Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 128 – 132

Е. В. Соколов

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Установлено, что конечно порожденная разрешимая группа, ограниченная в смысле А. И. Мальцева, является полициклической.

It is proved that a finitely generated solvable group bounded in the sense of Mal'cev is polycyclic.

УДК 512.543.

Классы ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп, которые мы будем обозначать символами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ соответственно, были введены А. И. Мальцевым [2] в связи с изучением вопроса о финитной отделимости подгрупп разрешимых групп. Напомним, что абелева группа называется *ограниченной* (в смысле А. И. Мальцева), если

(1) произвольная ее фактор-группа не содержит квазициклических подгрупп и

(2) все примарные компоненты ее периодической части конечны.

Разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным субнормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами.

В работе [2] установлено, в частности, что в произвольной $\mathcal{S}$-группе все подгруппы финитно отделимы и, таким образом, для конечно определенных групп из этого класса разрешима проблема вхождения. При этом для разрешимых групп без кручения ограниченность является не только достаточным, но и необходимым условием финитной отделимости всех подгрупп.

Оказывается, что конечно порожденные (и, в частности, конечно определенные) $\mathcal{S}$-группы имеют простое описание. Справедлива следующая

Теорема. *Произвольная конечно порожденная $\mathcal{S}$-группа является полициклической.*

Заметим, что если ослабить требования, предъявляемые к факторам разрешимой группы, отбросив условие (2), то аналог приведенной теоремы уже не будет иметь места. Соответствующий пример привести совсем несложно.

Пусть группа A представляет собой прямое произведение счетного числа циклических групп порядка 2 с порождающими a_i, $i \in \mathbb{Z}$. Определим автоморфизм ψ группы A по правилу $a_i\psi = a_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, и обозначим через Ψ циклическую подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,(A)$, порожденную элементом ψ. Тогда подгруппа $H = \Psi A$ голоморфа группы A порождается элементами a_0 и ψ, но не является полициклической. И при этом факторы ее A и H/A удовлетворяют, очевидно, условию (1).

Перейдем теперь к доказательству сформулированной теоремы.

Пусть G — некоторая конечно порожденная $\mathcal{S}$-группа. Воспользуемся индукцией по ступени разрешимости группы G.

Если группа G абелева, утверждение очевидно, поэтому далее мы будем считать, что эта группа является расширением некоторой абелевой группы A при помощи группы C, которую в силу индуктивных соображений можно считать полициклической.

Лемма 1. *Произвольная полициклическая группа C содержит нормальную подгруппу конечного индекса, которая является поли-$\mathbb{Z}$ группой, т. е. обладает субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами.*

Доказательство будем вести индукцией по ступени разрешимости n группы C. Если $n = 1$, т. е. группа C абелева, утверждение очевидно. Следовательно, можно считать, что группа C имеет ступень разрешимости $n \geqslant 2$ и для всех разрешимых групп меньшей ступени лемма справедлива.

Пусть $D = C^{(n-1)}$ — последний отличный от единицы коммутант группы C. Ввиду хорошо известной финитной аппроксимируемости [3] группа C обладает нормальной подгруппой N конечного индекса, тривиально пересекающейся с периодической частью $\tau(D)$ группы D. Пересечение $N \cap D$ мы обозначим через E.

Фактор-группа N/E имеет ступень разрешимости не выше $n-1$ и в силу индуктивного предположения содержит нормальную подгруппу M/E конечного индекса, являющуюся поли-$\mathbb{Z}$ группой. Положим

$$L = \bigcap_{c \in C} c^{-1}Mc.$$

Поскольку подгруппа M имеет конечный индекс в группе C, тем же свойством обладает и подгруппа L. К тому же она нормальна во всей группе C и содержит подгруппу E. Покажем, что L является поли-$\mathbb{Z}$ группой.

В самом деле, пусть

$$1 = M_0/E \leqslant M_1/E \leqslant \dots \leqslant M_k/E = M/E$$

— некоторый субнормальный ряд фактор-группы M/E с бесконечными циклическими факторами. Пересекая члены этого ряда с подгруппой L/E, мы получаем субнормальный ряд в группе L/E, факторы которого вкладываются в группы $(M_{i+1}/E)/(M_i/E)$ и, следовательно, либо тривиальны, либо снова оказываются бесконечными циклическими группами.

В силу выбора подгруппы N группа E не имеет кручения, т. е. является свободной абелевой группой конечного ранга. Стало быть, подгруппа L представляет собой расширение поли-$\mathbb{Z}$ группы при помощи поли-$\mathbb{Z}$ группы и потому сама — поли-$\mathbb{Z}$ группа. $\square$

Из леммы 1 вытекает, что группа G содержит субнормальный ряд

$$1 \leqslant A = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_n \leqslant G,$$

все факторы G_{i+1}/G_i которого являются бесконечными циклическими, а фактор G/G_n — конечной полициклической группой. Поскольку группа G конечно порождена, этим свойством обладает и подгруппа G_n. Если мы покажем, что эта подгруппа полициклическая, то отсюда будет следовать, что и вся группа G является полициклической. Поэтому далее без потери общности можно предполагать, что $G_n = G$.

Пусть $F = \{f_1, \ldots , f_k\}$ — некоторая система порождающих группы G и пусть g_i обозначает порождающий подгруппы G_i по модулю G_{i-1}. Мы можем считать, очевидно, что множество F содержит все элементы g_i, а также все коммутаторы вида $[g_j,\ g_i]$ и $[g_j,\ g_i^{-1}]$, где $j < i$.

Заметим, что каждый элемент $g \in G_i$ однозначным образом записывается в виде

$$g = g_i^{m_i} g_{i-1}^{m_{i-1}} \ldots g_1^{m_1} a_g$$

для подходящего элемента $a_g \in A$. Представим таким способом все элементы из множества F. В результате мы получим новую систему порождающих группы G, состоящую из элементов $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n,\ a_{f_1},\ a_{f_2},\ \ldots,\ a_{f_k}$. Положим

$$S_0 = \left\{g^{-1} a_f g \mid g \in \langle g_1,\ g_2, \ldots , g_n\rangle, f \in F\right\},$$
$$S_i = S_0 \cup \left\{g_1,\ g_2, \ldots , g_i\right\}.$$

Лемма 2. *Для любого $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ подгруппа G_i порождается множеством элементов S_i.*

Доказательство. Для $i = n$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что для некоторого i $G_i = \langle S_i\rangle$, и покажем, что тогда $G_{i-1} = \langle S_{i-1}\rangle$.

Очевидно, что множество $\left\{g_i^m \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$ представляет собой полную систему представителей смежных классов группы G_i по подгруппе G_{i-1}. Поэтому последняя порождается всевозможными элементами вида

$$s_{m,\,h} = g_i^m h \left(\overline{g_i^m h}\right)^{-1},$$

где элемент h пробегает множество S_i, $m \in \mathbb{Z}$ и символ $\overline{g_i^m h}$ обозначает представителя смежного класса группы G_i по подгруппе G_{i-1}, которому принадлежит элемент $g_i^m h$ (см., напр., [1, теорема 2.7]).

Если $h = g_i$, то $\overline{g_i^m h} = g_i^{m+1}$ и $s_{m,\,h} = 1$. Если же $h \neq g_i$, то $h \in S_{i-1} \subseteq G_{i-1}$ и $\overline{g_i^m h} = g_i^m$. Таким образом, в действительности подгруппа G_{i-1} порождается элементами

$$s_{m,\,h} = g_i^m h g_i^{-m},\ \text{где}\ h \in S_{i-1},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Если, далее, элемент h выбирается из множества S_0, то элемент $s_{m,\,h}$ также принадлежит этому множеству. Стало быть, нам остается показать, что для каждого j, меньшего i, и для каждого неотрицательного числа m

$$g_i^{-m} g_j g_i^m,\ g_i^m g_j g_i^{-m} \in \langle S_{i-1} \rangle.$$

Отсюда сразу же будет следовать искомое равенство $G_{i-1} = \langle S_{i-1} \rangle$.

Если $m = 0$, включения очевидны. Предположим теперь, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого m, и покажем, что в этом случае оно верно и для $m + 1$.

Поскольку коммутатор $[g_j,\ g_i]$ лежит в подгруппе G_{i-1}, его можно представить в виде

$$[g_j,\ g_i] = g_{i-1}^{m_{i-1}} g_{i-2}^{m_{i-2}} \cdots g_1^{m_1} a$$

для некоторого однозначным образом определенного элемента $a \in A$. Напомним, что этот коммутатор принадлежит также и системе порождающих F группы G. Поэтому $a \in S_0$, и в силу индуктивного предположения

$$\begin{aligned} g_i^{-(m+1)} g_j g_i^{m+1} &= g_i^{-m} g_j g_i^m g_i^{-m} [g_j,\ g_i] g_i^m = \\ &= g_i^{-m} g_j g_i^m (g_i^{-m} g_{i-1} g_i^m)^{m_{i-1}} \cdots (g_i^{-m} g_1 g_i^m)^{m_1} g_i^{-m} a g_i^m \in \langle S_{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяется включение

$$g_i^{m+1} g_j g_i^{-(m+1)} = g_i^m g_j \left[g_j,\ g_i^{-1}\right] g_i^{-m} \in \langle S_{i-1} \rangle. \ \square$$

Из леммы 2 вытекает, в частности, что множество S_0 является порождающим для абелевой подгруппы A. Мы хотим показать теперь, что в действительности эта подгруппа конечно порождена. Для этого нам потребуется одно легко проверяемое утверждение, доказательство которого можно найти в [2].

Лемма 3. *Классы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ замкнуты относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и прямых произведений конечного числа сомножителей, причем произвольная абелева подгруппа $\mathcal{S}$-группы принадлежит классу $\mathcal{A}$.*

В силу этой леммы подгруппа A является ограниченной абелевой группой. Предположим, что ее ранг бесконечен (здесь под рангом мы понимаем мощность максимальной линейно независимой системы элементов). Тогда она содержит в качестве подгруппы свободную абелеву группу бесконечного ранга, среди гомоморфных образов которой есть и квазициклические группы. Это означает, что для группы A не выполняется условие (1), и тем самым мы получаем противоречие.

Таким образом, группа A имеет конечный ранг, обозначим его через r. Если $r \geqslant 1$, выберем некоторую максимальную линейно независимую систему элементов $\{b_1,\ b_2, \ldots,\ b_r\} \subseteq A$ и положим $B = \langle b_1,\ b_2, \ldots,\ b_r \rangle$. Если же $r = 0$, полагаем $B = 1$. В обоих случаях все элементы группы A имеют конечный порядок по модулю подгруппы B.

Рассмотрим множество

$$Q = \left\{g_i^{\mp 1} b_j g_i^{\pm 1} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant r\right\} \cup \left\{a_f \;\middle|\; f \in F\right\}$$

и обозначим через q произведение порядков всех его элементов по модулю подгруппы B.

Лемма 4. *Порядок произвольного элемента множества S_0 по модулю подгруппы B является q-числом.*

Доказательство. По определению множества S_0 каждый его элемент сопряжен с некоторым элементом a_f, $f \in F$, при помощи элемента g из подгруппы $\langle g_1,\ g_2, \ldots,\ g_n \rangle$. Рассуждение будем вести индукцией по минимальной длине l элемента g в символах $g_i^{\pm 1}$.

Если $l = 0$, утверждение леммы следует просто из определения числа q.

Предположим теперь, что элемент $h \in S_0$ сопряжен с некоторым элементом $h_1 \in S_0$ при помощи элемента g_i^{ε}, где $\varepsilon = \pm 1$, и что порядок t элемента h_1 по модулю подгруппы B является q-числом. Поскольку сопряжение элементом g_i^{ε} индуцирует автоморфизм группы A, тот же порядок t имеет и элемент $h = g_i^{-\varepsilon} h_1 g_i^{\varepsilon}$ по модулю подгруппы $g_i^{-\varepsilon} B g_i^{\varepsilon}$. Но из определения числа q следует, что $(g_i^{-\varepsilon} B g_i^{\varepsilon})^q \leqslant B$, поэтому порядок элемента h по модулю подгруппы B также оказывается q-числом. $\square$

Таким образом, порядки всех элементов фактор-группы A/B, принадлежащей согласно лемме 3 классу $\mathcal{A}$, являются q-числами, и ввиду условия (2) эта группа конечна. Из конечной порожденности группы B теперь сразу же вытекает, что и группа A конечно порождена. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М., 1974. 456 с.
2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.
3. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups IV // J. Lond. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.