \in E)$, подгруппы $H_{e,v} = H_e\varphi_{e,v}$ и гомоморфизмы $\varphi_{e,v}$ $(e \in E$, $v \in e)$ будем называть соответственно *вершинными* и *рёберными группами*, *рёберными подгруппами* и *рёберными гомоморфизмами*.

Рассмотрим группы

$$\mathrm{GFP}(\Gamma) = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{e,v} = H_{e,w}\ (e = \{v, w\} \in E)\rangle,$$

$$\mathrm{GDP}(\Gamma) = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{e,v} = H_{e,w}\ (e = \{v, w\} \in E),$$
$$[G_u, G_v] = 1\ (u, v \in V,\ u \neq v)\rangle,$$

образующими которых являются образующие групп G_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения групп G_v $(v \in\in V)$, всевозможные соотношения вида $h\varphi_{e,v} = h\varphi_{e,w}$, где $e = \{v, w\} \in E$, $h \in H_e$, а также, в случае группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, соотношения вида $[g_u, g_v] = 1$, где $u, v \in V$, $u \neq v$, g_u — произвольный образующий группы G_u, g_v — произвольный образующий группы G_v. Очевидно, что группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ представляют собой фактор-группы соответственно свободного и прямого произведений групп G_v $(v \in V)$ по нормальному замыканию множества элементов

$$\{h\varphi_{e,v}(h\varphi_{e,w})^{-1} \mid e = \{v, w\} \in E,\ h \in H_e\}.$$

Отметим также, что группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ изоморфна фактор-группе фундаментальной группы графа Γ по нормальному замыканию множества всех проходных букв.

Группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) будем называть *обобщённым свободным* (соответственно *обобщённым прямым*) *произведением, ассоциированным с графом* Γ, если выполняются следующие два условия:

(i) для каждой вершины $v \in V$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) продолжается до инъективного гомоморфизма, и потому все группы G_v $(v \in V)$ можно считать подгруппами группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (соответственно группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$);

(ii) для каждого ребра $e = \{v, w\} \in E$ в группе $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) имеют место равенства $H_{e,v} = G_v \cap G_w = H_{e,w}$.

Отметим, что если граф Γ является полным, то ассоциированные с ним обобщённые произведения оказываются *обобщённым свободным* и *обобщённым прямым* произведениями в смысле определений, данных в [1, 2] соответственно. Кроме того, группу $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ называют *древесным произведением*, если граф Γ является деревом [3], и *полигональным произведением*, если Γ представляет собой простой цикл [5].

В связи с введёнными понятиями сразу же возникает вопрос о существовании обобщённых произведений, т. е. об условиях, при которых группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ и/или $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ удовлетворяют требованиям (i) и (ii). Хорошо известно, что ассоциированное с графом Γ обобщённое свободное произведение существует в следующих случаях:

— если граф Γ является деревом [3];

— если граф Γ представляет собой простой цикл длины, не меньшей 4, и для любых рёбер $e, f \in E$, инцидентных одной вершине $v \in V$, подгруппы $H_{e,v}$ и $H_{f,v}$ группы G_v пересекаются тривиально [5].

Отметим, что полигональное произведение трёх групп с тривиально пересекающимися рёберными подгруппами уже не обязано удовлетворять требованию (i): соответствующий пример см. в [7].

Переходя к описанию условий существования ассоциированного с графом Γ обобщённого прямого произведения, заметим, что если $e = \{v, w\} \in E$, $g \in G_v$ и $h \in H_{e,v}$, то в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ справедливы равенства $h = h\varphi_{e,v}^{-1}\varphi_{e,w}$ и $[g, h\varphi_{e,v}^{-1}\varphi_{e,w}] = 1$, откуда $[g, h] = 1$. Таким образом, необходимым условием выполнения требования (i) для данной группы является центральность рёберных подгрупп в содержащих их вершинных группах. Вследствие этого обобщённое прямое произведение двух групп в литературе называют также *центральным произведением*.

Если v — произвольная вершина графа Γ, то через E_v будем обозначать множество всех рёбер, инцидентных вершине v, а через H_v — подгруппу группы G_v, порождённую всеми подгруппами семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$ (т. е. всеми рёберными подгруппами, содержащимися в группе G_v). Понятно, что подгруппа H_v лежит в центре $\mathcal{Z}(G_v)$ группы G_v тогда и только тогда, когда $H_{e,v} \leqslant \mathcal{Z}(G_v)$ для каждого ребра $e \in E_v$.

Следующие две теоремы утверждают, что ассоциированное с графом Γ обобщённое прямое произведение существует в ситуациях, аналогичных указанным выше двум случаям, а также дают некоторые достаточные условия отсутствия кручения в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть граф Γ является деревом и для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Тогда ассоциированное с графом Γ обобщённое прямое произведение существует.*

Если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и для любых $e \in E$, $v \in e$ подгруппа $H_{e,v}$ изолирована в группе G_v, то группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ не имеет кручения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v и представляет собой прямое произведение подгрупп семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$. Тогда ассоциированное с графом Γ обобщённое прямое произведение существует.*

Если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и для каждой вершины $v \in V$ произведение любого числа подгрупп из семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$ изолировано в группе G_v, то группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ не имеет кручения.

Легко заметить, что если для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ выполнено условие (i) или же условия (i) и (ii), то это же верно и для группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$. Поэтому из теоремы 2 следует, что полигональное произведение с центральными тривиально пересекающимися объединёнными подгруппами существует и в случае трёх вершинных групп.

Пусть граф групп Γ_1 получается из Γ путём замены для каждой вершины $v \in V$ группы G_v на H_v. Поскольку образы всех рёберных гомоморфизмов графа Γ содержатся в подгруппах H_v $(v \in V)$, можно считать, что рёбрам графа Γ_1 соответствуют те же гомоморфизмы, что и рёбрам графа Γ. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение, представляющее собой аналог [2, теор. 2] и позволяющее свести изучение вопроса о существовании ассоциированного с графом обобщённого прямого произведения к рассмотрению случая, когда все вершинные группы такого произведения абелевы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть для любой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *существует тогда и только тогда, когда существует группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$.

Если Γ — полный граф и все его вершинные группы являются локально циклическими, то некоторые естественные необходимые условия существования соответствующего обобщённого прямого произведения оказываются и достаточными [8]. Это верно также в случае, когда граф Γ содержит три вершины и все вершинные группы абелевы [9]. Однако, если Γ — полный граф с четырьмя вершинами, которым сопоставлены абелевы группы, упомянутые выше необходимые условия существования обобщённого прямого произведения перестают быть достаточными [10, §16], что оставляет вопрос об отыскании критерия существования такого произведения открытым.

Заметим ещё, что группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, разумеется, могут быть определены и для несвязного графа Γ. Однако, решение задачи о существовании обобщённых произведений, ассоциированных с таким графом, легко сводится к рассмотрению случая, когда граф является связным. В самом деле, если Γ_i $(i \in \mathcal{I})$ — компоненты связности графа Γ, то группы $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ представляют собой обычные свободное и прямое произведения групп $\mathrm{GFP}(\Gamma_i)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma_i)$ соответственно. Поэтому группа $\mathrm{GFP}(\Gamma)$ (группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$) удовлетворяет условию (i) или условиям (i) и (ii) тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают группы $\mathrm{GFP}(\Gamma_i)$ (соответственно $\mathrm{GDP}(\Gamma_i)$) для всех $i \in \mathcal{I}$.

§ 2. Новые результаты об аппроксимируемости HNN-расширений групп

Введённая в § 1 конструкция обобщённого прямого произведения, ассоциированного с графом групп, и теоремы о её существовании позволяют получить ряд результатов об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами. Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ или, короче, $\mathcal{C}$-*аппроксимируемой*, если для каждого её неединичного элемента найдётся гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-группу), при котором образ этого элемента по-прежнему отличен от 1.

Согласно [11] *корневым* называется класс групп $\mathcal{C}$, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяющий следующему условию: если $1 \leqslant Z \leqslant \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд некоторой группы X, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{C}$, то в группе X найдётся нормальная подгруппа T, такая что $T \leqslant Z$ и $X/T \in \mathcal{C}$. Лучше понять, что же именно представляют собой корневые классы, позволяет равносильное определение, указанное в [12]. Согласно ему класс групп является корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Из второго определения легко следует, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс.

Очевидно, что к числу корневых относятся классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), разрешимых групп, всех групп без кручения, а также всевозможные их пересечения. Поэтому изучение аппроксимируемости не каким-то конкретным, а произвольным корневым классом групп позволяет доказать сразу несколько утверждений, обобщающих, дополняющих или уточняющих известные результаты.

Наибольшее количество сведений об аппроксимируемости произвольными корневыми классами (удовлетворяющими, возможно, некоторым дополнительным ограничениям) получено для свободных конструкций групп [12–23]. Эти исследования стали возможны благодаря сделанному Д. Н. Азаровым (см. [13]) замечанию о том, что любая свободная группа аппроксимируется каждым *нетривиальным* (т. е. содержащим хотя бы одну неединичную группу) корневым классом групп.

Рассмотрим HNN-расширение

$$X = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$$

группы B с подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма $\varphi\colon H \to K$ (используемые здесь и далее термины и обозначения согласованы с [24]). Следующее утверждение общего характера вытекает непосредственно из [13] и теоремы о строении подгрупп HNN-расширений [25].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [14, теор. 4.1]**.** *Пусть $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп. Если группа B $\mathcal{C}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H и K, то и группа X будет $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Предположим теперь, что связанные подгруппы H и K лежат в центре базовой группы B. Критерии аппроксимируемости HNN-расширения указанного вида классами всех конечных групп и конечных p-групп получены в [26, 27] соответственно. Аппроксимируемость данной конструкции произвольным корневым классом, замкнутым относительно взятия фактор-групп, исследовалась в [16, 17, 21, 22]. К настоящему моменту известны критерии аппроксимируемости таким классом в случае, когда связанные подгруппы совпадают [16, теор. 3] или являются циклическими [21, 22]. Ещё одним результатом, полученным в данном направлении, служит

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Предположим также, что группа B $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K лежат в её центре и выполняется одно из следующих двух условий:*

(1) класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу и существует гомоморфизм ρ группы B на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H, K;

(2) класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и существует гомоморфизм ρ группы B на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H, K и такой, что $H\rho \cap K\rho = 1$.

Тогда существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий ρ. В частности, группа X будет $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Если в дополнение к этому группа $B\rho$ не имеет кручения, а подгруппы $H\rho$ и $K\rho$ изолированы в ней, то образ гомоморфизма σ можно считать группой без кручения, а значит если группа B аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения, то и группа X аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Если подгруппы H и K конечны, то аппроксимируемость группы X корневым классом $\mathcal{C}$ влечёт за собой существование гомоморфизма данной группы на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективного на подгруппах H и K, см. доказательство следствия 2. В общем случае наличие такого гомоморфизма, что обеспечивает теорема 3, является более сильным утверждением, и именно оно зачастую используется при исследовании аппроксимируемости HNN-расширений с бесконечными связанными подгруппами, см. [16].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathcal{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, подгруппы H и K лежат в центре группы B. Группа X является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(1) группа B принадлежит классу $\mathcal{C}$ и $H \cap K = 1$;

(2) группа B $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H, K конечны и $H \cap \cap K = 1$;

(3) группа B аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг.

Непосредственно из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть B — разрешимая группа, подгруппы H и*

K лежат в её центре. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) *группа X аппроксимируется разрешимыми группами*;

(2) *если группа B не имеет кручения, а подгруппы H и K изолированы в ней, то группа X аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Отметим, что следствие 2 обобщает основные результаты статьи [17], полученные с использованием других методов, а следствие 3 обобщает [28, теор. 1.1].

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

Основную часть доказательства теорем 1 и 2 составляют три приводимые далее предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть граф* Γ *содержит лишь одно ребро* $e = \{v, w\}$, *подгруппа* $H_{e,v}$ *лежит в центре группы* G_v, *подгруппа* $H_{e,w}$ — *в центре группы* G_w. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii);

(2) *если* $K \leqslant G_v$ *и* $K \cap H_{e,v} = 1$, *то в группе* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *имеет место равенство* $K \cap G_w = 1$;

(3) *если группы* G_v *и* G_w *не имеют кручения и подгруппа* $H_{e,v}$ *изолирована в группе* G_v, *то группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть D — обычное прямое произведение групп G_v и G_w. Так как подгруппы $H_{e,v}$ и $H_{e,w}$ содержатся в центрах групп G_v и G_w соответственно, то подмножество $M = \{h\varphi_{e,v}(h\varphi_{e,w})^{-1} \mid h \in H_e\}$ элементов группы D является центральной подгруппой в D, и потому $\mathrm{GDP}(\Gamma) \cong D/M$. Из однозначности записи элементов группы D в виде $g_v g_w$, где $g_v \in G_v$, $g_w \in G_w$, следует, что если $g_v g_w \in M$, то $g_v = h\varphi_{e,v}$ и $g_w = (h\varphi_{e,w})^{-1}$ для некоторого элемента $h \in H_e$, а значит $g_v \in H_{e,v}$ и $g_w \in H_{e,w}$. Отсюда и из инъективности отображений $\varphi_{e,v}$, $\varphi_{e,w}$ вытекает также, что если $g_v \in M$ ($g_w \in M$), то $g_v = 1$ (соответственно $g_w = 1$).

(2) Из утверждения (1) следует, что если $K \leqslant G_v$ и $K \cap H_{e,v} = 1$, то $K \cap G_w = (K \cap G_v) \cap G_w = K \cap H_{e,v} = 1$.

(3) Пусть элементы $g_v \in G_v$, $g_w \in G_w$ и число n таковы, что $(g_v g_w)^n = g_v^n g_w^n \in M$. Тогда $g_v^n \in H_{e,v}$, и в силу изолированности подгруппы $H_{e,v}$ имеет место включение $g_v \in H_{e,v}$. Пусть $g'_v = g_v \varphi_{e,v}^{-1} \varphi_{e,w}$. Тогда $g'_v \equiv g_v \pmod M$ и $(g'_v g_w)^n \in M$. С другой стороны, $g'_v g_w \in G_w$ и по доказанному выше $(g'_v g_w)^n = 1$. Из отсутствия кручения в группе G_w теперь следует, что $g'_v g_w = 1$. Таким образом, $g_w = (g'_v)^{-1}$ и $g_v g_w \in M$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть граф* Γ *представляет собой конечное дерево и для каждой вершины* $v \in V$ *подгруппа* H_v *лежит в центре группы* G_v. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii);

(2) *если все группы* G_v $(v \in V)$ *не имеют кручения и для любых* $e \in E$, $v \in e$ *подгруппа* $H_{e,v}$ *изолирована в группе* G_v, *то группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по количеству вершин в графе Γ. Если вершина только одна, утверждения (1) и (2) очевидны. Поэтому будем считать, что граф Γ имеет по крайней мере две вершины и доказываемое предложение справедливо для обобщённого прямого произведения, ассоциированного с графом Γ_1, который получается из Γ путём удаления некоторой концевой вершины v и ведущего в эту вершину ребра $e = \{v, w\}$.

(1) Пусть $\overline{\Gamma}$ — граф групп, содержащий одно ребро $\overline{e} = \{\overline{v}, \overline{w}\}$, вершине $\overline{v}$ сопоставлена группа G_v, вершине $\overline{w}$ — группа $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$, ребру $\overline{e}$ — группа H_e и вложения $\varphi_{\overline{e},\overline{v}} = \varphi_{e,v}$ и $\varphi_{\overline{e},\overline{w}} = \varphi_{e,w}$ (группу G_w можно считать подгруппой в $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$ в силу индуктивного предположения). Тогда группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\overline{\Gamma})$ имеют одно и то же представление.

Подгруппа $H_e \varphi_{\overline{e},\overline{w}}$ центральна в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$, поэтому к $\mathrm{GDP}(\overline{\Gamma})$ можно применить предложение 2. Из него и индуктивного предположения сразу же вытекает, что группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ удовлетворяет условию (i), а также равенствам из условия (ii) для всех рёбер графа Γ_1. В силу предложения 2, $H_{e,v} = G_v \cap \mathrm{GDP}(\Gamma_1) = H_e \varphi_{\overline{e},\overline{w}}$. С другой стороны, $H_e \varphi_{\overline{e},\overline{w}} = H_{e,w} \leqslant G_w$, поэтому

$$G_v \cap \mathrm{GDP}(\Gamma_1) = G_v \cap \mathrm{GDP}(\Gamma_1) \cap G_w = G_v \cap G_w.$$

Таким образом, для ребра e указанные равенства также имеют место.

(2) Достаточно воспользоваться представлением группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ в виде обобщённого прямого произведения двух групп, предложением 2 и индуктивным предположением. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть Γ — конечный граф, для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v и представляет собой прямое произведение подгрупп семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii);

(2) *если $v \in V$, $K \leqslant G_v$ и $K \cap H_v = 1$, то в группе* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *имеет место равенство* $K \cap \mathrm{sgp}\{G_w \mid w \in V,\ w \neq v\} = 1$;

(3) *если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и для каждой вершины $v \in V$ произведение любого числа подгрупп из семейства $\{H_{e,v} \mid e \in E_v\}$ изолировано в группе G_v, то группа* $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ *не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что предложение достаточно доказать для случая, когда Γ — полный граф. В противном случае добавим к Γ недостающие рёбра, сопоставив каждому из них единичную группу. Очевидно, что полученный в результате граф групп Γ^* по-прежнему удовлетворяет условиям предложения, а группа $\mathrm{GDP}(\Gamma^*)$ имеет то же представление, что и группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$. Отсюда следует, что если утверждения (1)–(3) выполняются для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma^*)$, то они справедливы и для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$.

Итак, Γ — полный граф. Воспользуемся индукцией по количеству его вершин. Утверждения (1)—(3) очевидны, если вершина одна, и следуют из предложения 2, если вершин две. Поэтому будем считать, что граф Γ имеет по крайней мере три вершины и, какова бы ни была вершина $u \in$ $\in V$, доказываемое предложение справедливо для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$, где $\Gamma - u$ — граф, получающийся из Γ путём удаления вершины u и всех рёбер из множества E_u (отметим, что этот граф также оказывается полным).

Покажем, что подгруппа L группы $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$, порождённая всеми подгруппами $H_{e,v}$, где $e \in E_u$, $v \in e$, $v \neq u$, является их прямым произведением и, следовательно, изоморфна H_u.

В самом деле, пусть $e \in E_u$, $v \in e$ и $v \neq u$. По условию подгруппа H_v представляет собой прямое произведение подгрупп семейства $\{H_{f,v} \mid f \in E_v\}$. Поэтому

$$H_{e,v} \cap \operatorname{sgp}\{H_{f,v} \mid f \in E_v,\ f \neq e\} = 1.$$

Отсюда следует, что группа $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$ и подгруппа $K = H_{e,v}$ удовлетворяют условиям утверждения (2). Воспользовавшись индуктивным предположением, получаем, что в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$ справедливо равенство

$$H_{e,v} \cap \operatorname{sgp}\bigl\{G_w \mid w \in V \setminus \{u,v\}\bigr\} = 1.$$

Поскольку

$$\operatorname{sgp}\bigl\{H_{f,x} \mid f \in E_u,\ f \neq e,\ x \in f,\ x \neq u\bigr\} \leqslant \operatorname{sgp}\bigl\{G_w \mid w \in V \setminus \{u,v\}\bigr\},$$

это означает, что подгруппа $H_{e,v}$ выделяется в L прямым сомножителем.

Таким образом, подгруппы L и H_u изоморфны и лежат в центрах групп $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$ и G_u соответственно. Это позволяет рассмотреть обобщённое прямое произведение P групп $\mathrm{GDP}(\Gamma - u)$ и G_u с рёберными подгруппами L и H_u. Представление группы P содержит все образующие символы и определяющие соотношения группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, а также дополнительные соотношения вида $h = h\varphi$, где $h \in H_u$ и $\varphi\colon H_u \to L$ — изоморфизм подгрупп, продолжающий отображения $\varphi_{e,u}^{-1}\varphi_{e,v}$ ($e = \{u,v\} \in E_u$). Все эти дополнительные соотношения выводятся из соотношений группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, и потому тождественное отображение образующих группы P в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ определяет изоморфизм α первой на вторую. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
G_u \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, equal] & \mathrm{GDP}(\Gamma) & G_v \arrow[l, "\imath"'] \arrow[d, "\imath"] \\
G_u \arrow[r, "\imath"] & P \arrow[u, "\alpha"'] & \mathrm{GDP}(\Gamma - u) \arrow[l, "\imath"']
\end{tikzcd}$$

для всех $v \in V \setminus \{u\}$, индуктивного предположения и предложения 2 вытекает, что группа GDP(Γ) удовлетворяет условию (i), для неё выполняется утверждение (3), а также равенства из условия (ii), соответствующие рёбрам графа $\Gamma - u$ (в этой и всех последующих диаграммах символом $\imath$ обозначены гомоморфизмы, определяемые тождественными отображениями образующих).

Отметим теперь, что в графе Γ по крайней мере три вершины и вершина u была выбрана из них произвольным образом. Поэтому можно считать, что если e — некоторое наперёд заданное ребро графа Γ, то $u \notin e$. Тогда ребро e принадлежит $\Gamma - u$, и для него выполняются равенства из условия (ii). Точно так же можно считать, что подгруппа K из формулировки утверждения (2) содержится в группе G_u, что даёт возможность воспользоваться предложением 2. Тем самым, для группы GDP(Γ) выполняются утверждения (1) и (2). Предложение доказано.

Переходя непосредственно к доказательству теорем 1 и 2, заметим, что если ω — некоторое слово от образующих групп G_v $(v \in V)$ и определяемый этим словом элемент группы GDP(Γ) равен единице, то слово ω может быть преобразовано в пустое путём конечного числа операций, в каждой из которых фигурируют образующие лишь конечного числа вершинных групп. Выбирая максимальный подграф Γ_1 графа Γ, содержащий все соответствующие этим группам вершины, получаем, что в группе GDP(Γ_1) элемент, определяемый словом ω, также равен единице. Поэтому все доказываемые для группы GDP(Γ) утверждения вытекают из аналогичных утверждений для группы GDP(Γ_1), имеющих место в силу предложений 3 и 4. В частности, если $e = \{v, w\}$ — некоторое ребро графа Γ, ω_v и ω_w — слова от образующих групп G_v и G_w соответственно и $\omega = \omega_v\omega_w$, то из равенства единице определяемого словом ω элемента группы GDP(Γ) следует, что ω_v задаёт элемент подгруппы $H_{e,v}$, а ω_w — элемент подгруппы $H_{e,w}$ и, таким образом, $H_{e,v} = G_v \cap G_w = H_{e,w}$.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Предположим сначала, что $B \in \mathcal{C}$ и ρ — тождественное отображение.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{Z}$ выполняется $V_n = \mathbb{Z}$, если $n \leqslant 2$, $V_n = \mathbb{Z}_n$, если $n \geqslant 3$; $E_n = \bigl\{\{i,\ i+1\} \mid i \in V_n\bigr\}$; Γ_n — граф с множеством вершин V_n и множеством рёбер E_n. Для каждого $i \in V_n$ положим, что B_i — изоморфная копия группы B, $\beta_i\colon B \to B_i$ — изоморфизм, $H_i = H\beta_i$ и $K_i = K\beta_i$. Сопоставим каждой вершине $i \in V_n$ группу B_i, каждому ребру $\{i,\ i+ {}$ $+\ 1\} \in E_n$ — группу H и вложения $\varphi\beta_i\colon H \to B_i$, $\beta_{i+1}|_H\colon H \to B_{i+1}$. Понятно, что полученный граф групп Γ_n представляет собой простой цикл длины n, если $n \geqslant 3$, и бесконечную цепь, если $n \leqslant 2$.

Легко понять, что изоморфизмы $\beta_i^{-1}\beta_{i+1}\colon B_i \to B_{i+1}$ вершинных групп индуцируют автоморфизм α группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$, а порядок q этого автоморфизма бесконечен при $n \leqslant 2$ и равен n при $n \geqslant 3$. Поэтому можно рассмотреть расщепляемое расширение S группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ при помощи циклической группы A порядка q с порождающим a, сопряжение которым действует на группе $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ так же, как и α.

Согласно определению графа Γ_n для каждого элемента $h \in H$ в группе $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ имеет место равенство $h\beta_1 = h\varphi\beta_0$. Так как в группе S выполнено $h\beta_1 = a^{-1}(h\beta_0)a$, то отображение слов, действующее на образующих группы B как изоморфизм β_0 и сопоставляющее букве t элемент a, переводит все определяющие соотношения группы X в равенства, верные в группе S, и поэтому задаёт гомоморфизм $\sigma\colon X \to S$.

При $n \leqslant 2$ группа $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ согласно теореме 1 удовлетворяет условию (i). Поскольку она вкладывается в S, группу B_0 можно считать подгруппой последней. В силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, "\sigma"] \\ B \arrow[r, "\beta_0"] & S \end{tikzcd}$$

гомоморфизм σ действует на группе B инъективно. Поэтому его можно считать продолжением ρ.

Аналогичные рассуждения справедливы и при $n \geqslant 3$, если $H \cap K = {}$ $= 1$. В самом деле, рёберные подгруппы группы B_i являются образами подгрупп H и K относительно изоморфизма β_i, поэтому они пересекаются тривиально, и группа $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ удовлетворяет условию (i) в силу теоремы 2.

Осталось выбрать число n так, чтобы выполнялось включение $S \in \mathcal{C}$.

Класс $\mathcal{C}$ нетривиален, т. е. содержит хотя бы одну неединичную группу, и в силу замкнутости относительно взятия подгрупп ему принадлежит и некоторая циклическая группа Q. Порядок данной группы можно считать бесконечным, если среди $\mathcal{C}$-групп есть непериодические, и большим 2 в противном случае (последнее верно ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений). В первом случае положим n равным 0, во втором — порядку группы Q. Тогда группа A и аддитивная группа кольца V_n изоморфны Q, а значит принадлежат $\mathcal{C}$.

Поскольку $\mathcal{C}$ — корневой класс, он включает декартово и прямое произведения групп B_i $(i \in V_n)$. Поскольку $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и расширений, справедливы включения $\mathrm{GDP}(\Gamma_n) \in \mathcal{C}$ и $S \in \in \mathcal{C}$. Отметим ещё, что если группа B не имеет кручения и подгруппы H, K изолированы в ней, то при $n = 0$ в силу теоремы 1 группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_n)$ и S также не имеют кручения.

Итак, если $B \in \mathcal{C}$, искомый гомоморфизм построен.

Рассмотрим теперь общий случай и положим $N = \ker \rho$. Так как $N \cap H = 1 = N \cap K$, то отображение $\varphi_N \colon HN/N \to KN/N$, переводящее смежный класс hN $(h \in H)$ в смежный класс $(h\varphi)N$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому можно рассмотреть HNN-расширение

$$X_N = \langle B/N, \tau;\ \tau^{-1} HN/N \tau = KN/N,\ \varphi_N \rangle$$

$\mathcal{C}$-группы B/N.

Легко видеть, что отображение слов, сопоставляющее образующему b группы B смежный класс $b\rho$ и букве t — букву τ, переводит все определяющие соотношения группы X в равенства, верные в группе X_N, а потому задаёт гомоморфизм $\theta \colon X \to X_N$. Ввиду коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\imath} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\rho} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ B/N & \xrightarrow{\imath} & X_N \end{array}$$

этот гомоморфизм действует на группе B так же, как и ρ. Согласно вышеприведённым рассуждениям доказываемая теорема справедлива для группы X_N. Поэтому отображение θ можно продолжить до искомого гомоморфизма σ. Аппроксимируемость группы X следует из предложения 1.

§ 5. Доказательство следствия 1

Покажем сначала, что группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$ удовлетворяют условию (i) одновременно.

Отображения образующих групп H_v $(v \in V)$ в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma)$, действующие так же, как естественные вложения $\delta_v\colon H_v \to G_v$, продолжаются до гомоморфизма $\delta\colon \mathrm{GDP}(\Gamma_1) \to \mathrm{GDP}(\Gamma)$. При этом для каждой вершины $v \in V$ оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_v & \xrightarrow{\ \imath\ } & \mathrm{GDP}(\Gamma_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_v} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ G_v & \xrightarrow{\ \imath\ } & \mathrm{GDP}(\Gamma) \end{array}$$

Если группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ удовлетворяет условию (i), то это же верно и для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$.

Пусть теперь для группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$ выполнено условие (i). Тогда группы H_v $(v \in V)$ можно считать её подгруппами. Рассмотрим граф-звезду Γ_2, центральной вершине которого соответствует группа $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$, остальным вершинам — группы G_v $(v \in V)$, рёбрам — группы H_v $(v \in V)$, их естественные вложения δ_v в группы G_v $(v \in V)$ и тождественные отображения в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$.

Используя преобразования Титце и определения рёберных гомоморфизмов графов Γ_1 и Γ_2, нетрудно показать, что все образующие групп H_v $(v \in V)$, а также определяющие соотношения вида $[h_u, h_v] = 1$, где $u, v \in V$, $u \neq v$, h_u — образующий группы H_u, h_v — образующий группы H_v, могут быть исключены из представления группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$, которое в результате превратится в представление группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$. Таким образом, тождественное отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$ продолжается до изоморфизма $\alpha\colon \mathrm{GDP}(\Gamma) \to \mathrm{GDP}(\Gamma_2)$.

Поскольку все подгруппы H_v $(v \in V)$ лежат в центре группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$, к группе $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$ можно применить теорему 1, согласно которой тождественные отображения образующих групп $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$ и G_v $(v \in V)$ в группу $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$ продолжаются до инъективных гомоморфизмов. В силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_v \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, equal] & \mathrm{GDP}(\Gamma) \arrow[d, "\alpha"] \\ G_v \arrow[r, "\imath"] & \mathrm{GDP}(\Gamma_2) \end{tikzcd}$$

для каждой вершины $v \in V$ группа $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ удовлетворяет условию (i).

Предположим теперь, что группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ и $\mathrm{GDP}(\Gamma_1)$ удовлетворяют условию (i) и покажем, что условие (ii) выполнено для них одновременно. Поскольку для каждой вершины $v \in V$ изоморфизм α отображает подгруппу G_v группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ на аналогичную подгруппу группы $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$, далее вместо группы $\mathrm{GDP}(\Gamma)$ будем рассматривать группу $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$.

Пусть $e = \{v, w\} \in E$. Как и при доказательстве предложения 3, представим группу $\mathrm{GDP}(\Gamma_2)$ в виде обобщённого прямого произведения групп G_v и $\mathrm{GDP}(\Gamma_2 - v)$, где $\Gamma_2 - v$ обозначает граф, получающийся из Γ_2 удалением вершины v и ведущего в эту вершину ребра. Применяя к этому произведению теорему 1, получаем, что $G_v \cap \mathrm{GDP}(\Gamma_2 - v) = H_v$. В силу $G_w \leqslant \mathrm{GDP}(\Gamma_2 - v)$ имеет место $G_v \cap G_w \leqslant H_v$. Аналогичным образом доказывается, что $G_v \cap G_w \leqslant H_w$, и значит $G_v \cap G_w = H_v \cap H_w$. Таким образом, оба эти пересечения совпадают с подгруппами $H_{e,v}$ и $H_{e,w}$ одновременно.

§ 6. Доказательство следствия 2

Подгруппа HK конечна или имеет конечный ранг одновременно с подгруппами H и K. В силу $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы B для каждого неединичного элемента $b \in HK$ найдётся не содержащая этого элемента нормальная подгруппа N_b, такая что $B/N_b \in \mathcal{C}$. По теореме Ремака фактор-группа B/N, где

$$N = \bigcap_{b \in HK \setminus \{1\}} N_b,$$

изоморфна подгруппе декартова произведения P $\mathcal{C}$-групп B/N_b. Если подгруппа HK конечна, то количество сомножителей в этом произведении также конечно, и $P \in \mathcal{C}$. Значит, $B/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap HK = 1$.

Если группа B аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения и подгруппа HK имеет конечный ранг, то существование такой нормальной подгруппы N группы B, что B/N — $\mathcal{C}$-группа без кручения и $N \cap HK = 1$, обеспечивается [20, предлож. 11]. Наконец, если $B \in \mathcal{C}$, в качестве N можно взять единичную подгруппу.

Таким образом, в любом случае существует гомоморфизм ρ группы B на $\mathcal{C}$-группу, инъективный на подгруппе HK. При этом, если $H \cap K = 1$, то $H\rho \cap K\rho = 1$. Значит, требуемое вытекает из теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Neumann*, Generalized free products with amalgamated subgroups, Am. J. Math., **70**, No. 3 (1948), 590—625.
2. *B. H. Neumann, H. Neumann*, A remark on generalized free products, J. Lond. Math. Soc., **25** (1950), 202—204.
3. *A. Karrass, D. Solitar*, The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup, Trans. Amer. Math. Soc., **150**, No. 1 (1970), 227—255.
4. *J.-P. Serre*, Trees, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1980.
5. *R. B. J. T. Allenby*, Polygonal products of polycyclic by finite groups, Bull. Aust. Math. Soc., **54**, No. 3 (1996), 369—372.
6. *D. Gorenstein*, Finite Groups, 2nd ed., New York, Chelsea Pub. Co., 1980.
7. *G. Higman*, A finitely generated infinite simple group, J. Lond. Math. Soc., **26** (1951), 61—64.
8. *H. Neumann*, Generalized free sums of cyclical groups, Am. J. Math., **72**, No. 4 (1950), 671—685.
9. *H. Neumann*, On an amalgam of abelian groups, J. Lond. Math. Soc., **26** (1951), 228—232.

10. *B. H. Neumann*, An essay on free products of groups with amalgamations, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., **246** (1954), 503—554.

11. *K. W. Gruenberg*, Residual properties of infinite soluble groups, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **7** (1957), 29—62.

12. *E. V. Sokolov*, A characterization of root classes of groups, Commun. Algebra, **43**, No. 2 (2015), 856—860.

13. *Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо*, Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп, Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Матем., Вып. 5 (2002), 6—10.

14. *D. Tieudjo*, Root-class residuality of some free constructions, JP J. Algebra Number Theory Appl., **18**, No. 2 (2010), 125—143.

15. *Д. В. Гольцов*, О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп, Чебышевский сб., **14**, № 3 (2013), 34—41.

16. *Е. А. Туманова*, Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп, Модел. и анализ информ. систем, **21**, № 4 (2014), 148—180.

17. *Д. В. Гольцов*, Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп, Матем. заметки, **97**, № 5 (2015), 665—669.

18. *Е. В. Соколов*, Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп, Матем. заметки, **97**, № 5 (2015), 767—780.

19. *Е. А. Туманова*, Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением, Изв. вузов. Матем., 2015, № 10, 27—44.

20. *Е. В. Соколов, Е. А. Туманова*, Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп, Сиб. матем. ж., **57**, № 1 (2016), 171—185.

21. *Е. В. Соколов, Е. А. Туманова*, Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами, Матем. заметки, **102**, № 4 (2017), 597—612.

22. *Е. А. Туманова*, Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра, Сиб. матем. ж., **58**, № 3 (2017), 700—709.

23. *Е. А. Туманова*, Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами, Сиб. матем. ж., **60**, № 4 (2019), 891—906.

24. *Р. Линдон, П. Шупп*, Комбинаторная теория групп, М., Мир, 1980.

25. *A. Karrass, D. Solitar*, Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation, Can. J. Math., **23** (1971), 627—643.

26. *Д. И. Молдаванский*, Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп, Вестн. Иван. гос. ун-та, 2002, Вып. 3, 123—133.

27. *Д. И. Молдаванский*, Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп, Вестн. Иван. гос. ун-та, 2003, Вып. 3, 102—116.

28. *E. Raptis, D. Varsos*, Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group, J. Pure Appl. Algebra, **59**, No. 3 (1989), 285—290.

Поступило 12 февраля 2019 г.

Окончательный вариант 12 февраля 2020 г.

Адреса авторов:

СОКОЛОВ Евгений Викторович, Ивановский гос. ун-т, ул. Ермака, 39, г. Иваново, 153025, РОССИЯ. e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

ТУМАНОВА Елена Александровна, Ивановский гос. ун-т, ул. Ермака, 39, г. Иваново, 153025, РОССИЯ. e-mail: helenfog@bk.ru