Соколов Е. В.

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

В настоящей работе рассматриваются группы вида $G_k=\langle a, b;\ a^{-1}ba=b^k\rangle$, где $|k|>1$ — произвольное целое число. Хорошо известно, что все они финитно аппроксимируемы. Здесь получен критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения с объединенной подгруппой двух таких групп.

Теорема. *Пусть* $G_k=\langle a, b;\ a^{-1}ba=b^k\rangle$, $G_l=\langle c, d;\ c^{-1}dc=d^l\rangle$, $H\leq G_k$, $K\leq G_l$ — *некоторые подгруппы*, $\varphi\colon H\to K$ — *произвольный изоморфизм*, $P=\langle G_k, G_l;\ H=K, \varphi\rangle$ — *свободное произведение групп* G_k *и* G_l *с подгруппами* H *и* K, *объединенными относительно изоморфизма* φ. *Группа* P *финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы* H *и* K *финитно отделимы. В частности, если подгруппы* H *и* K *имеют конечный индекс в группах* G_k *и* G_l, *соответственно, то группа* P *финитно аппроксимируема.*

В действительности доказано нечто большее, а именно, найден эффективный способ, позволяющий для любых двух групп G_k и G_l и их изоморфных подгрупп H и K определить, является ли свободное произведение данных групп с указанными объединенными подгруппами финитно аппроксимируемым.

В § 1 получено описание всех подгрупп группы G_k, а также приведены некоторые достаточные условия финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. В § 2 производится доказательство сформулированной выше теоремы.

Обозначения и терминология, относящиеся к конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой, согласованы с монографией [1]. Как обычно, символом $\mathbf{Z}$ обозначается множество всех целых чисел, символом $\boldsymbol{N}$ — множество положительных целых чисел; если $x, y\in\mathbf{Z}$, $x|y$ означает, что x делит y, (x, y) — наибольший общий делитель чисел x и y, $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y. Если w

---

«Молодая наука – 2000». Сборник научных статей аспирантов и студентов ИвГУ. Часть 1. Иваново: ИвГУ, 2000. С. 229–238.

— некоторое слово от символов a, b, c,…, $\sigma_a(w)$ обозначает сумму показателей по a в слове w. Через (M), где M — некоторое множество элементов группы G, будем обозначать подгруппу группы G, порожденную M.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть A, B — произвольные группы, $H \le A$, $K \le B$ — некоторые подгруппы, $\varphi: H \to K$ — произвольный изоморфизм, $P = \langle A, B; H = K, \varphi \rangle$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Подгруппы $R \le A$, $S \le B$ будем называть (H, K, φ)-совместимыми, если $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Будем говорить также, что семейство нормальных подгрупп $\{N_\lambda\}$ группы A является фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$, H-фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = 1$ и $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HN_\lambda = H$.

Имеет место следующее достаточное условие финитной аппроксимируемости группы P (доказательство см. в работе [2]).

Теорема 1.1. *Пусть* $\{R_\lambda, S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *— максимальное по включению семейство упорядоченных пар нормальных* (H, K, φ)*-совместимых подгрупп конечного индекса групп* A *и* B, *соответственно. Если* $\{R_\lambda\}$ — H-*фильтрация*, $\{S_\lambda\}$ — K-*фильтрация*, *то группа* P *финитно аппроксимируема*.

В том случае, когда объединяемые подгруппы имеют конечный индекс в сомножителях, теорему 1.1 можно упростить.

Теорема 1.2. *Пусть* A, B *— конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы*, $H \le A$, $K \le B$ *— подгруппы конечного индекса*, *и пусть существует нормальная подгруппа* N *группы* A *конечного индекса такая*, *что* $N \le H$ *и* $N\varphi$ *— нормальная подгруппа группы* B. *Тогда группа* P *является финитно аппроксимируемой*.

Доказательство. Легко видеть, что отображение $\varphi_{N,N\varphi}: H/N \to K/N\varphi$, $(hN)\varphi_{N,N\varphi} = (h\varphi)N\varphi$ является изоморфизмом подгрупп; определим группу $P_{N,N\varphi} = \langle A/N, B/N\varphi; H/N = K/N\varphi, \varphi_{N,N\varphi} \rangle$. Эта группа представляет собой свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных групп и, как известно ([2]), является финитно аппроксимируемой.

Пусть $g \in P$, $g \ne 1$. Легко видеть, что естественные гомоморфизмы $\sigma: H \to H/N$ и $\tau: K \to K/N\varphi$ продолжаются до гомоморфизма $\rho_{N,N\varphi}: P \to P_{N,N\varphi}$. Поэтому, если $g \notin N =$

Ker $\rho_{N,N\varphi}$ и, следовательно, $g\rho_{N,N\varphi}\neq 1$, то для подходящего гомоморфизма ψ группы $P_{N,N\varphi}$ на конечную группу $g(\rho_{N,N\varphi}\psi)\neq 1$.

Пусть теперь $g\in N$. Так как группа A финитно аппроксимируема, в ней найдется нормальная подгруппа U конечного индекса, не содержащая g. Положим $M=U\cap N$.

Будучи подгруппой конечного индекса конечно порожденной группы, N сама является конечно порожденной. Как известно, в этом случае M можно считать характеристической подгруппой N и, следовательно, нормальной подгруппой конечного индекса группы A. Соответственно, $M\varphi$ будет нормальной подгруппой конечного индекса группы B. Повторяя приведенные выше рассуждения, найдем гомоморфизм группы P на конечную группу, при котором g переходит в элемент, отличный от единицы. ■

Теперь перейдем к описанию подгрупп группы G_k.

Обозначим через L^v нормальное замыкание в группе G_k элемента b^v, $v\in \boldsymbol{N}$ (вместо L^1 будем писать просто L, при необходимости будем также использовать обозначения L_k^v и L_k, чтобы указать, в какой именно группе рассматривается нормальное замыкание). Хорошо известно, что подгруппа L порождается элементами $b_i=a^{-i}ba^i$, $i\in \boldsymbol{Z}$. Из очевидного соотношения $b_i^k = b_{i+1}$ следует, что L — локально циклическая, и что произвольный элемент $g\in L$ может быть представлен в виде $g = b_i^n$ для подходящих $i, n\in \boldsymbol{Z}$. Изоморфизмы φ^v: $L\to L^v$, $b_i \mapsto b_i^v$ позволяют распространить эти утверждения на случай произвольного $v\in \boldsymbol{N}$.

Заметим, что для всякого $v\in \boldsymbol{N}$ найдется число $v'\in \boldsymbol{N}$, $(v', k)=1$, такое, что $L^v=L^{v'}$. В самом деле, запишем v в виде $v=qv'$, где q делится на те же простые числа, что и k, $(v', k)=1$. Тогда $q|k^r$ для некоторого $r>0$ и $b_r^{v'} \in(b^v)\subseteq L^v$, откуда $L^{v'}\subseteq L^v$. Обратное включение очевидно.

Далее, используя подгруппу L^v, мы будем считать, что $(v, k)=1$.

Поскольку группа G_k является расщепляющимся расширением группы L при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом a, произвольный элемент g группы G_k может быть записан в виде $g = a^m b_i^n$ для подходящих $m, n, i\in \boldsymbol{Z}$. В частности, всякая циклическая подгруппа группы G_k с точностью до перехода к сопряженной порождается элементом $a^u b^v$, причем $u\geq 0$. Нетрудно показать также, что для любых $u, n\in \boldsymbol{N}$, $w, i\in \boldsymbol{Z}$ в группе G_k имеет место равенство: $(a^u b_i^w)^n = a^{un} b_i^{w\frac{k^{un}-1}{k^u-1}}$.

Предложение 1.1. *Произвольная нециклическая конечно порожденная подгруппа группы* G_k *совпадает с некоторой подгруппой вида* $(a^u b^w, b^v)$, *где* $u, v \in \mathbf{N}$, $(k, v)=1$.

Доказательство. Пусть H — нециклическая конечно порожденная подгруппа группы G_k, $g_1,\dots,g_n$ — система порождающих подгруппы H, $n>1$. Поскольку подгруппа L является локально циклической, а фактор-группа G/L — циклической, без ограничения общности можно считать, что $g_1 = a^u b_i^n$, $u>0$, $g_2, \dots, g_n \in L$.

Подгруппа $(g_2,\dots,g_n)$ является циклической и порождается элементом вида b_j^v. Легко видеть, что для всякого $j \in \mathbf{Z}$ подгруппы $(a^u b_i^n, b_j^v)$ и $(a^u b_i^n, L^v)$ совпадают. Поэтому подгруппа H порождается элементами $a^u b_i^n$ и b^v, причем можно считать, что $v>0$ и $(k, v)=1$. Нетрудно показать, наконец, что в множестве $\{a^u b_i^n L^v\}$ найдется элемент вида $a^u b^w$. ■

В дальнейшем, используя подгруппу вида $(a^u b^w, b^v)$, мы всегда будем предполагать, что $u, v \in \boldsymbol{N}$, $(k, v)=1$.

Пусть $H=(a^u b^w, b^v) \le G_k$. Обозначим порождающие подгруппы H через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, соответственно. Нетрудно проверить, что имеет место соотношение $\tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a} = \tilde{b}^{k^u}$, с помощью которого произвольное слово в порождающих $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ может быть приведено к виду: $\tilde{a}^m \tilde{b}_i^n$, $m, n, i \in \mathbf{Z}$. Очевидно, $\tilde{a}^m \tilde{b}_i^n = 1$ тогда и только тогда, когда $m=n=0$. Таким образом, подгруппа H имеет следующее представление: $H = <\tilde{a}, \tilde{b};\ \tilde{a}^{-1}\tilde{b}\tilde{a} = \tilde{b}^{k^u}>$.

Хорошо известно ([3]), что группы G_k и G_l изоморфны тогда и только тогда, когда $k=l$. Поэтому из полученного выше представления следует, что подгруппы $H=(a^u b^w, b^v)$ и $K=(c^{u'} d^{w'}, d^{v'})$ групп $G_k=<a, b;\ a^{-1}ba=b^k>$ и $G_l=<c, d;\ c^{-1}dc=d^l>$, соответственно, изоморфны в том и только в том случае, когда $k^u=l^{u'}$.

Отметим также, что подгруппа $H=(a^u b^w, b^v) \le G_k$ является расщепляющимся расширением L^v при помощи $(a^u b^w)$, следовательно, для любого $s \in \mathbf{Z}$ $b^s \in H$ тогда и только тогда, когда $b^s \in L^v$, что эквивалентно условию $v \mid s$.

Предложение 1.2. *Подгруппа* $H=(a^u b^w, b^v) \le G_k$ *имеет конечный индекс в группе* G_k, *равный* uv, *причем множество* $\{a^i b^j;\ i=0,\dots, u-1,\ j=0,\dots, v-1\}$ *является полной системой представителей левых смежных классов группы* G_k *по подгруппе* H.

Доказательство. Пусть $g=a^m b_i^n$, $m, n, i \in \mathbf{Z}$, — произвольный элемент группы G_k.

Разделим m на u с остатком: $m=qu+r$, $0 \le r \le u-1$. Поскольку $\sigma_a(a^m b_i^n (a^u b^w)^{-q})=r$, этот элемент может быть представлен в виде: $a^r b_{i'}^{n'}$, $n', i' \in \mathbf{Z}$. Так как $(k, v)=1$, то, как было показано в доказательстве предложения 1.1, в множестве $\{a^r b_{i'}^{n'} L^v\}$ найдется элемент вида $a^r b^t$.

Разделим t на v с остатком: $t=vq+s$, $0 \le s \le v-1$. Ясно, что элемент $a^r b^s = a^r b^t (b^v)^{-q}$ лежит в том же левом смежном классе по подгруппе H, что и элемент g. Таким образом, каждому левому смежному классу группы G_k по подгруппе H можно поставить в соответствие элемент вида $a^r b^s$; $0 \le r \le u-1$, $0 \le s \le v-1$.

Не составляет труда проверить, что эти элементы представляют различные смежные классы. ■

Предложение 1.3. *Подгруппа* $H=(a^u b^w, b^v) \le G_k$ *является нормальной тогда и только тогда, когда* $v \mid (k^u-1)$, $v \mid w(k-1)$.

Действительно, $H=(a^u b^w, L^v)$ и из легко проверяемых соотношений: $b^{\mp 1}(a^u b^w) b^{\pm 1} = (a^u b^w) b^{\mp(k^u-1)}$; $a^{-1}(a^u b^w) a = (a^u b^w) b^{w(k-1)}$; $a(a^u b^w) a^{-1} = (a^u b^w)^2 b_{u-1}^{w(k-1)} (a^u b^w)^{-1}$; следует, что $G_k^{-1}(a^u b^w) G_k \in H$ тогда и только тогда, когда $v | (k^u-1)$, $v | w(k-1)$.

Предложение 1.4. *Пусть* $H=(a^u b^w, b^v)$, $K=(a^{u'} b^{w'}, b^{v'}) \le G_k$. *Подгруппа* H *содержится в подгруппе* K *тогда и только тогда, когда* $u' | u$, $v' | v$ и $w \equiv w' \frac{k^u-1}{k^{u'}-1} \pmod{v'}$. *В частности, подгруппы* H *и* K *совпадают тогда и только тогда, когда* $u=u'$, $v=v'$ *и* $w \equiv w' \pmod{v}$. ■

Предложение 1.5. *Произвольная подгруппа* H *группы* G_k, *не являющаяся конечно порожденной, лежит в подгруппе* L. *Если для всякого элемента* $g \in H$ $aga^{-1} \in H$, *то существует такое* $v \in \boldsymbol{N}$, $(v, k)=1$, *что* $H=L^v$.

Доказательство. Предположим, что найдется элемент $g \in H$, не принадлежащий L. Пусть также $h \in H \cap L$ (если $H \cap L = 1$, то H изоморфно вкладывается в циклическую группу G_k/L, что невозможно). Очевидно, подгруппа (g, h) не является циклической и, следовательно, имеет конечный индекс в G_k. Но тогда и H имеет конечный индекс, а значит, является конечно порожденной — противоречие.

Пусть $v \in \boldsymbol{N}$ — минимальное число такое, что $b^v \in H$. По условию $b_j^v \in H$ для всякого $j \le 0$, следовательно, $L^v \subseteq H$. Из отмеченного ранее и минимальности v следует, что $(v, k)=1$. Предполагая, что существует элемент $h = b_i^n \in H \setminus L^v$ и, следовательно, $v \nmid n$, немедленно получаем противоречие с минимальностью v. ■

§ 2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Циклическая подгруппа* H *группы* G_k *финитно отделима тогда и только тогда, когда* $H \not\subset L$.

Доказательство. Пусть $H=(a^u b^w)$, $u\geq 0$, и пусть сначала $u\neq 0$, то есть $H\not\subset L$.

Рассмотрим семейство подгрупп: $\Lambda=\{A(t)\colon A(t)=(a^{tu},b^{\nu(t)})\leq G_k,\ t\in \boldsymbol{N}\}$, где $\nu(t)=\frac{k^{tu}-1}{k^u-1}$. Нетрудно показать, что A(t) является нормальной подгруппой конечного индекса для каждого t, $A(t)H=(a^u b^w, b^{\nu(t)})$ и $A(t)H \cap L = L^{\nu(t)}$. Поэтому, если $h\in \bigcap\limits_{t\in \boldsymbol{N}} A(t)H$, то $\sigma_a(h)= um$ для некоторого $m\in \boldsymbol{Z}$, $(a^u b^w)^{-m}h\in (\bigcap\limits_{t\in \boldsymbol{N}} A(t)H) \cap L = 1$ и $h=(a^u b^w)^m\in H$.

Таким образом, $\bigcap\limits_{t\in \boldsymbol{N}} A(t)H = H$, откуда следует, что H финитно отделима.

Пусть теперь u=0, то есть $H=(b^w)$; $g=ab^w a^{-1}$. Пусть также ψ — произвольный гомоморфизм группы G_k на конечную группу, $|a\psi|=n$, y — такое число, что $ny+1<0$. Тогда $g\notin H$ (в противном случае для некоторого $n\neq 0$ $ab^w a^{-1}=b^{wn}$ и $b^w=a^{-1}b^{wn}a=b^{wnk}$, что невозможно, так как $|k|>1$) и $g\psi=(a\psi)(b\psi)^w(a\psi)^{-1}=(a\psi)^{ny+1}(b\psi)^w(a\psi)^{-(ny+1)}=(b\psi)^{wk^{|ny+1|}} \in H\psi$. Таким образом, подгруппа H не является финитно отделимой. ■

Теорема 2.2. *Среди подгрупп группы* G_k, *не являющихся конечно порожденными, финитно отделимы подгруппы* L^v *и только они*.

Доказательство. Очевидно, фактор-группа $G_k/L^v=\langle a, b;\ a^{-1}ba=b^k,\ b^v=1\rangle$ представляет собой расщепляющееся расширение конечной группы L/L^v при помощи бесконечной циклической, которое, как известно, финитно аппроксимируемо. Следовательно, подгруппы L^v финитно отделимы.

Пусть теперь подгруппа H не является конечно порожденной и не совпадает ни с какой подгруппой L^v. Тогда в силу предложения 1.5 $H\subseteq L$ и найдется элемент $g = b_i^n \in H$ такой, что $aga^{-1}\notin H$. Если же ψ — произвольный гомоморфизм группы G_k на конечную группу, $|a\psi|=r$, то $(aga^{-1})\psi = (a\psi)^{-(r-1)}b_i^n\psi(a\psi)^{r-1} = (g\psi)^{k^{r-1}} \in H\psi$. Таким образом, H не является финитно отделимой. ■

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы, сформулированной в начале статьи. Необходимость условия, как легко видеть, следует из приводимого ниже утверждения.

Предложение 2.1. *Пусть* ***K*** *— класс групп*, $G_k=\langle a,b;a^{-1}ba=b^k\rangle$, $G_l=\langle c,d;c^{-1}dc=d^l\rangle$, $H\leq G_k$, $K\leq G_l$ — *некоторые подгруппы*, $\varphi\colon H\to K$ — *произвольный изоморфизм*, P=

$<G_k, G_l;\ H=K, \varphi>$. *Пусть далее* $H\neq<a^2, b>$, *а подгруппа* K *не является отделимой в классе* $\boldsymbol{K}$. *Тогда группа* P *не аппроксимируется группами из класса* $\boldsymbol{K}$.

Доказательство. Пусть $f\in G_l\backslash K$ такой элемент, что для любого гомоморфизма θ группы G_l на группу из класса $\boldsymbol{K}$ $f\theta\in K\theta$, и пусть ψ — некоторый гомоморфизм группы P на группу из класса $\boldsymbol{K}$. Очевидно, $f\psi\in K\psi=H\psi\subseteq G_k\psi$.

Если $[G_k:H]>2$, то найдется пара элементов $h_1, h_2\in G_k\backslash H$, лежащих в различных правых смежных классах по подгруппе H. Полагая $g=[[f, h_1],[f, h_2]]$, имеем $h_2h_1^{-1}\notin H$ и $g\neq1$. С другой стороны, $[f, h_1]\psi$, $[f, h_2]\psi\in[G_k,G_k]\psi\subseteq L_k\psi$, и, так как подгруппа L_k является абелевой, $g\psi=1$.

Если $[G_k:H]=2$ и $b\notin H$, положим $g=[f^{-1}bf, b]$. Тогда, очевидно, $g\neq1$, но $(f^{-1}bf)\psi\in L_k\psi$ и, следовательно, $g\psi=1$. Если же $[G_k:H]=2$ и $b\in H$, то $H=(a^ub^w, b)=(a^u, b)$, и из предложения 1.2 $H=(a^2, b)$. ■

Обратимся к доказательству достаточности.

Пусть сначала подгруппы H и K конечно порождены и не являются циклическими. Тогда в соответствии с предложением 1.1 $H=(a^ub^w, b^v)$, $K=(c^{u'}d^{w'}, d^{v'})$. Кроме того, как отмечено в § 1, подгруппы H и K в системах образующих $\{\widetilde{a}=a^ub^w,\ \widetilde{b}=b^v\}$ и $\{\widetilde{c}=c^{u'}d^{w'},\ \widetilde{d}=d^{v'}\}$, соответственно, имеют следующее представление:

$$H=<\widetilde{a}, \widetilde{b};\ \widetilde{a}^{-1}\widetilde{b}\widetilde{a}=\widetilde{b}^z>,\ K=<\widetilde{c}, \widetilde{d};\ \widetilde{c}^{-1}\widetilde{d}\widetilde{c}=\widetilde{d}^z>,\ z=k^u=l^{u'}.$$

Рассмотрим подгруппы $M=(a^{tu},b^v)$, $N=(c^{tu'},d^{v'})$, где $t=[v\Phi(v),v'\Phi(v')]$, $\Phi(\cdot)$ — функция Эйлера. Используя легко проверяемое соотношение $\frac{k^{tu}-1}{k^u-1}=\frac{l^{tu'}-1}{l^{u'}-1}\equiv 0\pmod{[v, v']}$, нетрудно показать, что M и N — нормальные подгруппы групп G_k и G_l, соответственно, $M=(\widetilde{a}^t, \widetilde{b})\leq H$ и $N=(\widetilde{c}^t, \widetilde{d})\leq K$.

Очевидно, отображение $\widetilde{\varphi}: H\to K;\ \widetilde{a}\mapsto\widetilde{c},\ \widetilde{b}\mapsto\widetilde{d}$ является изоморфизмом, и потому $\psi=\widetilde{\varphi}^{-1}\varphi\in Aut(K)$. Из представления группы $Aut(G_k)$, полученного в работе [4], следует, что N является характеристической подгруппой K. Поэтому $M\varphi=(M\widetilde{\varphi})\psi=N\psi=N$ и в силу теоремы 1.2 группа P финитно аппроксимируема.

Пусть теперь подгруппы H и K либо циклические, либо не являются конечно порожденными, и пусть $\{R_\lambda, S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — максимальное по включению семейство упорядоченных пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса групп G_k и G_l, соответственно. Покажем, что в действительности семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадают с семействами всех нормальных подгрупп конечного индекса групп G_k и

G_l. В этом случае из финитной аппроксимируемости групп G_k и G_l и из отделимости объединяемых подгрупп следует, что $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = \{1\}$ и $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HR_\lambda = H$, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} KS_\lambda = K$. Поэтому в силу теоремы 1.1 группа P финитно аппроксимируема.

Случай циклической объединяемой подгруппы.

Пусть H=(u), K=(v), R — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G_k и порядок элемента u по модулю этой подгруппы равен r.

По теореме 2.1 $v\notin L_l$, поэтому в циклической группе G_l/L_l найдется подгруппа SL_l такая, что порядок элемента v по модулю этой подгруппы равен r. Очевидно, подгруппа SL_l имеет конечный индекс в G_l и $(R\cap H)\varphi=(v^r)=(SL_l\cap K)$, то есть подгруппы R и SL_l являются (H, K, φ)-совместимыми.

Случай объединяемой подгруппы, не являющейся конечно порожденной.

В соответствии с теоремой 2.2 $H=L_k^v$, $K=L_l^{v'}$.

Очевидно, $L_l^{v'}=L_k^v\varphi=L_k^{vk}\varphi=L_l^{v'k}$, поэтому для некоторых $i\in\boldsymbol{N}$, $n\in\mathbf{Z}$ $d_i^{v'}=(d^{v'k})^n$ и $k\mid l^i$. Аналогично $l\mid k^j$ для некоторого $j\in\boldsymbol{N}$, следовательно, k и l делятся на одни и те же простые числа.

Пусть $R=(a^ub^w, b^n)$ — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G_k. Очевидно, $R\cap H=L_k^{[v,n]}=L_k^{vt}$, $t=\frac{[v,n]}{v}$, и так как (n, k)=(v, k)=1, то (t, k)=1.

Рассмотрим подгруппу $S=(c^{v'tΦ(v't)}, d^{v't})$, где Φ(·) — функция Эйлера. Поскольку k и l делятся на одни и те же простые числа, (v′t, l)=(t, l)=(t, k)=1. Поэтому $l^{v'tΦ(v't)}\equiv 1 \pmod{v't}$ и S — нормальная подгруппа. Далее, $S\cap K=L_l^{v't}$, и, как легко видеть, $L_k^{vt}\varphi=(L_k^v\varphi)^t=L_l^{v't}$. Таким образом, подгруппы R и S являются (H, K, φ)-совместимыми. ■

Библиографический список

1. *Магнус В*., *Каррас А*., *Солитэр Д*. Комбинаторная теория групп. М.: 1974. 456 с.

2. *Baumslag G*. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, P. 193–209.

3. *Молдаванский Д. И*. Об изоморфизмах групп Баумслага-Солитэра // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43, № 12. С. 1624–1686.

4. *Collins D*. The automorphism towers of some one-relator groups // Proc. London. Math. Soc. (3) 1978. V. 36. P. 480–493.