Вестник молодых ученых ИвГУ

Вып. 2 / 2002. С. 7–10

Е. В. Соколов

ФИНИТНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП

Получено обобщение ряда известных результатов о финитной отделимости циклических подгрупп в свободном произведении с объединенной подгруппой. Установлено, в частности, что свободное произведение двух ограниченных разрешимых групп с циклическими или конечно порожденными нормальными объединяемыми подгруппами является π_c-группой.

УДК 512.543

Напомним [3], что подгруппа F группы G называется финитно отделимой (в G), если для всякого элемента $g \in G \backslash F$ существует гомоморфизм ψ группы G на некоторую конечную группу такой, что $g\psi \notin F\psi$. Группу, все циклические подгруппы которой финитно отделимы, называют π_c-группой.

Пусть $G=(A*B;\ H=K,\ \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Обозначим через Δ_A и Δ_B семейства всех циклических подгрупп групп A и B, соответственно, не являющихся финитно отделимыми в этих группах.

Очевидно, что любая циклическая подгруппа группы G, сопряженная с некоторой подгруппой из семейства $\Delta_A \cup \Delta_B$, также не будет финитно отделимой. Мы будем искать условия, гарантирующие справедливость обратного утверждения:

Произвольная циклическая подгруппа группы G, не сопряженная ни с какой подгруппой из $\Delta_A \cup \Delta_B$, финитно отделима. (*)

Прежде, чем привести полученные в этом направлении результаты, напомним, что подгруппы $R \le A$ и $S \le B$ называются (H, K, φ)-совместимыми, если $(R \cap H)\varphi = S \cap K$, и обозначим через Ω семейство всех пар нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса групп A и B.

Теорема 1. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы, подгруппы H и K финитно отделимы в сомножителях и для любых двух нормальных подгрупп конечного индекса $M \le A$ и $N \le B$ найдется такая пара подгрупп $(R, S) \in \Omega$,* *что $R \leq M$ и $S \leq N$. Тогда группа G удовлетворяет условию* (∗). *В частности, если A и B являются π_c-группами, то G также π_c-группа.*

Сформулированная теорема была анонсирована в [4] и является обобщением аналогичного результата, полученного Г. Кимом [2] для случая, когда A и B являются π_c-группами. Ее доказательство использует тот же стандартный метод, что и статья Кима, и будет опубликовано в другой работе.

Из теоремы 1 легко получается

Теорема 2. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы, подгруппы H и K конечно порождены и вместе со всеми своими подгруппами конечного индекса финитно отделимы в сомножителях. Если в H существует подгруппа U конечного индекса, нормальная в A и такая, что подгруппа $V = U\varphi$ нормальна в B, то группа G удовлетворяет условию* (∗).

Доказательство. Пусть M и N — произвольные нормальные подгруппы конечного индекса групп A и B, соответственно. Пользуясь конечной порожденностью подгруппы U, выберем в ее подгруппе конечного индекса $(M \cap U) \cap (N \cap V)\varphi^{-1}$ характеристическую подгруппу E, также имеющую конечный индекс в U. Тогда подгруппы E и $F = E\varphi$ нормальны и финитно отделимы в группах A и B. Поэтому фактор-группы A/E и B/F финитно аппроксимируемы и, следовательно, обладают нормальными подгруппами конечного индекса R/E и S/F, тривиально пересекающимися с H/E и K/F, соответственно. Очевидно, что в этом случае подгруппы $M \cap R$ и $N \cap S$ являются (H, K, φ)-совместимыми. Таким образом, все условия теоремы 1 оказываются выполненными.

Частным случаем теоремы 2 является следующее хорошо известное утверждение (см., напр., [1]):

Следствие 1. *Пусть подгруппы H и K конечны. Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то группа G удовлетворяет условию* (∗).

Следствие 2. *Пусть группы A и B представляют собой конечные расширения свободных или ограниченных разрешимых групп, подгруппы H и K конечно порождены и нормальны в A и B, соответственно. Тогда G является π_c-группой.*

Напомним, что абелева группа X называется ограниченной в смысле А. И. Мальцева, если все примарные компоненты ее периодической части F конечны, а фактор-группа X/F имеет конечный ранг и удовлетворяет следующему условию: для всякого элемента $a \in X/F$ и для всякой подгруппы $Y \leq X/F$, не содержащей a, сравнение $x^n \equiv a \pmod{Y}$ при каждом фиксированном p разрешимо лишь для конечного множества p-чисел n. Разрешимая группа называется ограниченной, если она обладает хотя бы одним конечным нормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами. Оба этих определения введены

Мальцевым в [3]. Там же установлено, что все подгруппы ограниченной разрешимой группы финитно отделимы.

Следствие 2 получается теперь из общего замечания о том, что в конечном расширении группы с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы [1].

Другим примером использования теоремы 1 служит

Теорема 3. *Пусть группа A представляет собой конечное расширение ограниченной разрешимой группы, B — π_c-группа, H и K — бесконечные циклические подгруппы. Тогда G является π_c-группой.*

Доказательство. Пусть группа A является конечным расширением ограниченной разрешимой группы C, $1=C^{(n)}\leq\ldots\leq C'\leq C$ — ряд коммутантов C. Пусть далее h и k — порождающие подгрупп H и K, i — максимальное число, такое что $H\cap C^{(i)}\neq 1$, и m — порядок элемента h по модулю $C^{(i)}$. Покажем что для всякого целого числа v, большего нуля, найдется нормальная подгруппа конечного индекса R группы A такая, что $R\cap H=H^{mv}$.

Не ограничивая общности рассуждений (переходя, если необходимо, к фактор-группе $(A/C^{(i+1)})/\tau(C^{(i)}/C^{(i+1)})$), можем считать, что $i=n-1$ и подгруппа $C^{(i)}$ не имеет кручения.

Абелева группа $C^{(n-1)}$ является ограниченной, поэтому уравнение $x^y=(h_1)^v$, где $h_1=h^m$, разрешимо в ней лишь для конечного множества v-чисел y. Пусть w — максимальное такое v-число. Тогда порядок элемента h_1 по модулю подгруппы $D=(C^{(n-1)})^w$ равен v. При этом подгруппа D является характеристической в C и, следовательно, нормальной в A. Очевидно также, что порядок элемента h по модулю этой подгруппы равен mv.

Так как подгруппа D финитно отделима в A, фактор-группа A/D финитно аппроксимируема. Поэтому существует нормальная подгруппа конечного индекса R/D группы A/D, не содержащая элементов $hD, \ldots, h^{mv-1}D$. Ясно, что в этом случае подгруппа R является искомой.

Пусть теперь M и N — произвольные нормальные подгруппы конечного индекса групп A и B, соответственно, и пусть $(M\cap H)\varphi\cap(N\cap K)\cap K^m=K^{mu}$, $u>0$. Подгруппа K^{mu} финитно отделима в B, следовательно, найдется нормальная подгруппа конечного индекса S группы B такая, что $k, \ldots, k^{mu-1}\notin K^{mu}S$. Очевидно, что $S\cap K\leq K^{mu}$.

В силу доказанного выше существует такая подгруппа конечного индекса R группы A, что $(R\cap H)\varphi=S\cap K$. Тогда подгруппы $R\cap M$ и $S\cap N$ лежат в M и N и являются (H, K, φ)-совместимыми, таким образом, выполнены все условия теоремы 1.

Поскольку всякая полициклическая группа является, очевидно, ограниченной разрешимой, следствие 2 и теорема 3 обобщают результаты Р. Олленби и Р. Грегорака [1, теоремы 5 и 6].

Список использованной литературы

1. *Allenby R. B. J. T.*, *Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. V. 319. P. 9–17.

2. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Canad. Math. Bull. 1993. V. 36 (3). P. 296–302.

3. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

4. *Соколов Е. В.* Финитная отделимость циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: теория, методология, практика: Матер. науч. конф. Иваново, 6 февраля 2001 г. Иваново, ИвГУ, 2001, С. 156–157.