Общая характеристика работы

Актуальность темы. Напомним, что подгруппа H группы G называется *отделимой в классе групп* $\mathcal{K}$, или, короче, $\mathcal{K}$-*отделимой*, если для всякого элемента $g \in G \setminus H$ существует такой гомоморфизм ψ группы G на некоторую $\mathcal{K}$-группу, что $g\psi \notin H\psi$. Таким образом, группа G аппроксимируема в классе $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа является $\mathcal{K}$-отделимой, и, стало быть, понятие отделимости можно рассматривать как обобщение понятия аппроксимируемости.

Если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то имеет место более сильное утверждение: $\mathcal{K}$-отделимость нормальной подгруппы N группы G оказывается равносильной $\mathcal{K}$-аппроксимируемости фактор-группы G/N. Это замечание позволяет, в частности, свести описание $\mathcal{K}$-отделимых подгрупп абелевой группы к поиску критерия $\mathcal{K}$-аппроксимируемости. Однако в общем случае подобное сведение не может быть выполнено и, таким образом, изучение свойства отделимости подгрупп представляет самостоятельный интерес.

Понятие отделимости в произвольном классе групп впервые было введено А. И. Мальцевым. В работе [33] он указал на особую роль, которую играет отделимость в классе $\mathcal{F}$ всех конечных групп, называемая по аналогии с аппроксимируемостью *финитной*. Им было установлено, что финитная отделимость данной подгруппы H конечно определенной финитно аппроксимируемой группы G гарантирует существование алгоритма, распознающего принадлежность произвольного элемента из G подгруппе H. Это означает, в частности, что любая конечно определенная финитно аппроксимируемая группа имеет разрешимую проблему тождества. Если же все подгруппы такой группы являются финитно отделимыми, то для нее оказывается разрешимой и проблема вхождения.

В настоящей работе рассматривается более тонкое свойство отделимости в классе $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π-групп, где π — некоторое непустое множество простых чисел.

Очевидно, что если подгруппа H является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в группе G, то все корни π'-степеней, извлекающиеся в G из ее элементов, должны снова принадлежать H (здесь и далее π' обозначает множество всех простых чисел, не принадлежащих π). Подгруппу, обладающую этим свойством, называют π'-*изолированной* в группе G.

Таким образом, если π отлично от множества всех простых чисел Π и если G содержит хотя бы один элемент, порядок которого не является π-числом, то уже заведомо не все подгруппы группы G будут $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми. Поэтому в качестве обобщения свойства финитной отделимости всех подгрупп данной группы имеет смысл рассматривать утверждение об $\mathcal{F}_\pi$-отделимости всех π'-изолированных подгрупп. Отметим, что это утверждение не следует, вообще говоря, из свойства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости ни для какого множества простых чисел π (подробно этот вопрос обсуждается в § 1.3 диссертации), и уже поэтому изучение его представляет определенный интерес.

Однако для выделения понятия $\mathcal{F}_\pi$-отделимости в качестве самостоятельного объекта исследования существуют, разумеется, и другие, более веские основания. Это понятие оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств различных свободных конструкций групп. В качестве иллюстрации мы приведем два сравнительно новых результата, полученных в данном направлении.

Согласно К. Грюнбергу [13] класс групп $\mathcal{K}$ называют *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений и если для любого субнормального ряда $1 \leq C \leq B \leq A$ такого, что $A/B \in \mathcal{K}$ и $B/C \in \mathcal{K}$, в группе A существует нормальная подгруппа D, лежащая в C, фактор-группа по которой снова принадлежит $\mathcal{K}$. Легко видеть, что корневыми являются, в частности, все классы $\mathcal{F}_\pi$ независимо от выбора множества π.

Пусть теперь A и B — две изоморфные копии некоторой группы и $\alpha\colon A \to B$ — изоморфизм. Пусть также H — подгруппа группы A, $K = H\alpha$ и отображение $\varphi\colon H \to K$ получается ограничением на H изоморфизма α. Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо показали [28], что свободное произведение $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ (т. е. группа, задаваемая образующими и определяющими соотношениями групп A и B, а также всеми соотношениями вида $h = h\varphi$, где элемент h пробегает подгруппу H), аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема и подгруппа H является $\mathcal{K}$-отделимой в этой группе.

Другой пример касается конструкций свободного произведения двух групп с коммутирующими и централизованными подгруппами.

Напомним (см. [32, с. 230]), что если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B, то *свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K* называется группа

$$G_1 = (A * B;\ [H, K] = 1),$$

задаваемая всеми образующими и определяющими соотношениями групп A и B, а также соотношениями вида $[h, k] = 1$, где элемент h пробегает подгруппу H, а элемент k — подгруппу K.

Аналогичным образом определяется *свободное произведение*

$$G_2 = (A * B;\ [A, K] = 1,\ [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K (там же, с. 231): эта группа задается образующими и определяющими соотношениями групп A и B и всеми соотношениями вида $[a, k] = 1$, $[h, b] = 1$, где $a \in A$, $k \in K$, $h \in H$, $b \in B$.

Е. Д. Логинова в работах [29] и [30] показала, что если множество π состоит из одного числа или совпадает с множеством всех простых чисел и если группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, то аппроксимируемость групп G_1 и G_2

классом $\mathcal{F}_\pi$ равносильна $\mathcal{F}_\pi$-отделимости в группах A и B подгрупп H и K, соответственно.

Таким образом, вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости указанных конструкций сводится к изучению $\mathcal{F}_\pi$-отделимых подгрупп свободных множителей.

В действительности, $\mathcal{F}_\pi$-отделимость связанных подгрупп очень часто выступает в качестве одного из достаточных (а иногда и необходимых) условий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп, HNN-расширений и других свободных конструкций (см., напр., [5], [6], [34], значительное число результатов такого рода получено и в данной работе). Это обстоятельство является, пожалуй, одной из главных причин исследования свойства $\mathcal{F}_\pi$-отделимости подгрупп в случае, когда π не совпадает с множеством всех простых чисел.

Настоящая работа посвящена, главным образом, изучению $\mathcal{F}_\pi$-отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Интерес к этой конструкции объясняется в числе прочего следующими двумя обстоятельствами.

С одной стороны, даже обычное свободное произведение двух групп с $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми подгруппами не обязано обладать тем же свойством. В качестве примера достаточно рассмотреть свободную группу ранга 2. Она представляет собой свободное произведение двух бесконечных циклических групп, все подгруппы которых финитно отделимы, и в то же время содержит подгруппу, неотделимую в классе $\mathcal{F}$.

С другой стороны, некоторые свободные конструкции могут быть построены с использованием одного лишь обобщенного свободного произведения двух групп. К их числу относятся уже упоминавшиеся выше свободные произведения групп с коммутирующими и централизованными подгруппами, а также так называемое полигональное произведение четырех и более групп с тривиальными пересечениями. Как показывают работы [1], [16], [23], [31], достаточные условия финитной отделимости циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп играют ключевую роль в доказательстве аналогичных свойств перечисленных свободных конструкций.

Приведем теперь краткое описание известных результатов, касающихся отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Прежде всего необходимо отметить, что систематическому изучению подвергалось только свойство финитной отделимости. Как известно, в свободной группе этим свойством заведомо обладают лишь конечно порожденные подгруппы [14], в то время как для остальных ситуация оказывается неоднозначной. Поэтому и для свободных конструкций имело смысл искать достаточные условия финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп (для обозначения групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами в иностранной литературе используется термин *Locally Extended Residually Finite*, сокращенно *LERF*, введенный Р. Бернсом в [9]).

Некоторые наиболее важные положительные результаты, полученные в этом направлении, содержатся в работах [3], [4], [8], [10], [12]. Вместе с тем в [11] и [21] построен целый ряд примеров обобщенных свободных произведений групп, уже не обладающих свойством LERF, в то время как их свободные множители являются LERF-группами. В частности, существует пример свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением, содержащего конечно порожденную подгруппу, не являющуюся финитно отделимой [2].

Весьма продуктивным направлением оказалось также исследование финитной отделимости циклических подгрупп. Связано это с тем, что здесь можно использовать по сути те же самые методы, что и при изучении свойства финитной аппроксимируемости. Основополагающей в данной области является работа П. Стиба [22], в ней же введен термин «π_c*-группа*» для обозначения групп с финитно отделимыми циклическими подгруппами.

Ввиду схожести методов естественно было ожидать, что многие обобщенные свободные произведения π_c-групп, обладающие свойством финитной аппроксимируемости, в действительности окажутся π_c-группами. Значительное число результатов такого рода содержится в работах [3] и [17] (см. также [23]). Тем не менее можно привести пример свободного произведения двух π_c-групп с финитно отделимыми объединяемыми подгруппами, которое является финитно аппроксимируемой, но не π_c-группой (§ 2.2 диссертации).

В отличие от случая финитной отделимости вопрос об $\mathcal{F}_\pi$-отделимости конечно порожденных подгрупп свободной группы остается пока открытым.* Это обстоятельство вынуждает при изучении свойства $\mathcal{F}_\pi$-отделимости в свободных конструкциях групп ограничиться рассмотрением циклических подгрупп.

Цель диссертационного исследования заключалась в описании $\mathcal{F}_\pi$-отделимых циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп. Кроме того, рассматривался вопрос об отделимости в классе $\mathcal{F}_\pi$ подгрупп разрешимых групп, а также групп, аппроксимируемых разрешимыми без кручения.

Научная новизна результатов. Все доказанные утверждения являются новыми. Помимо прочего, в работе

- найдено описание циклических подгрупп обобщенного свободного произ-

---

* Отрицательный ответ на этот вопрос в случае, когда множество π является одноэлементным, был недавно получен В. Г. Бардаковым (частное сообщение). Им построен пример конечно порожденной изолированной подгруппы свободной группы, не являющейся отделимой в классе нильпотентных групп, а, следовательно, и в классе конечных p-групп для любого простого числа p.

ведения двух групп, отделимых в классе конечных π-групп, которое дополняет работу Г. Кима [17];

- получен ряд утверждений об $\mathcal{F}_\pi$-отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях разрешимых и нильпотентных групп, обобщающих некоторые результаты из работ Р. Б. Д. Т. Олленби и Р. С. Грегорака [3], Д. Н. Азарова [25], [26], [27], Е. Д. Логиновой [29] и др.;
- указаны новые достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения нильпотентных групп и групп, аппроксимируемых нильпотентными без кручения;
- установлены некоторые факты, касающиеся $\mathcal{F}_\pi$-отделимости подгрупп в нильпотентных группах, дополняющие результаты А. И. Мальцева [33];
- приведены новые примеры конечно определенных групп, являющихся финитно аппроксимируемыми и, следовательно, имеющих разрешимую проблему тождества.

Методы исследования. В диссертации используются ставшие уже стандартными методы комбинаторной теории групп, в частности, методика изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений, предложенная Г. Баумслагом [6] и получившая развитие в работах П. Стиба [22] и Е. Д. Логиновой [29]. Автором разработана некоторая модификация данной методики, позволяющая изучать отделимость циклических подгрупп обобщенных свободных произведений групп в классе конечных π-групп.

Теоретическое и практическое значение работы. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства могут найти применение в дальнейших исследованиях в данной области.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационного исследования получены соискателем самостоятельно.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на конференциях «Научно-исследовательская деятельность в классическом университете» (Иваново, ИвГУ, 2001, 2003 гг.), «Молодая наука в классическом университете» (ИвГУ, 2002, 2003 гг.), алгебраическом семинаре под руководством А. Л. Шмелькина и А. Ю. Ольшанского (Москва, МГУ, 2002 г.), семинаре по теории групп под руководством Д. И. Молдаванского (ИвГУ, 2001–2003 гг.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух частей, разбитых на 11 параграфов, и дополнения, также содержащего 2 параграфа. Список литературы включает 50 наименований. Для удобства читателя в конце приводится указатель используемых обозначений, как стандартных, так и введенных автором. Общий объем работы — 94 страницы.

КРАТКИЙ ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ.

В **первой части** работы изучается $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгрупп разрешимых групп.

Вопрос о том, при каких условиях все подгруппы разрешимой группы являются финитно отделимыми, был исследован А. И. Мальцевым в уже упоминавшейся выше статье [33]. Он рассмотрел определенный класс разрешимых групп, названных им *ограниченными*, и показал, что все они имеют финитно отделимые подгруппы и при этом для разрешимых групп без кручения свойства ограниченности и финитной отделимости всех подгрупп равносильны. Класс ограниченных разрешимых групп мы будем обозначать символом $\mathcal{S}$.

В § 1.2 получено частичное обобщение приведенного результата: установлено, что в группах, аппроксимируемых классом $\mathcal{S}_0$ ограниченных разрешимых групп без кручения, все $\mathcal{S}$-подгруппы (т. е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathcal{S}$), являются финитно отделимыми.

Далее естественно возникает вопрос о том, нельзя ли все эти результаты распространить на случай произвольного множества π. Оказывается, что сделать это в полном объеме невозможно. Так, даже для полициклических групп, которыми, как показано в § 1.1, исчерпываются все конечно порожденные $\mathcal{S}$-группы, отсутствие π'-кручения не гарантирует еще аппроксимируемости конечными π-группами (соответствующий пример приведен в § 1.3).

Однако для несколько более узкого класса конечно порожденных нильпотентных групп указанный критерий имеет место [13]. Более того, известно, что в конечно порожденной нильпотентной группе все π'-изолированные подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми при любом выборе множества π [27], [29]. Поэтому возникает идея попытаться распространить приведенные результаты на ограниченные разрешимые группы, являющиеся нильпотентными.

И это удается проделать. Класс всех таких групп мы будем называть *классом ограниченных нильпотентных групп* и обозначать символом $\mathcal{N}$. В § 1.4 показано, что все π'-изолированные подгруппы $\mathcal{N}$-групп являются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми, а в § 1.5, — что в группах, аппроксимируемых классом $\mathcal{N}_0$ ограниченных нильпотентных групп без кручения, все π'-изолированные $\mathcal{N}$-подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы. В действительности, доказана несколько более сильная

Теорема 1. *Пусть G — $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемая группа, H — $\mathcal{N}$-подгруппа группы G ступени c, π — некоторое множество простых чисел. Тогда множество π'-корней из подгруппы H является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой $\mathcal{N}$-подгруппой ступени c. В частности, каждая π'-изолированная $\mathcal{N}$-подгруппа группы G $\mathcal{F}_\pi$-отделима.*

Если группа G аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то множество π'-корней из подгруппы H также является конечно порожденной подгруппой.

Эта теорема обобщает, в частности, известное утверждение о том, что в свободной группе все π'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы [19], [27].

Используя стандартное рассуждение, перечисленные результаты можно усилить следующим образом.

Теорема 2. *В конечном расширении $\mathcal{S}$-группы все подгруппы финитно отделимы. В конечном расширении $\mathcal{S}_0$-аппроксимируемой группы все $\mathcal{S}$-подгруппы финитно отделимы.*

Теорема 3. *В расширении $\mathcal{N}$-группы при помощи конечной π-группы все π'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы. В расширении $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемой группы при помощи конечной π-группы все π'-изолированные $\mathcal{S}$-подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы.*

Основные результаты получены во **второй части** работы, где изучается $\mathcal{F}_\pi$-отделимость подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Для дальнейшего изложения нам будет удобно ввести специальное обозначение $\Delta_\pi(X)$ для семейства всех $\mathcal{F}_\pi$-отделимых и, следовательно, π'-изолированных циклических подгрупп произвольной группы X. Также через $\overline{\Delta}_\pi(X)$ мы будем обозначать семейство всех π'-изолированных циклических подгрупп группы X, не являющихся $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми в этой группе.

Пусть группа G представляет собой свободное произведение групп A и B с собственными подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ (эти обозначения мы будем далее предполагать фиксированными). Очевидно, что если π'-изолированная циклическая подгруппа группы A не является $\mathcal{F}_\pi$-отделимой в этой группе, т. е. принадлежит семейству $\overline{\Delta}_\pi(A)$, то она не будет $\mathcal{F}_\pi$-отделимой и во всей группе G. Таким образом, семейство $\overline{\Delta}_\pi(G)$ заведомо содержит все π'-изолированные подгруппы, сопряженные с подгруппами из объединения $\overline{\Delta}_\pi(A) \cup \overline{\Delta}_\pi(B)$. Однако совпадение, означающее максимальность семейства $\Delta_\pi(G)$, не обязательно имеет место (соответствующий пример приводится в § 2.2).

Обозначим через Θ_π семейство пар подгрупп, получаемых пересечением с группами A и B всевозможных нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Кроме того, символами $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$ будем обозначать проекции этого семейства на группы A и B. В § 2.2 найдено описание семейства $\Delta_\pi(G)$ при следующих ограничениях, накладываемых на группу G:

$$\bigcap_{N\in\Theta_\pi(A)} N = \bigcap_{M\in\Theta_\pi(B)} M = 1 \tag{i}$$

$$\bigcap_{N\in\Theta_\pi(A)} HN = H, \quad \bigcap_{M\in\Theta_\pi(B)} KM = K. \tag{ii}$$

Установлено, в частности, что условия (i) и (ii) гарантируют $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G и $\mathcal{F}_\pi$-отделимость всех ее π'-изолированных циклических подгрупп, порождаемых циклически несократимыми элементами неединичной длины.

Для читателей, знакомых с методикой Г. Баумслага [6] и ее расширением П. Стиба [22], уточним, что указанное описание получено с использованием все той же идеи аппроксимируемости обобщенными свободными произведениями конечных групп, которую удалось распространить на случай произвольного класса $\mathcal{F}_\pi$, а соотношения (i) и (ii) представляют собой, очевидно, обобщение хорошо известного «фильтрационного условия» Г. Баумслага.

Стоит отметить, что почти все «аппроксимационные» результаты для свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой получены в предположении справедливости условий (i) и (ii). При этом условие (i), как нетрудно проверить, является необходимым для $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G. В некоторых случаях (например, когда группы A и B нильпотентны) это верно и в отношении условия (ii).

Найденное описание обобщает результаты Г. Кима, полученные им в [17] для обобщенных свободных произведений двух π_c-групп. Кроме того, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G при выполнении соотношений (i) и (ii) установлена в [6] для случая $\pi = \Pi$ и в [29] для случая $\pi = \{p\}$.

Следующий параграф (2.3) содержит несколько достаточно общих условий максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$. Отметим, что если группы A и B $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы, то максимальность данного семейства влечет за собой и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G.

Дальнейшее рассуждение (§§ 2.4–2.6) осуществляется традиционным путем: на группы A и B, подгруппы H и K и изоморфизм φ накладываются разнообразные ограничения, позволяющие применить то или иное условие из § 2.3. Наиболее жесткими эти ограничения оказываются для объединяемых подгрупп. Рассматриваются три основные ситуации: когда подгруппы H и K являются конечными, циклическими (возможно, локально) и нормальными в группах A и B, соответственно.

Хорошо известно (см., напр., [3]), что свободное произведение двух π_c-групп с конечным объединением снова является π_c-группой. Обобщением этого утверждения служит

Теорема 4. *Пусть группы A и B финитно аппроксимируемы, подгруппы H и K конечны. Тогда семейство $\Delta_\Pi(G)$ является максимальным.*

Оказывается, однако, что уже свободное произведение с циклическим объединением двух π_c-групп не обязано быть π_c-группой [2]. Таким образом, здесь не представляется возможным получить результаты, столь же общие, как и для конечной объединяемой подгруппы. Теорема, приводимая ниже, позволяет лишь несколько обобщить результаты Р. Б. Д. Т. Олленби и Р. С. Грегорака [3], касающиеся обобщенных свободных произведений почти полициклических групп.

Теорема 5. *Пусть группы A и B представляют собой конечные расширения $\mathcal{S}$-групп или $\mathcal{S}_0$-аппроксимируемых групп, и пусть $H, K \in \mathcal{S}$, если какой-либо из множителей A, B не является почти $\mathcal{S}$-группой. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих трех условий*:

1) *H и K — циклические подгруппы*;
2) *$H \leq \mathcal{Z}(A)$ или $K \leq \mathcal{Z}(B)$* (*здесь и далее $\mathcal{Z}(X)$ обозначает центр группы X*);
3) *H и K — нормальные подгруппы свободных множителей A и B.*

Тогда G — π_c-группа.

Заметим, что финитная аппроксимируемость группы G в случае, когда множители A и B удовлетворяют условиям теоремы 5, а подгруппы H и K являются циклическими, была установлена Д. Н. Азаровым в [24] и [26].

Как уже было отмечено, свойство $\mathcal{F}_\pi$-отделимости для множества π, отличного от Π, в литературе фактически не рассматривалось. Аппроксимируемость групп классом $\mathcal{F}_\pi$ также изучена значительно менее финитной. Автору известно лишь три результата достаточно общего характера, полученных в этом направлении для обобщенных свободных произведений двух групп. Первый из них — критерий Г. Хигмена [15] аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных групп. Два других принадлежат Д. Н. Азарову и представляют собой необходимые и достаточные условия $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободного произведения с циклическим объединением свободных групп [25] и конечно порожденных нильпотентных групп [27]. Отметим, что частные случаи последних двух утверждений для одноэлементного множества π получены также Г. Кимом и С. Тангом в [19].

Техника доказательства аппроксимационных свойств группы G в случае $\pi = \{p\}$, вообще говоря, сложнее, нежели в случае $\pi = \Pi$. Поэтому, как правило, мы можем лишь надеяться получить p-аналоги отдельных результатов об отделимости подгрупп и аппроксимируемости группы G в классе $\mathcal{F}$. Однако, в случае циклической объединяемой подгруппы ситуация складывается прямо противоположная.

Если свободное произведение двух π_c-групп с циклическим объединением может, вообще говоря, не быть π_c-группой, то свободное произведение двух $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с $\mathcal{F}_p$-отделимыми циклическими объединяемыми подгруппами всегда является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой [18] и обладает максимальным семейством $\mathcal{F}_p$-отделимых циклических подгрупп. В действительности, имеет место еще более сильная

Теорема 6. *Пусть A и B — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемые группы, H и K — локально циклические подгруппы, $\mathcal{F}_p$-отделимые в свободных множителях A и B. Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.*

Кроме сформулированной теоремы в § 2.5 получен еще ряд утверждений, касающихся $\mathcal{F}_\pi$-отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях с циклическим объединением. Основным из них является

Теорема 7. *Пусть A и B — либо свободные, либо ограниченные нильпотентные группы, H и K — (локально) циклические подгруппы. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то все ее π'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы.*

Отметим, что критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G здесь известен: в случае, когда группы A и B свободны, он получен Д. Н. Азаровым, если же $A, B \in \mathcal{N}$, — доставляется теоремой 10 (см. ниже).

Следующие две теоремы содержат результаты, полученные для свободных произведений с конечным объединением и для обобщенных свободных произведений почти $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп. Первая из них обобщает ряд утверждений из работы Г. Хигмена [15].

Теорема 8. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, подгруппы H и K конечны.*

1) *Если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ максимально.*
2) *Если подгруппы H и K являются циклическими или хотя бы одна из них лежит в центре соответствующего свободного множителя, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*
3) *Если подгруппы H и K нормальны в свободных множителях A и B, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой является фактор-группа G/H^pH' (здесь H' обозначает, как обычно, коммутант группы H).*

Теорема 9. *Пусть группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемых групп при помощи конечных p-групп, H и K являются p'-изолированными $\mathcal{S}$-подгруппами (мы используем символ p' для обозначения множества $\{p\}'$). Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:*

1) *H и K — локально циклические подгруппы;*
2) *$H \leq \mathcal{Z}(A)$ или $K \leq \mathcal{Z}(B)$;*
3) *подгруппы H и K нормальны в свободных множителях и фактор-группа G/H^pH' $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Тогда в группе G все p'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы.

В несколько ослабленном варианте последнюю теорему удается распространить на случай произвольного множества π.

Теорема 10. *Пусть A и B — $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемые $\mathcal{N}$-группы (т. е. их периодические части являются π-группами) или $\mathcal{N}_0$-аппроксимируемые группы, H и K — π'-изолированные $\mathcal{N}$-подгруппы (условие $H, K \in \mathcal{N}$ выполняется автоматически, если хотя бы один из свободных множителей является $\mathcal{N}$-группой). Пусть также имеет место по крайней мере одно из следующих трех условий:*

1) *H и K — локально циклические подгруппы;*

2) *$H \leq \mathcal{Z}(A)$ или $K \leq \mathcal{Z}(B)$;*
3) *H и K — нормальные подгруппы свободных множителей A и B, и подгруппа H/H' группы G/H' является локально циклической или лежит в центре хотя бы одной из фактор-групп A/H', B/H'.*

Тогда в группе G все π'-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы.

Здесь необходимо напомнить, что если $A, B \in \mathcal{N}$, то условие (ii), а, стало быть, и π'-изолированность подгрупп H и K, оказываются необходимыми для аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{F}_\pi$. Тем самым, мы получаем критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения $\mathcal{N}$-групп в случае, когда объединяемые подгруппы являются локально циклическими или хотя бы одна из них лежит в центре соответствующего свободного множителя. Этот критерий обобщает и дополняет упомянутый выше результат Д. Н. Азарова.

Наконец, **дополнение** содержит своего рода иллюстрацию применения полученных утверждений к некоторым конечно определенным группам. Рассуждения, используемые здесь, достаточно специфичны, и это послужило основанием для выделения данной части работы в отдельный раздел.

В § Д.1 рассматриваются группы вида

$$G_k = \langle a, c;\ c^{-1}ac = a^k \rangle,\ |k| > 1, \tag{iii}$$

представляющие собой частный случай так называемых групп Баумслага-Солитэра [7]. Напомним, что последние имеют представление

$$G_{k,\,l} = \langle a, c;\ c^{-1}a^l c = a^k \rangle,$$

где без потери общности можно считать, что $|k| \geq l > 0$, т. е. являются всевозможными HNN-расширениями бесконечной циклической группы.

Ограничение $l = 1$, принятое в данной работе, является достаточным (но не необходимым) условием финитной аппроксимируемости группы $G_{k,\,l}$ [7], [20]. Кроме того, что более важно, оно позволяет ввести достаточно простую каноническую форму записи элемента группы G_k, используя которую удается подробно исследовать строение подгрупп этой группы.

В § Д.1 найдено описание финитно отделимых подгрупп группы G_k. Здесь же доказано, что если группа G_k $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то все ее p'-изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$-отделимы (критерий аппроксимируемости группы G_k конечными p-группами получен в работе [34]).

Далее предполагается, что π совпадает с множеством всех простых чисел или является одноэлементным. При этих ограничениях в § Д.2 установлено, что обобщенное свободное произведение G двух $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых групп вида (iii) в свою очередь является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда объединяемые подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы в свободных множителях. При этом $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G влечет за собой максимальность семейства $\Delta_\pi(G)$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то все π'-изолированные циклические подгруппы группы G оказываются $\mathcal{F}_\pi$-отделимыми.

Список цитированной литературы.

1. *Allenby R. B. J. T.* Polygonal products of polycyclic by finite groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1996. V. 54, № 3. P. 369–372.

2. *Allenby R. B. J. T.*, *Doniz D.* A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable // Proc. Am. Math. Soc. 1996. V. 124, № 4. P. 1003–1005.

3. *Allenby R. B. J. T.*, *Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. V. 319. P. 9–17.

4. *Allenby R. B. J. T.*, *Tang C. Y.* Subgroup separability of generalized free products of free-by-finite groups // Can. Math. Bull. 1993. V. 36, № 4. P. 385–389.

5. *Baumslag B.*, *Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. V. 6. P. 179–194.

6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

7. *Baumslag G.*, *Soliter D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.

8. *Brunner A. M.*, *Burns R. G.*, *Solitar D.* The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation // Contributions to group theory. Contemp. Math. 1984. V. 33. P. 90–115.

9. *Burns R. C.* On finitely generated subgroups of free products // J. Austral. Math. Soc. 1971. V. 12. P. 358–364.

10. *Gitik R.* Graphs and separability properties of groups // J. Algebra. 1997. V. 188, № 1. P. 125–143.

11. *Gitik R.*, *Rips E.* A necessary condition for $A *_{a=b} B$ to be LERF // Isr. J. Math. 1991. V. 73, № 1. P. 123–125.

12. *Gitik R.*, *Rips E.* On separability properties of groups // Int. J. Algebra Comput. 1995. V. 5, № 6. P. 703–717.

13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62.

14. *Hall M. Jr.* Coset representation in free groups // Trans. Am. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 421–432.

15. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.

16. *Kim G.* On polygonal products of finitely generated abelian groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1992. V. 45, № 3. P. 453–462.

17. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Canad. Math. Bull. 1993. V. 36 (3). P. 296–302.

18. *Kim G.*, *McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. V. 162, № 1. P. 1–11.

19. *Kim G.*, *Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.

20. *Meskin S.* Non-residually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.

21. *Rips E.* An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Isr. J. Math. 1990. V. 70, № 1. P. 104–110.

22. *Stebe P.* Residual finiteness of a class of knot groups // Comm. Pure and Applied Math. 1968. V. 21. P. 563–583.

23. *Wong P. C.*, *Tang C. K.* Residual finiteness of generalized free products of isomorphic groups // Algebra Colloq. 1997. V. 4, № 2. P. 133–139.

24. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных произведений групп с циклическим объединением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1 (1997). С. 4–10.

25. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 1. С. 3–8.

26. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения ограниченных разрешимых групп с циклическим объединением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 3–4.

27. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Иванов. гос. ун-т. – Иваново, 1999, – 55 с. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 28.04.99 № 1371-В99.

28. *Азаров Д. Н.*, *Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10.

29. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

30. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 101–104.

31. *Логинова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 49–55.

32. *Магнус В.*, *Каррас А.*, *Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М., 1974. 456 с.

33. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

34. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. ИвГУ. Сер. «Биология, Химия, Физика, Математика». Вып. 3 (2000). С. 129–140.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. *Соколов Е. В.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных про-

изведений с объединенной подгруппой // Матер. XXXVIII Межд. науч. студ. конф., 10–14 апреля 2000 г. Математика. Ч. II. Новосибирск: НГУ, 2000. С. 6–7.

2. *Соколов Е. В.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // «Молодая наука – 2000». Сбор. науч. ст. аспирантов и студентов ИвГУ. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2000. С. 229–238.

3. *Соколов Е. В.* Финитная отделимость циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: теория, методология, практика. Матер. науч. конф., Иваново, 6 февраля 2001 г. Иваново: ИвГУ, 2001. С. 156–157.

4. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях групп // Молодая наука в классическом университете. Тез. докл. науч. конф., Иваново, 15–19 апреля 2002 г. Ч. 3. Иваново: ИвГУ, 2002. С. 85.

5. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Иванов. гос. ун-т. – Иваново, 2002, – 23 с. – Библиогр. 13 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 12.07.2002 № 1325-В2002.

6. *Соколов Е. В.* Финитная отделимость циклических подгрупп в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестник молодых ученых ИвГУ. Вып. 2. Иваново: ИвГУ, 2002. С. 7–10.

7. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2002. V. 11. P. 27–38.

8. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп в классе конечных π-групп // Лобачевские чтения – 2002. Матер. межд. молод. науч. школы-конф., Казань, 28 ноября – 1 декабря 2002 г. Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 18. Казань: Казанское математическое общество, 2002. С. 83–84.

9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 1. С. 97–102.

10. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп обобщенного свободного произведения групп // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ – 2003. Матер. науч. конф., Иваново, 19–21 февраля 2003 г. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 6–7.

11. *Соколов Е. В.* Полицикличность конечно порожденных ограниченных разрешимых групп // Молодая наука в классическом университете. Тез. докл. науч. конф., Иваново, 21–25 апреля 2003 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 87–88.

12. *Соколов Е. В.* Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π-групп // Математические заметки. 2003. Т. 73, вып. 6. С. 904–909.

13. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп // Иванов. гос. ун-т – Иваново, 2003, – 90 с. – Библиогр. 49 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 22.07.2003 № 1433-В2003.