ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 3 Выпуск 1 (2002)

УДК 512.54

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ $\mathfrak{p}$-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Е. В. Соколов (г. Иваново)

Аннотация

Получено достаточное условие аппроксимируемости конечными $\mathfrak{p}$-группами свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, содержащей подгруппу конечного $\mathfrak{p}$-индекса, нормальную в свободных множителях. С его помощью доказано, что свободное произведение двух аппроксимируемых конечными $\mathfrak{p}$-группами конечно порожденных нильпотентных групп с центральными объединяемыми подгруппами в свою очередь аппроксимируется конечными $\mathfrak{p}$-группами тогда и только тогда, когда объединяемые подгруппы $\mathfrak{p}'$-изолированы в свободных множителях.

1. Формулировка результатов. Следуя общему определению отделимости, введенному А. И. Мальцевым в [1], подгруппу Y группы X будем называть отделимой в классе конечных $\mathfrak{p}$-групп (или, короче, $\mathfrak{p}$-отделимой), если для всякого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм ψ группы X на конечную $\mathfrak{p}$-группу такой, что $x\psi \notin Y\psi$. Очевидно, что если подгруппа Y нормальна в X, то фактор-группа X/Y аппроксимируется конечными $\mathfrak{p}$-группами тогда и только тогда, когда подгруппа Y $\mathfrak{p}$-отделима в X.

Пусть далее A и B – некоторые группы, H – подгруппа группы A, K – подгруппа группы B, $\varphi : H \to K$ – изоморфизм, и пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ – свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Обозначим через Ω семейство всех упорядоченных пар вида $(A \cap N, B \cap N)$, где N – произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G, а через $\Omega^{\mathfrak{p}}$ – семейство всех таких элементов из Ω, что N – подгруппа конечного $\mathfrak{p}$-индекса группы G. Пусть также Ω_A и Ω_B обозначают семейства первых и вторых компонент элементов из Ω, и аналогичным образом определены семейства $\Omega_A^{\mathfrak{p}}$ и $\Omega_B^{\mathfrak{p}}$.

Г. Баумслаг [2], опираясь на доказанное им утверждение о финитной аппроксимируемости группы G в случае, когда группы A и B конечны, показал, что группа G финитно аппроксимируема, если семейство Ω_A является H-фильтрацией и семейство Ω_B является K-фильтрацией. Напомним, что семейство Ψ нормальных подгрупп группы X называется Y-фильтрацией, где Y –

некоторая подгруппа группы X, если $\cap_{N\in\Psi}N=1$ и Y отделима подгруппами из Ψ, т. е. $\cap_{N\in\Psi}YN = Y$.

Свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных p-групп, вообще говоря, не аппроксимируется конечными p-группами. Соответствующий критерий был найден Г. Хигменом в [3]. С его помощью в работе [4] показано, что имеет место следующий аналог отмеченного выше достаточного условия Баумслага.

Предложение 1. *Если семейство Ω_A^p является H-фильтрацией и семейство Ω_B^p является K-фильтрацией, то группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Из приведенного утверждения легко получается

Предложение 2. *Пусть группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, подгруппы H и K p-отделимы в сомножителях и для любых двух нормальных подгрупп конечного p-индекса $M \leqslant A$ и $N \leqslant B$ найдется пара подгрупп $(R, S) \in \Omega^p$ такая, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Тогда группа G аппроксимируется конечными p-группами.*

Действительно, в этом случае всякая подгруппа F группы A или группы B, p-отделимая в A или B, оказывается отделимой подгруппами из Ω_A^p или Ω_B^p, соответственно. Поскольку группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, отсюда следует, что Ω_A^p является H-фильтрацией, а Ω_B^p – K-фильтрацией. Остается лишь воспользоваться предложением 1.

Непосредственное применение предложений 1 и 2 в конкретных ситуациях может быть связано со значительными трудностями технического характера, и цель настоящей работы – указать более простые достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами группы G в том случае, когда объединенная подгруппа содержит подгруппу конечного p-индекса, нормальную в свободных множителях. Прежде, чем сформулировать полученные результаты, сделаем одно предварительное замечание.

Если X – некоторая группа, Y – ее нормальная подгруппа, то ограничение на Y произвольного внутреннего автоморфизма группы X представляет собой некоторый автоморфизм группы Y. Подгруппу группы $\mathrm{Aut}(Y)$, составленную из всех таких автоморфизмов, будем обозначать $\mathrm{Aut}_X(Y)$.

Очевидно, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ изоморфна фактор-группе группы X по централизатору $C(Y)$ подгруппы Y. Поскольку в группе, аппроксимируемой конечными p-группами, централизатор произвольного множества элементов является p-отделимой подгруппой, из аппроксимируемости группы X конечными p-группами следует, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ также аппроксимируется конечными p-группами. В частности, если H и K – конечные нормальные подгруппы свободных множителей и группа G аппроксимируется конечными p-группами, то (конечная) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является p-группой. В работе Хигмена [3] отмечено, что если A и B – конечные p-группы, то справедливо и обратное. Обобщением этого утверждения является

Теорема 1. *Пусть группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, подгруппы H и K конечны и нормальны в сомножителях. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H)$ является p-группой.*

Достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными p-группами, доставляемое теоремой 1, представляет собой частный случай более общего результата.

Теорема 2. *Пусть группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, подгруппы H и K вместе со всеми своими подгруппами конечного p-индекса p-отделимы в сомножителях. Пусть также в H существует подгруппа U конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что подгруппа $V = U\varphi$ нормальна в B. Если фактор-группа G/U аппроксимируется конечными p-группами и $\mathrm{Aut}_G(U)$ является конечной p-группой, то группа G также аппроксимируется конечными p-группами.*

Напомним, что подгруппа Y группы X называется p'-изолированной, если для всякого элемента $g \in X$ и для всякого простого числа q, не равного p, из условия $g^q \in Y$ следует, что $g \in Y$.

Теорема 3. *Пусть A и B – конечно порожденные нильпотентные группы, аппроксимируемые конечными p-группами (то есть их периодические части являются p-группами), H и K – собственные центральные подгруппы этих групп. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда подгруппы H и K p'-изолированы в свободных множителях.*

Для доказательства достаточности заметим, что в конечно порожденной нильпотентной группе все p'-изолированные подгруппы p-отделимы (см. [4]), а группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ в силу центральности подгрупп H и K тривиальна. Остается лишь воспользоваться теоремой 2.

Пусть теперь хотя бы одна из объединяемых подгрупп, скажем H, не является p'-изолированной, и пусть элементы $u \in A$ и $v \in B$ не лежат в объединяемых подгруппах, в то время как некоторая p'-степень u принадлежит H. Тогда элемент $g = [u, v]$ имеет несократимую запись длины, большей 1, и потому отличен от единицы в G. С другой стороны при любом гомоморфизме ψ группы G на конечную p-группу образ элемента u принадлежит образу подгруппы H и ввиду центральности K $g\psi = 1$. Таким образом, G не является аппроксимируемой конечными p-группами.

Несколько усилив требования теоремы 2, можно распространить ее на случай, когда группа $\mathrm{Aut}_G(U)$ является бесконечной.

Теорема 4. *Пусть группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, подгруппы H и K конечно порождены и вместе со всеми своими подгруппами конечного p-индекса p-отделимы в сомножителях. Пусть также в H существует подгруппа U конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что подгруппа $V = U\varphi$ нормальна в B. Если группы $\mathrm{Aut}_G(U)$ и G/U^pU' аппроксимируются конечными p-группами, то группа G также аппроксимируется конечными p-группами.*

2. Доказательства теорем 2 и 4. Пусть M и N – произвольные нормальные подгруппы конечного p-индекса групп A и B, соответственно, и пусть $Q = (M \cap U) \cap (N \cap V)\varphi^{-1}$. Ввиду предложения 2 для доказательства аппроксимируемости группы G достаточно показать, что из условий теорем 2 и 4 вытекает существование пары подгрупп $(R, S) \in \Omega^p$ такой, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$. Для отыскания подгрупп R и S воспользуемся следующим утверждением, полученным в [4]:

Предложение 3. *Пара подгрупп (R, S) принадлежит семейству Ω^p тогда и только тогда, когда существуют ряды подгрупп*

$$R = R_0 \leqslant \ldots \leqslant R_m = A, S = S_0 \leqslant \ldots \leqslant S_n = B$$

такие, что:

1) R_i, S_j – нормальные подгруппы групп A и B, соответственно $(0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n)$;

2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p$ $(0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant j \leqslant n-1)$;

3) изоморфизм φ отображает множество $\{R_i \cap H\}$ на множество $\{S_j \cap K\}$.

Рассмотрим подгруппу $X = \mathrm{Aut}_G(U)U$ голоморфа группы U. Легко видеть, что каждая нормальная подгруппа группы X, лежащая в U, будет также нормальной подгруппой и в группе G. Покажем теперь, что группа X обладает нормальной подгруппой Y конечного p-индекса, удовлетворяющей условию $Y \cap U \leqslant Q$.

Если $\mathrm{Aut}_G(U)$ является конечной p-группой, положим $Y = \cap_{x \in X} x^{-1}Qx$. Тогда подгруппа Y нормальна в X и, так как индекс подгруппы U в группе X конечен, является пересечением конечного числа подгрупп конечного p-индекса, а потому и сама имеет конечный p-индекс в X.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 4.

Заметим прежде всего, что если X – некоторая группа, Ψ – подгруппа группы $\mathrm{Aut}(X)$ и Z – произвольная нормальная Ψ-допустимая подгруппа группы X, то для каждого автоморфизма $\psi \in \Psi$ отображение ψ_Z фактор-группы X/Z в себя, определяемое по правилу $(xZ)\psi_Z = (x\psi)Z$ $(x \in X)$, является автоморфизмом группы X/Z, а отображение ρ_Z, переводящее ψ в ψ_Z, определяет гомоморфизм группы Ψ в группу $\mathrm{Aut}(X/Z)$. Воспользуемся теперь следующим утверждением, полученным в ходе доказательства теоремы 2 в [5].

Предложение 4. *Пусть группа* X *является расщепляющимся расширением конечно порожденной группы* U *при помощи группы* Φ *с сопровождающим гомоморфизмом* $\theta : \Phi \to \mathrm{Aut}(U)$ *и пусть* $\Psi = \Phi\theta$. *Если группы* U *и* Φ *аппроксимируются конечными* p*-группами и образ* Ψ *относительно гомоморфизма* $\rho_{U^pU'}$ *является* p*-группой, то для каждой нормальной подгруппы* Q *конечного* p*-индекса группы* U *найдется нормальная подгруппа* Y *конечного* p*-индекса группы* X *такая, что* $Y \cap U \leqslant Q$.

Легко видеть, что образ группы $\mathrm{Aut}_G(U)$ относительно гомоморфизма ρ_W, где $W = U^pU'$, совпадает с подгруппой $\mathrm{Aut}_{G/W}(U/W)$ группы $\mathrm{Aut}(U/W)$. Проверим, что $\mathrm{Aut}_{G/W}(U/W)$ является p-группой.

В самом деле, группа $\mathrm{Aut}_{G/W}(U/W)$ изоморфна фактор-группе группы $G_1 = G/W$ по централизатору $C(U_1)$ подгруппы $U_1 = U/W$, который в данном случае имеет конечный индекс в G_1. Ввиду аппроксимируемости группы G_1 конечными p-группами подгруппа $C(U_1)$ является p-отделимой и, следовательно, p'-изолированной в G_1. Поэтому ее индекс есть p-число.

Таким образом, и при условиях теоремы 2, и при условиях теоремы 4 группа X обладает такой нормальной подгруппой Y конечного p-индекса, что подгруппа $E = Y \cap U$ содержится в Q.

Напомним, что главным рядом некоторой группы называется ее нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Нетрудно видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным в точности тогда, когда все его факторы имеют порядок p.

Прообразы в группе X членов некоторого главного ряда фактор-группы X/Y образуют последовательность $Y = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_r = X$ нормальных подгрупп группы X, все факторы которой имеют порядок p. Пересекая все подгруппы Y_i с подгруппой U и отбрасывая совпадающие члены, получаем последовательность $E = E_0 \leqslant E_1 \leqslant \ldots \leqslant E_n = U$ нормальных подгрупп группы X, порядки факторов которой снова равны p. Как отмечено выше, все подгруппы E_i являются инвариантными в группе G.

Ввиду изоморфизма фактор-групп G/U и $(G/W)/(U/W)$ группа G/U аппроксимируется конечными p-группами. Так как ее подгруппа H/U конечна, существует нормальная подгруппа L конечного p-индекса группы G такая, что $L \cap H = U$. Положим $C_n = L \cap A$ и $D_n = L \cap B$, так что $(C_n, D_n) \in \Omega^p$. Тогда существуют последовательности подгрупп, идущие от C_n до A и от D_n до B и удовлетворяющие условиям предложения 3.

Пусть теперь $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Так как E_i и $F_i = E_i\varphi$ – нормальные подгруппы групп A и B, имеющие конечный p-индекс в подгруппах H и K, соответственно, то по условию они p-отделимы в A и в B и потому фактор-группы A/E_i и B/F_i аппроксимируемы конечными p-группами. Следовательно, существуют нормальная подгруппа C_i конечного p-индекса группы A и нормальная подгруппа D_i конечного p-индекса группы B такие, что $C_i \cap H = E_i$ и $D_i \cap K = F_i$. К тому же из включения $E \leqslant Q$ вытекает, что $E \leqslant M$ и $F \leqslant N$, поэтому можно считать, что $C_0 \leqslant M$ и $D_0 \leqslant N$.

Полагая теперь $R_k = \cap_{i=k}^{n} C_i$ и $S_k = \cap_{i=k}^{n} D_i$ для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$, получаем последовательности нормальных подгрупп

$$R = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \ldots \leqslant R_n = C_n \text{ и } S = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \ldots \leqslant S_n = D_n$$

таких, что $R \leqslant M$ и $S \leqslant N$ и для любого $k = 0, 1, \ldots, n$ $R_k \cap H = E_k$ и $S_k \cap K = F_k$. Поскольку порядок фактор-группы E_{k+1}/E_k равен p, для всякой подгруппы T такой, что $R_k \leqslant T \leqslant R_{k+1}$, пересечение $T \cap H$ должно совпадать либо с подгруппой E_k, либо с подгруппой E_{k+1}. Аналогично, если $S_k \leqslant T \leqslant S_{k+1}$, то $T \cap H = F_k$ или $T \cap H = F_{k+1}$.

Напомним, наконец, что через каждую нормальную подгруппу конечной p-группы проходит некоторый главный ряд этой группы. Поэтому последовательности $R = R_0 \leqslant \ldots \leqslant R_n = C_n$ и $S = S_0 \leqslant \ldots \leqslant S_n = D_n$ можно уплотнить до таких рядов инвариантных подгрупп групп A и B, факторы которых имеют порядок p. Продолжив эти уплотнения построенными выше последовательностями, идущими от C_n к A и от D_n к B, получаем ряды подгрупп $R \leqslant \ldots \leqslant A$ и $S \leqslant \ldots \leqslant B$, удовлетворяющие условиям предложения 3. Таким образом, $(R, S) \in \Omega^p$ и $R \leqslant M$, $S \leqslant N$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы. // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та., 1958, т. 18, с. 49-60.

[2] Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups. // Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 106, p. 193-209.

[3] Higman G. Amalgams of p-groups. // J. Algebra, 1964, v. 1, p. 301-305.

[4] Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами. // Сиб. матем. ж., 1999, т. 40, № 2, с. 395-407.

[5] Якушев А. В. Аппроксимируемость конечными p-группами расщепляющихся расширений групп. // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3, Иваново, ИвГУ, 2000, с. 119-124.

Ивановский государственный университет.
Поступило 30.05.2002 г.