Математические заметки

том 73 выпуск 6 июнь 2003

УДК 512.543

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП В КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ π-ГРУПП

Е. В. Соколов

В статье доказано, что если группа G аппроксимируема в классе $\mathscr{N}$, то для каждой $\mathscr{N}$-подгруппы группы G множество π'-корней из этой подгруппы является π-отделимой $\mathscr{N}$-подгруппой.

Библиография: 5 названий.

1. Формулировка результатов. Пусть $\mathscr{K}$ – некоторый класс групп. Напомним (см. [1]), что группа X называется *аппроксимируемой в классе* $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента $g \in X$ существует гомоморфизм группы X на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, переводящий g в элемент, отличный от 1. Подгруппа Y группы X называется *отделимой в классе* $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$*-отделимой*), если для всякого элемента $g \in X \setminus Y$ можно указать такой гомоморфизм φ группы X на группу из $\mathscr{K}$, что $g\varphi \notin Y\varphi$.

Очевидно, что если все группы из класса $\mathscr{K}$ в свою очередь аппроксимируемы в некотором классе $\mathscr{L}$, то каждая $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа является $\mathscr{L}$-аппроксимируемой. Очевидно также, что если $\mathscr{P}$ – гомоморфно замкнутый класс групп и в произвольной группе из класса $\mathscr{K}$ все $\mathscr{P}$-подгруппы (т.е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathscr{P}$) являются $\mathscr{L}$-отделимыми, то из $\mathscr{K}$-отделимости всех $\mathscr{P}$-подгрупп произвольной группы X следует их $\mathscr{L}$-отделимость. Именно на этом замечании основаны, например, доказательства большинства известных результатов о финитной отделимости всех конечно порожденных или всех циклических подгрупп свободного произведения с объединенной подгруппой, использующие тот факт, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечных групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Ситуация оказывается более сложной, если $\mathscr{L}$-отделимость $\mathscr{P}$-подгрупп данной группы зависит от того, как подгруппы расположены в этой группе. Примером может служить отделимость в классе конечных π-групп (π*-отделимость*).

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то подгруппа Y группы X называется π*-изолированной* в X, если для всякого элемента $g \in X$ и для всякого простого числа $q \in \pi$ из $g^q \in Y$ следует, что $g \in Y$. Наименьшая π-изолированная подгруппа, содержащая подгруппу Y группы X, называется π*-изолятором* Y (об изоляторах в нильпотентных группах см., например, [2, § 4]). Как обычно, π' обозначает множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Легко видеть, что произвольная π-отделимая подгруппа должна быть π'-изолированной. Очевидно также, что π'-изолятор подгруппы Y содержит множество π'*-корней* из Y, т.е. множество всех таких элементов, которые в некоторой π'-степени лежат в Y (мы будем обозначать его через $\sqrt[\pi']{Y}$).

Обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места. Известно, однако, что для всякой подгруппы Y произвольной нильпотентной группы множество $\sqrt[\pi']{Y}$ является подгруппой (там же). Можно утверждать также, что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения подгруппа $\sqrt[\pi']{Y}$ π-отделима (см. замечание в конце п. 3). Естественно возникает вопрос, справедливы ли аналогичные утверждения для подгрупп произвольной группы, аппроксимируемой в классе $\mathscr{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. В этом направлении здесь будет доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть группа G аппроксимируема в классе $\mathscr{N}$. Тогда для каждой $\mathscr{N}$-подгруппы группы G множество π'-корней из этой подгруппы является π-отделимой $\mathscr{N}$-подгруппой. В частности, каждая π'-изолированная $\mathscr{N}$-подгруппа группы G π-отделима.*

Заметим, что хотя формулировка теоремы не требует явно отделимости конечно порожденных нильпотентных подгрупп группы G в классе $\mathscr{N}$, здесь это условие выполняется автоматически (см. предложение 1 ниже). Приведем два утверждения, непосредственно вытекающих из сформулированной теоремы.

Следствие 1. *Пусть группа G является прямым произведением семейства свободных групп. Тогда для каждой конечно порожденной абелевой подгруппы группы G множество π'-корней является π-отделимой конечно порожденной абелевой подгруппой.*

Следствие 2. *Пусть F – свободная группа, w – элемент группы F, порождающий в F свой централизатор, и $G = \langle F * X;\ w = x^n \rangle$ – свободное произведение с объединенной подгруппой группы F и бесконечной циклической группы X с порождающим x, $n \geqslant 1$. Тогда для каждой циклической подгруппы группы G множество π'-корней является π-отделимой циклической подгруппой.*

Действительно, аппроксимируемость свободной группы в классе $\mathscr{N}$ хорошо известна, а для группы G из формулировки следствия 2 аналогичное утверждение доказано в работе [3].

Отметим также, что следствие 1 является обобщением известного результата о том, что всякая π'-изолированная циклическая подгруппа свободной группы является π-отделимой (см., например, [4]).

2. Об отделимости подгрупп в классах групп без кручения. Аппроксимируемость в некотором классе групп (равносильная отделимости единичной подгруппы), вообще говоря, не влечет за собой отделимости даже циклических подгрупп. В этой связи представляет интерес следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{L}$ – класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,* *группа G $\mathscr{L}$-аппроксимируема, H – произвольная полициклическая подгруппа группы G. Тогда*

1) *подгруппа H $\mathscr{L}$-отделима;*

2) *существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathscr{L}$, инъективный на подгруппе H.*

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Воспользуемся индукцией по рангу Гирша $r(H)$ подгруппы H, т.е. по числу бесконечных факторов в произвольном полициклическом ряде подгруппы H.

Так как группа G без кручения, произвольная ее полициклическая подгруппа ранга 0 тривиальна, и утверждение в этом случае очевидно.

Пусть теперь $r(H) > 0$. Обозначим через Ω семейство всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{L}$. Ввиду условий, наложенных на класс $\mathscr{L}$, пересечение конечного числа подгрупп из Ω снова принадлежит Ω.

Пусть h – некоторый элемент подгруппы H, отличный от 1, и $N \in \Omega$ – подгруппа, не содержащая h. Положим $H_1 = H \cap N$. Тогда группа H/H_1 содержит элемент бесконечного порядка hH_1 и, следовательно, $r(H_1) < r(H)$. В силу индуктивного предположения найдется подгруппа $N_1 \in \Omega$ такая, что $H_1 \cap N_1 = 1$. Отсюда $H \cap (N \cap N_1) = H_1 \cap N_1 = 1$.

Доказательство отделимости будем вести индукцией по минимальной длине полициклического ряда подгруппы H.

В случае, когда $H = 1$, искомое утверждение следует из $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы G. Поэтому будем считать, что H является расширением своей нормальной $\mathscr{L}$-отделимой подгруппы H_1 при помощи циклической группы.

Предположим, что существует такой элемент $g \in G \setminus H$, что для всякой подгруппы $M \in \Omega$ выполнено $g \in HM$.

Выберем подгруппу $N \in \Omega$ таким образом, чтобы $H \cap N = 1$ и $g \notin H_1N$. Пусть также h – порождающий подгруппы H по модулю H_1. Тогда для каждой подгруппы $M \in \Omega$ выполнено $h^{-m(M)}g \in H_1M$ для некоторого целого числа $m(M)$, отличного от нуля.

Если подгруппа $M \in \Omega$ лежит в N, то $h^{m(M)-m(N)} \in H_1N$, но $H \cap N = 1$, поэтому $h^{m(M)-m(N)} \in H_1$ и $h^{-m(N)}g \in H_1M$. Поскольку подгруппа H_1 $\mathscr{L}$-отделима, отсюда следует, что $h^{-m(N)}g \in H_1$ и $g \in H$. Получаем противоречие с выбором элемента g. Предложение 1 доказано полностью.

3. Изоляторы в группах, аппроксимируемых конечными π-группами. Будем говорить, что порядок элемента g группы X по модулю некоторой подгруппы Y *конечен и равен* n, если $g^n \in Y$ и $g^m \notin Y$ для каждого m такого, что $0 < m < n$.

Предложение 2. *Пусть группа X аппроксимируема конечными π-группами, Y – нильпотентная подгруппа группы X ступени c. Тогда множество $\sqrt[\pi']{Y}$ является нильпотентной подгруппой группы X ступени c. Если подгруппа Y конечно порождена и порядки всех элементов из $\sqrt[\pi']{Y}$ по модулю подгруппы Y ограничены в совокупности, то и подгруппа $\sqrt[\pi']{Y}$ является конечно порожденной.*

Доказательство. Будучи аппроксимируемой конечными π-группами, группа X вкладывается в декартово произведение семейства конечных π-групп X_i, $i \in I$. Обозначим через Y_i проекцию подгруппы Y на группу X_i.

Очевидно, что проекция π'-изолятора U подгруппы Y на каждую группу X_i совпадает с Y_i. Поэтому подгруппа U вкладывается в декартово произведение нильпотентных групп Y_i, каждая из которых имеет ступень не выше c, и, следовательно, сама является нильпотентной группой ступени c. Отсюда сразу же следует, что $U = \sqrt[\pi']{Y}$ [2].

Предположим теперь, что подгруппа Y конечно порождена и порядки всех элементов из U по модулю подгруппы Y ограничены в совокупности числом q (представляющим собой, очевидно, π'-число), но при этом подгруппа U не является конечно порожденной. Тогда найдется фактор $\xi_{i+1}(U)/\xi_i(U)$ верхнего центрального ряда группы U, не являющийся конечно порожденной группой.

Ввиду отсутствия π'-кручения в группе X подгруппа $\xi_i(U)$ π'-изолирована в U и фактор-группа $U/\xi_i(U)$ – это группа с однозначным извлечением π'-корней [2, лемма 4.7]. Поэтому отображение подгруппы $\xi_{i+1}(U)/\xi_i(U)$, переводящее элемент x в x^q, является вложением этой подгруппы в конечно порожденную нильпотентную группу $Y/\xi_i(U)\cap Y$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Приведем одно простое следствие предложения 2.

Следствие. *Пусть X – некоторая группа, π – произвольное непустое множество простых чисел, $1 \leqslant c < \infty$, и пусть для любого числа $p \in \pi$ выполнены следующие условия*:

1) *группа X аппроксимируема конечными p-группами*;
2) *все p'-изолированные нильпотентные подгруппы группы X ступени не выше c p-отделимы.*

Тогда все π'-изолированные нильпотентные подгруппы группы X ступени не выше c π-отделимы.

Доказательство. Действительно, пусть Y – π'-изолированная нильпотентная подгруппа группы X ступени не выше c, $g \in X$ – произвольный элемент, не принадлежащий Y. Из предложения 2 следует, что для любого числа $p \in \pi$ множество $\sqrt[p']{Y}$ является нильпотентной подгруппой группы X, p'-изолированной, а значит, и p-отделимой. Если порядок g по модулю подгруппы Y конечен и равен n, то для любого простого делителя p числа n выполнено $g \notin \sqrt[p']{Y}$. Если же порядок g по модулю подгруппы Y бесконечен, то $g \notin \sqrt[p']{Y}$ для каждого числа $p \in \pi$.

Заметим, что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения для любого простого числа p каждая p'-изолированная подгруппа p-отделима [5]. Последнее утверждение позволяет распространить этот результат на случай произвольного множества простых чисел π. Впрочем, это можно сделать и непосредственно, модифицировав соответствующее рассуждение из [5].

4. Доказательство теоремы. Используя предложение 2, мы докажем утверждение, несколько более общее, чем то, что было сформулировано в теореме.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{K}$ – класс групп без кручения, аппроксимируемых конечными π-группами, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, и пусть в любой группе из $\mathscr{K}$ для каждой $\mathscr{N}$-подгруппы ступени не выше c, $1 \leqslant c < \infty$, множество π'-корней является π-отделимой $\mathscr{N}$-подгруппой. Если группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема, то и в G*

для каждой $\mathscr{N}$-подгруппы ступени не выше c множество π'-корней является π-отделимой $\mathscr{N}$-подгруппой.

Пусть снова Ω обозначает семейство всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{K}$, H – конечно порожденная нильпотентная подгруппа группы G ступени не выше c. В соответствии с условием для каждой подгруппы $M \in \Omega$ множество $\sqrt[\pi']{HM/M}$ является конечно порожденной нильпотентной π-отделимой подгруппой группы G/M. Отсюда следует, в частности, что подгруппа HM/M имеет конечный индекс в $\sqrt[\pi']{HM/M}$ [2].

В силу предложения 1 существует такая подгруппа $N \in \Omega$, что $H \cap N = 1$. Пусть также $k = [\sqrt[\pi']{HN/N} : HN/N]$, q есть произведение всех π'-чисел, не превосходящих k. Покажем, что для каждой подгруппы $M \in \Omega$, лежащей в N, порядки элементов подгруппы $\sqrt[\pi']{HM/M}$ по модулю HM/M не превосходят k.

Рассмотрим сначала произвольный элемент $h \in H$, порождающий в H π'-изолированную подгруппу. Из условия легко следует, что для каждой подгруппы $M \in \Omega$ π'-изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M снова будет циклической подгруппой.

Пусть $\langle uN \rangle$ – π'-изолятор в группе G/N подгруппы $\langle hN \rangle$. Тогда для некоторого π'-числа n выполнено равенство $(uN)^n = hN$, причем без ограничения общности можно считать, что $n > 0$. Так как $H \cap N = 1$, подгруппа $\langle hN \rangle$ π'-изолирована в HN/N, и потому число n является порядком uN по модулю подгруппы HN/N.

Если далее подгруппа $M \in \Omega$ лежит в N и $\langle vM \rangle$ – π'-изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M, $(vM)^m = hM$, то $(vN)^m = hN$ и, так как подгруппа $\langle uN \rangle$ π'-изолирована в G/N, $vN \in \langle uN \rangle$. Поскольку группа G/N без кручения, отсюда следует, что $m \mid n$.

Пусть теперь xM – произвольный элемент подгруппы $\sqrt[\pi']{HM/M}$, и пусть для некоторого π'-числа r выполнено $(xM)^r \in HM/M$. Пусть также $\langle hM \rangle$ – π'-изолятор подгруппы $\langle (xM)^r \rangle$ в подгруппе HM/M, $\langle vM \rangle$ – π'-изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M.

Так как $H \cap M = 1$, подгруппа $\langle h \rangle$ π'-изолирована в H, и в силу доказанного выше $[\langle vM \rangle : \langle hM \rangle] \leqslant k$. Очевидно далее, что $xM \in \langle vM \rangle$, поэтому порядок элемента xM по модулю подгруппы $\langle hM \rangle \leqslant HM/M$ также не превосходит k.

Обозначим через Σ семейство всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G и положим $K = \bigcap_{L \in \Sigma} HL$. Легко видеть, что подгруппа K является π-отделимой.

Пусть g – произвольный элемент из K. Тогда $g\varphi \in H\varphi$ при любом гомоморфизме φ группы G на конечную π-группу и, следовательно, $gM \in \sqrt[\pi']{HM/M}$ для всякой подгруппы $M \in \Omega$. Из доказанного выше вытекает, что если M лежит в N, то $g^q \in HM$. Заметим теперь, что по предложению 1 подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима, поэтому $g^q \in H$ и $g \in \sqrt[\pi']{H}$. Обратное включение $\sqrt[\pi']{H} \subseteq K$ очевидно.

Таким образом, для любой $\mathscr{N}$-подгруппы H ступени не выше c множество $\sqrt[\pi']{H}$ является π-отделимой подгруппой в G. В частности, каждая π'-изолированная $\mathscr{N}$-подгруппа группы G ступени не выше c π-отделима. Как было только что показано, порядки элементов $\sqrt[\pi']{H}$ по модулю подгруппы H ограничены в совокупности. Из предложения 2 теперь следует, что множество $\sqrt[\pi']{H}$ является конечно порожденной нильпотентной подгруппой в G. Предложение 3 доказано.

Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдаванскому за ряд ценных советов и замечаний при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
[2] Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. № 1. М.: Мир, 1968. С. 3–36.
[3] Baumslag G. On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 491–506.
[4] Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 3–8.
[5] Логинова Е. Д. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 2. С. 395–407.

Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
15.11.2001
Исправленный вариант
16.07.2002