

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.543

СОКОЛОВ ЕВГЕНИЙ ВИКТОРОВИЧ

**ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП
В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель: кандидат
физико-математических наук, профессор
Д. И. МОЛДАВАНСКИЙ

Иваново 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
О понятии отделимости подгрупп.....	4
Краткий обзор рассматриваемых вопросов и полученных результатов..	6
Часть 1. Отделимость подгрупп разрешимых групп в некоторых классах конечных групп	11
§ 1.1. Классы ограниченных разрешимых и ограниченных нильпотентных групп.....	11
§ 1.2. $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимость разрешимых подгрупп $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемых групп.....	19
§ 1.3. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость и π' -изолированность	23
§ 1.4. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгрупп в нильпотентных группах	27
§ 1.5. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость нильпотентных подгрупп $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп.....	32
Часть 2. Отделимость циклических подгрупп обобщенных свободных произведений двух групп	36
§ 2.1. Конструкция свободного произведения групп с объединенной подгруппой.....	36
§ 2.2. Описание семейства $\Delta_\pi(G)$	43
§ 2.3. Достаточные условия максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$	51
§ 2.4. $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных разрешимых групп	59
§ 2.5. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных нильпотентных групп с циклическим объединением.....	63
§ 2.6. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных нильпотентных групп с нормальным объединением.....	69

Дополнение. Отделимость подгрупп некоторых конечно определенных групп.....	77
§ Д.1. Описание $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых подгрупп группы G_k	77
§ Д.2. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость циклических подгрупп обобщенных свободных произведений групп G_k	83
Указатель обозначений.....	87
Список цитированной литературы.....	90
Публикации автора по теме диссертации.....	93

ВВЕДЕНИЕ

О понятии отделимости подгрупп

Согласно общему определению [46] подгруппа H группы G называется *отделимой в классе групп $\mathcal{K}$* , или, короче, *$\mathcal{K}$ -отделимой*, если для всякого элемента $g \in G \setminus H$ существует гомоморфизм ψ группы G на некоторую $\mathcal{K}$ -группу такой, что $g\psi \notin H\psi$. Отметим, что группа G аппроксимируема в классе $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа является $\mathcal{K}$ -отделимой. Таким образом, понятие отделимости можно рассматривать как обобщение понятия аппроксимируемости.

Если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то имеет место более сильное утверждение: $\mathcal{K}$ -отделимость нормальной подгруппы N группы G оказывается равносильной $\mathcal{K}$ -аппроксимируемости фактор-группы G/N . Это замечание позволяет, в частности, свести описание $\mathcal{K}$ -отделимых подгрупп абелевой группы к поиску критерия $\mathcal{K}$ -аппроксимируемости. Однако в общем случае подобное сведение не может быть выполнено и, таким образом, изучение свойства отделимости подгрупп представляет самостоятельный интерес.

Понятие отделимости в произвольном классе групп впервые было введено А. И. Мальцевым. В работе [46] он указал на особую роль, которую играет отделимость в классе $\mathcal{F}$ всех конечных групп, называемая по аналогии с аппроксимируемостью *финитной*. Им было установлено, что финитная отделимость данной подгруппы H конечно определенной финитно аппроксимируемой группы G гарантирует существование алгоритма, распознающего принадлежность произвольного элемента из G подгруппе H . Это означает, в частности, что любая конечно определенная финитно аппроксимируемая группа имеет разрешимую проблему тождества. Если же все подгруппы такой группы являются финитно отделимыми, то для нее оказывается разрешимой и проблема вхождения.

В настоящей работе рассматривается более тонкое свойство отделимости в классе $\mathcal{F}_\pi$ всех конечных π -групп, где π — некоторое непустое множество простых чисел.

Очевидно, что если подгруппа H является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G , то все корни π' -степеней, извлекающиеся в G из ее элементов, должны снова принадлежать H (здесь и далее π' обозначает множество всех простых чисел, не

принадлежащих π). Подгруппу, обладающую этим свойством, называют π' -изолированной в группе G .

Таким образом, если π отлично от множества всех простых чисел и если G содержит хотя бы один элемент, порядок которого не является π -числом, то все подгруппы группы G уже заведомо не будут $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми. Поэтому в качестве обобщения свойства финитной отделимости всех подгрупп данной группы имеет смысл рассматривать утверждение об $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости всех π' -изолированных подгрупп. Отметим, что это утверждение не следует, вообще говоря, из свойства $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости ни для какого множества простых чисел π (подробно этот вопрос обсуждается в § 1.3 части 1), и уже поэтому изучение его представляет определенный интерес.

Однако для выделения понятия $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости в качестве самостоятельного объекта исследования существуют, разумеется, и другие, более веские основания. Это понятие оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств различных свободных конструкций групп. В качестве иллюстрации мы приведем два сравнительно новых результата, полученных в данном направлении.

Согласно К. Грюнбергу [15] класс групп $\mathcal{K}$ называют *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений и если для любого субнормального ряда $1 \leq C \leq B \leq A$ такого, что $A/B \in \mathcal{K}$ и $B/C \in \mathcal{K}$, в группе A существует нормальная подгруппа D , лежащая в C , фактор-группа по которой снова принадлежит $\mathcal{K}$. Легко видеть, что корневыми являются, в частности, все классы $\mathcal{F}_\pi$ независимо от выбора множества π .

Пусть теперь A и B — две изоморфные копии некоторой группы и $\alpha: A \rightarrow B$ — изоморфизм. Пусть также H — подгруппа группы A , $K = H\alpha$ и отображение $\varphi: H \rightarrow K$ получается ограничением на H изоморфизма α . Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо показали [39], что свободное произведение $G = (A * B; H = K, \varphi)$ групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ (определение этой конструкции приводится в § 2.1 части 2), аппроксимируется корневым классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда группа A $\mathcal{K}$ -аппроксимируема и подгруппа H является $\mathcal{K}$ -отделимой в этой группе.

Другой пример касается конструкций свободного произведения двух групп с коммутирующими и централизованными подгруппами.

Напомним (см. [43, с. 230]), что если A и B — некоторые группы, H — подгруппа группы A и K — подгруппа группы B , то *свободным произведением групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K* называется группа

$$G_1 = (A * B; [H, K] = 1),$$

задаваемая всеми образующими и определяющими соотношениями групп A и B , а также соотношениями вида $[h, k] = 1$, где элемент h пробегает подгруппу H , а элемент k — подгруппу K .

Аналогичным образом определяется *свободное произведение*

$$G_2 = (A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$$

групп A и B с централизованными подгруппами H и K (там же, с. 231): эта группа задается образующими и определяющими соотношениями групп A и B и всеми соотношениями вида $[a, k] = 1$, $[h, b] = 1$, где $a \in A$, $k \in K$, $h \in H$, $b \in B$.

Е. Д. Логинова в работах [40] и [41] показала, что если множество π состоит из одного числа или совпадает с множеством всех простых чисел и если группы A и B $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы, то аппроксимируемость групп G_1 и G_2 классом $\mathcal{F}_\pi$ равносильна $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости в группах A и B подгрупп H и K , соответственно.

Таким образом, вопрос об $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости указанных конструкций сводится к изучению $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых подгрупп свободных множителей.

В действительности, $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость связанных подгрупп очень часто выступает в качестве одного из достаточных (а иногда и необходимых) условий $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп, HNN-расширений и других свободных конструкций (см., напр., [5], [6], [48], значительное число результатов такого рода получено и в данной работе). Это обстоятельство является, пожалуй, одной из главных причин исследования свойства $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости подгрупп в случае, когда π не совпадает с множеством всех простых чисел.

Краткий обзор рассматриваемых вопросов и полученных результатов

В **первой части** работы изучается $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгрупп разрешимых групп.

Вопрос о том, при каких условиях все подгруппы разрешимой группы являются финитно отделимыми, был исследован А. И. Мальцевым все в той же статье [46]. Он рассмотрел определенный класс разрешимых групп, названных им *ограниченными* (определение и некоторые свойства этих групп приводятся в § 1.1), и показал, что все они имеют финитно отделимые подгруппы и при этом для разрешимых групп без кручения свойства ограниченности и финитной отделимости всех подгрупп равносильны. Класс ограниченных разрешимых групп мы будем обозначать символом $\mathcal{S}$.

В § 1.2 получено частичное обобщение приведенного результата: установлено, что в группах, аппроксимируемых $\mathcal{S}$ -группами без кручения, все $\mathcal{S}$ -подгруппы (т. е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathcal{S}$), являются финитно отделимыми.

Далее естественно возникает вопрос о том, нельзя ли все эти результаты распространить на случай произвольного множества π . Оказывается, что сделать это в полном объеме невозможно. Так, даже для полициклических групп, которыми, как показано в § 1.1, исчерпываются все конечно порожденные $\mathcal{S}$ -группы, отсутствие π' -кручения не гарантирует еще аппроксимируемости ко-

нечными π -группами (см. пример 1.3.8 из § 1.3).

Однако для несколько более узкого класса конечно порожденных нильпотентных групп указанный критерий имеет место [15]. Более того, известно, что в конечно порожденной нильпотентной группе все π' -изолированные подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми при любом выборе множества π [38], [40]. Поэтому возникает идея попытаться распространить приведенные результаты на ограниченные разрешимые группы, являющиеся нильпотентными.

И это удастся проделать. Класс всех таких групп мы будем называть *классом ограниченных нильпотентных групп* и обозначать символом $\mathcal{N}$. В § 1.4 доказано, что все π' -изолированные подгруппы $\mathcal{N}$ -групп являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми, а в § 1.5, — что в группах, аппроксимируемых $\mathcal{N}$ -группами без кручения, множество π' -корней из любой $\mathcal{N}$ -подгруппы снова является $\mathcal{N}$ -подгруппой и при этом $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой. Последнее утверждение обобщает, в частности, известный результат о том, что в свободной группе все π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы [23], [38].

Во **второй части** изучается $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Интерес к этой конструкции объясняется в числе прочего следующими двумя обстоятельствами.

С одной стороны, даже обычное свободное произведение двух групп с $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми подгруппами не обязано обладать тем же свойством. В качестве примера достаточно рассмотреть свободную группу ранга 2. Она представляет собой свободное произведение двух бесконечных циклических групп, все подгруппы которых финитно отделимы, и в то же время содержит подгруппу, неотделимую в классе $\mathcal{F}$ (см. пример 1.3.2 из § 1.3).

С другой стороны, некоторые свободные конструкции могут быть построены с использованием одного лишь обобщенного свободного произведения двух групп. К их числу относятся уже упоминавшиеся выше свободные произведения групп с коммутирующими и централизованными подгруппами, а также так называемое полигональное произведение четырех и более групп с тривиальными пересечениями.

Напомним, что если A_i , $i \in \mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$, — некоторые группы, H_i и K_i — такие тривиально пересекающиеся подгруппы группы A_i , что для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ подгруппа H_i изоморфна K_{i+1} , и $\varphi_i: H_i \rightarrow K_{i+1}$ — фиксированные изоморфизмы, то *полигональным произведением групп A_i с тривиальными пересечениями* называется группа

$$G = (* A_i; H_i = K_{i+1}, \varphi_i, i \in \mathbb{Z}_n),$$

задаваемая образующими и определяющими соотношениями групп A_i и всеми соотношениями вида $h_i = h_i \varphi_i$, где элемент h_i пробегает подгруппу H_i и $i \in \mathbb{Z}_n$.

Как показывают работы [1], [20], [34], [42], достаточные условия финитной отделимости циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп играют ключевую роль в доказательстве аналогичных свойств перечисленных свободных конструкций.

Приведем теперь краткое описание известных результатов, касающихся отделимости подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Прежде всего необходимо отметить, что систематическому изучению подвергалось только свойство финитной отделимости. Как известно, в свободной группе этим свойством заведомо обладают лишь конечно порожденные подгруппы [16], в то время как для остальных ситуация оказывается не однозначной. Поэтому и для свободных конструкций имело смысл искать достаточные условия финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп (для обозначения групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами в иностранной литературе используется термин *Locally Extended Residually Finite*, сокращенно *LERF*, введенный Р. Бернсом в [9]).

Некоторые наиболее важные положительные результаты, полученные в этом направлении, содержатся в работах [3], [4], [8], [12], [14]. Вместе с тем в [13] и [30] построен целый ряд примеров обобщенных свободных произведений групп, уже не обладающих свойством LERF, в то время как их свободные множители являются LERF-группами. В частности, существует пример свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением, содержащего конечно порожденную подгруппу, не являющуюся финитно отделимой [2].

Весьма продуктивным направлением оказалось также исследование финитной отделимости циклических подгрупп. Связано это с тем, что здесь можно использовать по сути те же самые методы, что и при изучении свойства финитной аппроксимируемости. Основополагающей в данной области является работа П. Стиба [32], в ней же введен термин « π_c -группа» для обозначения групп с финитно отделимыми циклическими подгруппами.

Ввиду схожести методов естественно было ожидать, что многие обобщенные свободные произведения π_c -групп, обладающие свойством финитной аппроксимируемости, в действительности окажутся π_c -группами. Значительное число результатов такого рода содержится в работах [3] и [21] (см. также [34]). Тем не менее можно привести пример свободного произведения двух π_c -групп с финитно отделимыми объединяемыми подгруппами, которое является финитно аппроксимируемой, но не π_c -группой (см. пример 2.2.10 из § 2.2).

В отличие от случая финитной отделимости вопрос об $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости конечно порожденных подгрупп свободной группы остается пока открытым. Это обстоятельство вынуждает при изучении свойства $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости в свободных конструкциях групп ограничиться рассмотрением циклических подгрупп.

Для дальнейшего изложения нам будет удобно ввести специальное обозначение $\Delta_\pi(X)$ для семейства всех $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых и, следовательно, π' -изолированных циклических подгрупп произвольной группы X . Также через $\bar{\Delta}_\pi(X)$ мы будем обозначать семейство всех π' -изолированных циклических подгрупп группы X , не являющихся $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми в этой группе.

Пусть группа G представляет собой свободное произведение групп A и B с собственными подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ . Очевидно, что если π' -изолированная циклическая подгруппа группы A не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в этой группе, т. е. принадлежит семейству $\bar{\Delta}_\pi(A)$, то она не будет $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой и во всей группе G . Таким образом, семейство $\bar{\Delta}_\pi(G)$ заведомо содержит все подгруппы, сопряженные с подгруппами из объединения $\bar{\Delta}_\pi(A) \cup \bar{\Delta}_\pi(B)$. Однако совпадение, означающее максимальность семейства $\Delta_\pi(G)$, не обязательно имеет место.

Поскольку формулировки большинства утверждений, полученных во второй части, достаточно громоздки, мы воздержимся от их цитирования и ограничимся лишь ссылками на номера теорем и следствий.

В § 2.2 найдено описание семейства $\Delta_\pi(G)$ при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на группу G (теорема 2.2.2). Для читателей, знакомых с методикой Г. Баумслага [6] и ее расширением П. Стиба [32], уточним, что это описание получено с использованием все той же идеи аппроксимируемости обобщенными свободными произведениями конечных групп, которую удалось распространить на случай произвольного класса $\mathcal{F}_\pi$, а упомянутое ограничение представляет собой ни что иное, как обобщение хорошо известного «фильтрационного условия» Г. Баумслага. Здесь же указан пример свободного произведения с объединенной подгруппой, семейство $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых циклических подгрупп которого не является максимальным (пример 2.2.10).

Следующий параграф содержит несколько достаточно общих условий максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$. В формулировках этих условий фигурирует понятие *регулярности группы по подгруппе*, применявшееся рядом авторов при изучении аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений и HNN-расширений (обзор введенных ими терминов приводится сразу после нашего определения). Использование этого понятия помимо прочего способствует пониманию того, каким образом полученные утверждения могут быть адаптированы к другим классам групп и свободным конструкциям.

Дальнейшее рассуждение (§§ 2.4–2.6) осуществляется традиционным путем: на группы A и B , подгруппы H и K и изоморфизм φ накладываются разнообразные ограничения, позволяющие применить то или иное условие из § 2.3. Наиболее жесткими эти ограничения оказываются для объединяемых подгрупп. Рассматриваются три основные ситуации: когда подгруппы H и K являются конечными, циклическими (возможно, локально) и нормальными в группах A и B , соответственно. В качестве конкретных примеров реализации возникающих условий максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$, как правило, выступают обобщенные свободные произведения ограниченных разрешимых или нильпотентных групп, а также групп, аппроксимируемых $\mathcal{S}$ -группами и $\mathcal{N}$ -группами без кручения (см. следствия 2.4.8, 2.5.5 и 2.6.5).

Отметим, что большая часть утверждений из §§ 2.4–2.6 касается случаев, когда π совпадает с множеством всех простых чисел или является одноэле-

ментным. Однако результаты, полученные для обобщенных свободных произведений $\mathcal{N}$ -групп и групп, аппроксимируемых $\mathcal{N}$ -группами без кручения, удастся практически в полном объеме распространить на случай произвольного множества π (теоремы 2.5.8 и 2.6.7).

Заметим еще, что почти все утверждения из §§ 2.5 и 2.6 доставляют в том числе и новые условия $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости группы G .

Наконец, **дополнение** содержит своего рода иллюстрацию применения полученных результатов к некоторым конечно определенным группам. Рассуждения, используемые здесь, достаточно специфичны, и это послужило основанием для выделения данной части работы в отдельный раздел.

В § Д.1 рассматриваются группы вида

$$G_k = \langle a, c; c^{-1}ac = a^k \rangle, |k| > 1, \quad (*)$$

представляющие собой частный случай так называемых групп Баумслэга-Солитэра [7]. Напомним, что последние имеют представление

$$G_{k,l} = \langle a, c; c^{-1}a^l c = a^k \rangle,$$

где без потери общности можно считать, что $|k| \geq l > 0$, т. е. являются всевозможными HNN-расширениями бесконечной циклической группы.

Ограничение $l=1$, принятое в данной работе, является достаточным (но не необходимым) условием финитной аппроксимируемости группы $G_{k,l}$ [7], [26]. Кроме того, что более важно, оно позволяет ввести достаточно простую каноническую форму записи элемента группы G_k , используя которую удастся подробно исследовать строение подгрупп этой группы.

В § Д.1 найдено описание финитно отделимых подгрупп группы G_k (теорема Д.1.8). Здесь же доказано, что если $\pi = \{p\}$ и если группа G_k $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то все ее π' -изолированные подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы (критерий аппроксимируемости группы G_k конечными p -группами получен в работе [48]).

Далее предполагается, что π совпадает с множеством всех простых чисел или является одноэлементным. При этих ограничениях в § Д.2 установлено, что обобщенное свободное произведение G двух $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемых групп вида (*) в свою очередь является $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда объединяемые подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы в свободных множителях. При этом $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы G влечет за собой максимальность семейства $\Delta_\pi(G)$. В частности, если $\pi = \{p\}$, то все π' -изолированные циклические подгруппы группы G оказываются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми.

Для удобства читателя в конце работы приводится указатель используемых обозначений, как стандартных, так и введенных автором.

ЧАСТЬ 1. ОТДЕЛИМОСТЬ ПОДГРУПП РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§ 1.1. Классы ограниченных разрешимых и ограниченных нильпотентных групп

Отправной точкой для первой части работы послужила статья А. И. Мальцева [46]. Помимо прочего в ней была рассмотрена задача описания разрешимых групп, обладающих свойством финитной отделимости всех подгрупп, в ходе решения которой возник класс $\mathcal{S}$ ограниченных разрешимых групп.

А. И. Мальцев показал, что все подгруппы произвольной $\mathcal{S}$ -группы являются финитно отделимыми и что для разрешимых групп без кручения условия ограниченности и финитной отделимости всех подгрупп эквивалентны (в общем случае это не так). Ниже (§ 1.4) мы получим обобщение данных результатов, касающееся отделимости подгрупп в произвольном классе $\mathcal{F}_\pi$, но для несколько более узкого класса $\mathcal{N}$ ограниченных нильпотентных групп. Сейчас же приведем определения классов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{N}$ и некоторые их свойства, часть из которых была отмечена в [46].

Прежде всего договоримся о некоторых обозначениях, которые будут действовать на протяжении всей работы.

Символом π мы всегда обозначаем непустое множество простых чисел, символом Π — множество всех простых чисел и символом π' , как и выше, — множество всех простых чисел, не принадлежащих π . Так как довольно часто встречается ситуация, когда $\pi = \{p\}$, мы будем опускать фигурные скобки в обозначениях и говорить, например, о p' -изолированности вместо $\{p\}'$ -изолированности.

Если, далее, $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то через $\mathcal{K}_\pi$ обозначается класс всех $\mathcal{K}$ -групп, не имеющих π' -кручения. При этом для самого класса $\mathcal{K}$ у нас возникает второе обозначение: $\mathcal{K}_\Pi$. Мы будем использовать его лишь когда $\mathcal{K} = \mathcal{F}$, чтобы упростить сравнение утверждений, полученных для классов $\mathcal{F}_\Pi$, $\mathcal{F}_\pi$ и $\mathcal{F}_p$ (здесь мы воспользовались предыдущим соглашением и написали $\mathcal{F}_p$ вместо $\mathcal{F}_{\{p\}}$). Во всех остальных случаях употребляется более простое обозначение. Кроме того, для класса $\mathcal{K}_\emptyset$ всех $\mathcal{K}$ -групп без кручения мы, следуя сложившейся традиции, будем использовать символ $\mathcal{K}_0$.

Наконец, если G — нильпотентная группа, то через $\tau_\pi(G)$ обозначается подгруппа группы G , составленная из всех элементов этой группы, порядки

которых являются π -числами. В частности, $\tau_{\Pi}(G)$ есть просто периодическая часть $\tau(G)$ группы G .

Приведем теперь ряд определений и результатов, касающихся абелевых групп.

Напомним, что *рангом абелевой группы* называется мощность максимальной линейно независимой системы ее элементов. Поскольку периодические абелевы группы таких систем не содержат, их ранг полагается равным нулю.

Пусть далее A — некоторая абелева группа. Рассмотрим следующий набор условий:

- (1) группа A имеет конечный ранг;
- (2) все фактор-группы группы A не содержат квазициклических подгрупп;
- (3) в произвольной фактор-группе B группы A все примарные компоненты периодической части $\tau(B)$ имеют конечный период;
- (4) все примарные компоненты периодической части группы A конечны;
- (5) в произвольной фактор-группе B группы A все примарные компоненты периодической части $\tau(B)$ конечны.

Предложение 1.1.1. *Имеют место утверждения:*

- 1) $(2) \Rightarrow (1)$;
- 2) $(2) \Leftrightarrow (3)$;
- 3) $(3) \wedge (4) \Leftrightarrow (5)$.

Доказательство. 1) Пусть ранг группы A бесконечен. Тогда она содержит в качестве подгруппы свободную абелеву группу бесконечного ранга, среди гомоморфных образов которой есть и квазициклические группы. Это означает, что для группы A не выполняется условие (2).

2) Достаточность утверждения очевидна, проверим необходимость.

Пусть в некоторой фактор-группе B группы A существуют элементы $b_1, b_2, b_3, \dots$, имеющие порядки $p, p^2, p^3, \dots$, соответственно. Обозначим подгруппу группы B , порожденную элементами $b_1, b_2, b_3, \dots$, через N .

Группа N счетна и согласно второй теореме Прюфера либо раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порядки которых не ограничены в совокупности, либо содержит элемент a бесконечной высоты. В первом случае ее можно гомоморфно отобразить на группу C_{p^∞} , и, следовательно, существует фактор-группа группы A , содержащая квазициклическую подгруппу.

Предположим, что реализуется вторая возможность.

Как известно, фактор-группа группы N по максимальной подгруппе, не содержащей элемента a , является либо конечной, либо квазициклической группой. Но элемент a имеет бесконечную высоту, поэтому первое невозможно, и мы снова получаем фактор-группу группы A , обладающую квазициклической подгруппой.

Таким образом, группа A не удовлетворяет условию (2).

3) Как и выше, нам следует проверить лишь необходимость.

Пусть B — произвольная подгруппа группы A . Из утверждений 1) и 2) следует, что она имеет конечный ранг r .

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ — некоторая максимальная линейно независимая система элементов группы B и N — подгруппа, порожденная этими элементами. Нам достаточно показать, что все примарные компоненты периодической части фактор-группы A/N конечны. Отсюда будет следовать, что аналогичным свойством обладает и группа A/B .

В самом деле, поскольку фактор-группа B/N периодическая, группа $\tau(A/B)$ является гомоморфным образом группы $\tau(A/N)$. К тому же ввиду условия (3) она раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому каждая ее компонента $\tau_p(A/B)$ оказывается гомоморфным образом группы $\tau(A/N)$, а, следовательно, и группы $\tau_p(A/N)$.

Итак, пусть $T/N = \tau_p(A/N)$ — некоторая примарная компонента фактор-группы A/N . Обозначим через n период этой группы, конечный согласно условию (3), и через ψ — гомоморфизм группы T , осуществляющий возведение каждого ее элемента в степень n . Тогда образ группы T относительно гомоморфизма ψ лежит в N , а ядро этого гомоморфизма содержится в соответствующей примарной компоненте $\tau_p(A)$ группы A .

Так как подгруппа $\tau_p(A)$ ввиду условия (4) конечна, то группа T представляет собой расширение конечной группы при помощи конечно порожденной. Следовательно, она сама конечно порождена и потому фактор-группа T/N конечна. ■

Мы будем обозначать символами $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ классы абелевых групп, удовлетворяющих условиям (1), (3) и (5), соответственно. Отметим, что здесь обозначение $\mathcal{A}_1$ согласовано со статьей А. И. Мальцева [45], остальные же определялись лишь соображениями удобства и не имеют никакого отношения к упомянутой работе.

Класс разрешимых групп, обладающих хотя бы одним конечным субнормальным рядом с $\mathcal{A}_k$ -факторами, мы обозначим символом $\mathcal{S}_k$. Точно так же символом $\mathcal{N}_k$ будем обозначать класс нильпотентных групп, обладающих хотя бы одним конечным центральным рядом с $\mathcal{A}_k$ -факторами.

Легко видеть, что подгруппы, гомоморфные образы и конечные прямые произведения $\mathcal{A}_1$ -групп снова являются $\mathcal{A}_1$ -группами. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо для классов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, а также для всех классов $\mathcal{S}_k$ и $\mathcal{N}_k$, $k = 1, 2, 3$. Нам потребуется

Предложение 1.1.2. *Абелева группа принадлежит классу $\mathcal{A}_2$ тогда и только тогда, когда все ее подгруппы $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимость всех подгрупп абелевой группы равносильна $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемости всех ее фактор-групп. Из этого замечания ввиду эквивалентности условий (2) и (3) сразу же вытекает, что каждая абелева группа с $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми подгруппами должна

принадлежать классу $\mathcal{A}_2$.

Обратно, пусть A — некоторая $\mathcal{A}_2$ -группа, B — произвольная фактор-группа группы A и b — отличный от 1 элемент группы B . Поскольку $A \in \mathcal{A}_2$, фактор-группа группы B по максимальной подгруппе, не содержащей элемента b , не может быть квазициклической группой и, следовательно, конечна. Таким образом, ввиду произвольности выбора элемента b группа B $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема. ■

В § 1.4 мы усилим этот результат (см. предложение 1.4.2), а сейчас перейдем к доказательству сформулированных выше утверждений.

Предложение 1.1.3. *Классы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ замкнуты относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

Доказательство. Первые два утверждения, касающиеся подгрупп и гомоморфных образов, очевидны. Для проверки третьего необходимо воспользоваться тем, что прямое произведение конечного числа групп с $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми подгруппами снова является группой с $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми подгруппами [46]. Отсюда и из предложения 1.1.2 следует, что прямое произведение A произвольных групп $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_2$ принадлежит классу $\mathcal{A}_2$. Если же сомножители являются $\mathcal{A}_3$ -группами, то все примарные компоненты группы A , очевидно, конечны и в силу части 3) предложения 1.1.1 $A \in \mathcal{A}_3$. ■

Из предложения 1.1.3 сразу же следует

Предложение 1.1.4. *Классы $\mathcal{S}_k$ и $\mathcal{N}_k$ замкнуты относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

Доказательство. В самом деле, пусть $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ — субнормальный ряд некоторой группы G .

Если H — подгруппа группы G , то последовательность пересечений

$$1 = G_0 \cap H \leq G_1 \cap H \leq \dots \leq G_n \cap H = H$$

представляет собой субнормальный ряд группы H и

$$G_{i+1} \cap H / G_i \cap H = G_{i+1} \cap H / (G_{i+1} \cap H) \cap G_i \cong (G_{i+1} \cap H) G_i / G_i \leq G_{i+1} / G_i,$$

т. е. все факторы этого ряда вкладываются в соответствующие факторы ряда группы G .

Если подгруппа H является нормальной в группе G , то образы $G_i H / H$ членов ряда группы G относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon: G \rightarrow G/H$ образуют субнормальный ряд фактор-группы G/H , причем факторы этого ряда ввиду соотношений

$$G_{i+1} H / G_i H \cong G_{i+1} / G_i (G_{i+1} \cap H) \cong (G_{i+1} / G_i) / (G_i (G_{i+1} \cap H) / G_i)$$

являются гомоморфными образами факторов ряда группы G .

Наконец, если F — еще одна группа с субнормальным рядом

$$1 = F_0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_m = F,$$

где без потери общности можно считать, что $m=n$, то субнормальный ряд прямого произведения $G \times F$ можно составить из подгрупп $G_i \times F_i$ и при этом

$$(G_{i+1} \times F_{i+1}) / (G_i \times F_i) \cong (G_{i+1} / G_i) \times (F_{i+1} / F_i).$$

Таким образом, подгруппы, гомоморфные образы и прямые произведения $\mathcal{S}_k$ -групп обладают субнормальными рядами, факторы которых являются, соответственно, подгруппами, гомоморфными образами и прямыми произведениями $\mathcal{A}_k$ -групп и потому сами оказываются $\mathcal{A}_k$ -группами.

Легко видеть, что во всех вышеприведенных рассуждениях можно заменить слова «субнормальный ряд» на «центральный ряд». Поэтому для классов $\mathcal{N}_k$ утверждение также имеет место. ■

Далее мы хотим показать, что произвольная нильпотентная $\mathcal{S}_k$ -группа является $\mathcal{N}_k$ -группой, т. е. класс $\mathcal{N}_k$ представляет собой пересечение класса $\mathcal{S}_k$ с классом всех нильпотентных групп. Для этого нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Предложение 1.1.5. Пусть π — конечное множество простых чисел и G — периодическая группа, порядки всех элементов которой являются π -числами. Если группа G принадлежит классу $\mathcal{S}_2$ (классу $\mathcal{S}_3$), то она имеет конечный период (соответственно, конечна).

Доказательство. Пусть $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ — субнормальный ряд группы G с $\mathcal{A}_k$ -факторами, $k=2, 3$. Поскольку все факторы G_{i+1}/G_i этого ряда являются π -группами и множество π конечно, группы G_{i+1}/G_i имеют лишь конечное число примарных компонент. Следовательно, они имеют конечный период (конечны), а вместе с ними имеет конечный период (соответственно, конечна) и группа G . ■

Предложение 1.1.6. Произвольная абелева $\mathcal{S}_k$ -группа является $\mathcal{A}_k$ -группой.

Доказательство. Пусть G — абелева $\mathcal{S}_k$ -группа и $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ — ее субнормальный ряд с $\mathcal{A}_k$ -факторами. Легко видеть, что ранг группы G равен сумме рангов фактор-групп G_{i+1}/G_i и потому конечен. Тем самым $G \in \mathcal{A}_1$.

Пусть далее $k=2$ или 3 и H — произвольная фактор-группа группы G . Тогда согласно предложению 1.1.4 каждая ее примарная компонента является $\mathcal{S}_k$ -группой и в силу предложения 1.1.5 имеет конечный период, если $k=2$, или конечна, если $k=3$. Таким образом, группа G принадлежит классу $\mathcal{A}_k$. ■

Из предложений 1.1.4 и 1.1.6 теперь следует, что факторы произвольного субнормального ряда $\mathcal{S}_k$ -группы являются $\mathcal{A}_k$ -группами. Поэтому, в частности, каждая нильпотентная $\mathcal{S}_k$ -группа принадлежит классу $\mathcal{N}_k$.

Оказывается, что конечно порожденные $\mathcal{S}_3$ -группы имеют простое описание.

Предложение 1.1.7. Конечно порожденная $\mathcal{S}_3$ -группа является полициклической.

Доказательство. Пусть G — некоторая конечно порожденная $\mathcal{S}$ -группа.

Воспользуемся индукцией по ступени разрешимости группы G .

Если группа G абелева, утверждение очевидно, поэтому далее мы будем считать, что эта группа является расширением некоторой абелевой группы A при помощи группы C , которую в силу индуктивных соображений можно считать полициклической.

Лемма 1. *Произвольная полициклическая группа C содержит нормальную подгруппу конечного индекса, которая является поли- $\mathbb{Z}$ группой, т. е. обладает субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами.*

Доказательство будем вести индукцией по ступени разрешимости n группы C . Если $n=0$, т. е. $C=1$, утверждение очевидно. Следовательно, можно считать, что группа C имеет степень разрешимости $n \geq 1$ и для всех разрешимых групп меньшей ступени лемма справедлива.

Пусть $D=C^{(n-1)}$ — последний отличный от единицы коммутант группы C . Ввиду хорошо известной финитной аппроксимируемости [19] группа C обладает нормальной подгруппой N конечного индекса, тривиально пересекающейся с периодической частью $\tau(D)$ группы D . Пересечение $N \cap D$ мы обозначим через E .

Фактор-группа N/E имеет степень разрешимости не выше $n-1$ и в силу индуктивного предположения содержит нормальную подгруппу M/E конечного индекса, являющуюся поли- $\mathbb{Z}$ группой. Положим

$$L = \bigcap_{c \in C} c^{-1} M c.$$

Поскольку подгруппа M имеет конечный индекс в группе C , тем же свойством обладает и подгруппа L . К тому же она нормальна во всей группе C и содержит подгруппу E . Покажем, что L является поли- $\mathbb{Z}$ группой.

В самом деле, пусть

$$1 = M_0/E \leq M_1/E \leq \dots \leq M_k/E = M/E$$

— некоторый субнормальный ряд фактор-группы M/E с бесконечными циклическими факторами. Пересекая члены этого ряда с подгруппой L/E , мы получаем субнормальный ряд в группе L/E , факторы которого вкладываются в группы $(M_{i+1}/E)/(M_i/E)$ и, следовательно, либо тривиальны, либо снова оказываются бесконечными циклическими группами.

В силу выбора подгруппы N группа E не имеет кручения, т. е. является свободной абелевой группой конечного ранга. Стало быть, подгруппа L представляет собой расширение поли- $\mathbb{Z}$ группы при помощи поли- $\mathbb{Z}$ группы и потому сама — поли- $\mathbb{Z}$ группа. ■

Из леммы 1 вытекает, что группа G содержит субнормальный ряд

$$1 \leq A = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n \leq G,$$

все факторы G_{i+1}/G_i которого являются бесконечными циклическими, а фактор G/G_n — конечной полициклической группой. Поскольку группа G конечно порождена, этим свойством обладает и подгруппа G_n . Если мы покажем, что эта

подгруппа полициклическая, то отсюда будет следовать, что и вся группа G является полициклической. Поэтому далее без потери общности можно предполагать, что $G_n = G$.

Пусть $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ — некоторая система порождающих группы G , и пусть g_i обозначает порождающий подгруппы G_i по модулю G_{i-1} . Мы можем считать, очевидно, что множество F содержит все элементы g_i , а также все коммутаторы вида $[g_j, g_i]$ и $[g_j, g_i^{-1}]$, где $j < i$.

Заметим, что каждый элемент $g \in G_i$ однозначным образом записывается в виде

$$g = g_i^{m_i} g_{i-1}^{m_{i-1}} \dots g_1^{m_1} a_g$$

для подходящего элемента $a_g \in A$. Представим таким способом все элементы из множества F . В результате мы получим новую систему порождающих группы G , состоящую из элементов $g_1, g_2, \dots, g_n, a_{f_1}, a_{f_2}, \dots, a_{f_k}$. Положим

$$S_0 = \{g^{-1} a_f g \mid g \in \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle, f \in F\}, S_i = S_0 \cup \{g_1, g_2, \dots, g_i\}.$$

Лемма 2. Для любого $i = 0, 1, \dots, n$ подгруппа G_i порождается множеством элементов S_i .

Доказательство. Для $i = n$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что для некоторого i $G_i = \langle S_i \rangle$, и покажем, что тогда $G_{i-1} = \langle S_{i-1} \rangle$.

Очевидно, что множество $\{g_i^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ представляет собой полную систему представителей смежных классов группы G_i по подгруппе G_{i-1} . Поэтому последняя порождается всевозможными элементами вида

$$s_{m,h} = g_i^m h (\overline{g_i^m h})^{-1},$$

где элемент h пробегает множество S_i , $m \in \mathbb{Z}$ и символ $\overline{g_i^m h}$ обозначает представителя смежного класса группы G_i по подгруппе G_{i-1} , которому принадлежит элемент $g_i^m h$ (см., напр., [43, теорема 2.7]).

Если $h = g_i$, то $g_i^m h = g_i^{m+1}$ и $s_{m,h} = 1$. Если же $h \neq g_i$, то $h \in S_{i-1} \subseteq G_{i-1}$ и $\overline{g_i^m h} = g_i^m$. Таким образом, в действительности подгруппа G_{i-1} порождается элементами

$$s_{m,h} = g_i^m h g_i^{-m}, \text{ где } h \in S_{i-1}, m \in \mathbb{Z}.$$

Если, далее, элемент h выбирается из множества S_0 , то элемент $s_{m,h}$ также принадлежит этому множеству. Стало быть, нам остается показать, что для каждого j , меньшего i , и для каждого неотрицательного числа m

$$g_i^{-m} g_j g_i^m, g_i^m g_j g_i^{-m} \in \langle S_{i-1} \rangle.$$

Отсюда сразу же будет следовать искомое равенство $G_{i-1} = \langle S_{i-1} \rangle$.

Если $m = 0$, включения очевидны. Предположим теперь, что сформулированное утверждение справедливо для некоторого m и покажем, что в этом случае оно верно и для $m + 1$.

Поскольку коммутатор $[g_j, g_i]$ лежит в подгруппе G_{i-1} , его можно представить в виде

$$[g_j, g_i] = g_{i-1}^{m_{i-1}} g_{i-2}^{m_{i-2}} \dots g_1^{m_1} a$$

для некоторого однозначным образом определенного элемента $a \in A$. Напомним, что этот коммутатор принадлежит также и системе порождающих F группы G . Поэтому $a \in S_0$, и в силу индуктивного предположения

$$\begin{aligned} g_i^{-(m+1)} g_j g_i^{m+1} &= g_i^{-m} g_j g_i^m g_i^{-m} [g_j, g_i] g_i^m = \\ &= g_i^{-m} g_j g_i^m (g_i^{-m} g_{i-1} g_i^m)^{m_{i-1}} \dots (g_i^{-m} g_1 g_i^m)^{m_1} g_i^{-m} a g_i^m \in \langle S_{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяется включение

$$g_i^{m+1} g_j g_i^{-(m+1)} = g_i^m g_j [g_j, g_i^{-1}] g_i^{-m} \in \langle S_{i-1} \rangle. \blacksquare$$

Из леммы 2 вытекает, в частности, что множество S_0 является порождающим для абелевой подгруппы A . Мы хотим показать теперь, что в действительности эта подгруппа конечно порождена.

Так как в силу предложений 1.1.4 и 1.1.6 подгруппа A принадлежит классу $\mathcal{A}_3$, она имеет конечный ранг r . Если $r \geq 1$, выберем некоторую максимальную линейно независимую систему элементов $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} \subseteq A$ и положим $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_r \rangle$. Если же $r = 0$, полагаем $B = 1$. В обоих случаях все элементы группы A имеют конечный порядок по модулю подгруппы B .

Рассмотрим множество

$$Q = \{g_i^{\mp 1} b_j g_i^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{a_f \mid f \in F\}$$

и обозначим через q произведение порядков всех его элементов по модулю подгруппы B .

Лемма 3. *Порядок произвольного элемента множества S_0 по модулю подгруппы B является q -числом.*

Доказательство. По определению множества S_0 каждый его элемент сопряжен с некоторым элементом $a_f, f \in F$, при помощи элемента g из подгруппы $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$. Рассуждение будем вести индукцией по минимальной длине l элемента g в символах $g_i^{\pm 1}$.

Если $l = 0$, утверждение леммы следует просто из определения числа q .

Предположим теперь, что элемент $h \in S_0$ сопряжен с некоторым элементом $h_1 \in S_0$ при помощи элемента g_i^ε , где $\varepsilon = \pm 1$, и что порядок t элемента h_1 по модулю подгруппы B является q -числом. Поскольку сопряжение элементом g_i^ε индуцирует автоморфизм группы A , тот же порядок t имеет и элемент $h = g_i^{-\varepsilon} h_1 g_i^\varepsilon$ по модулю подгруппы $g_i^{-\varepsilon} B g_i^\varepsilon$. Но из определения числа q следует, что $(g_i^{-\varepsilon} B g_i^\varepsilon)^q \leq B$, поэтому порядок элемента h по модулю подгруппы B также оказывается q -числом. $\blacksquare$

Таким образом, порядки всех элементов фактор-группы A/B являются q -числами. Согласно предложениям 1.1.4 и 1.1.6 эта группа принадлежит классу $\mathcal{A}_3$ и, стало быть, в силу предложения 1.1.5 конечна. Из конечности порожденности группы B теперь сразу же вытекает, что и группа A конечно порождена. Тем самым, предложение доказано. $\blacksquare$

Заметим, что для S_2 -групп аналог предложения 1.1.7 уже не будет иметь

места. Соответствующий пример привести совсем несложно.

Пусть группа A представляет собой прямое произведение счетного числа циклических групп порядка 2 с порождающими a_i , $i \in \mathbb{Z}$. Определим автоморфизм ψ группы A по правилу $a_i\psi = a_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, и обозначим через Ψ циклическую подгруппу группы $\text{Aut}(A)$, порожденную элементом ψ . Тогда подгруппа $G = \Psi A$ голоморфа группы A порождается элементами a_0 и ψ , но не является полициклической. И при этом факторы ее A и G/A принадлежат, очевидно, классу $\mathcal{A}_2$.

Далее, $\mathcal{S}_1$ -группа не обязана быть полициклической, даже если она конечно определена. В качестве примера можно рассмотреть группу G , задаваемую представлением $\langle a, c; c^{-1}ac = a^2 \rangle$.

В самом деле, как показано в § Д.1, нормальное замыкание N элемента a в группе G изоморфно группе 2-ичных дробей. Отсюда следует, в частности, что группа G не является полициклической. В то же время фактор-группа G/N циклическая, поэтому G — $\mathcal{S}_1$ -группа.

Начиная с этого момента, мы, следуя А. И. Мальцеву [46], будем называть $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{S}_3$ классами *ограниченных абелевых* и *ограниченных разрешимых* групп, соответственно. Кроме того, назовем $\mathcal{N}_3$ классом *ограниченных нильпотентных* групп. Эти три класса будут использоваться в дальнейшем значительно чаще остальных, поэтому мы введем для них новые более простые обозначения $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{N}$.

Напомним, что во введении мы определяли класс $\mathcal{N}$ ограниченных нильпотентных групп как класс нильпотентных $\mathcal{S}$ -групп. Ввиду отмеченного выше, это определение равносильно приведенному в данном параграфе.

§ 1.2. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость разрешимых подгрупп $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемых групп

Теперь мы готовы перейти непосредственно к изучению свойства отделимости подгрупп. В этом нам поможет ряд понятий и обозначений, описанию которых посвящена первая половина данного параграфа.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, G — произвольная группа. Через $\Psi_{\mathcal{K}}(G)$ будет обозначаться семейство всех гомоморфизмов группы G на группы из класса $\mathcal{K}$. В большинстве случаев, однако, рассуждения удобнее проводить с использованием семейства $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$ ядер этих гомоморфизмов. Поскольку чаще всего $\mathcal{K} = \mathcal{F}_\pi$, для семейств $\Psi_{\mathcal{F}_\pi}(G)$ и $\Omega_{\mathcal{F}_\pi}(G)$ имеет смысл ввести упрощенные обозначения $\Psi_\pi(G)$ и $\Omega_\pi(G)$, соответственно.

Заметим, что $\Omega_\pi(G)$ — это просто совокупность всех нормальных подгрупп конечного π -индекса группы G . Однако запись « $N \in \Omega_\pi(G)$ » значительно легче выражения «нормальная подгруппа N конечного π -индекса группы G » как в написании, так и при прочтении, поэтому мы всюду отдаем ей предпочтение.

Если $1 \in \mathcal{K}$, то для любой группы G семейство $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$ не пусто: ему принадлежит по крайней мере вся группа G . Это верно, в частности, для всех на-

следственных классов групп. Далее в этом параграфе всегда предполагается, что класс $\mathcal{K}$ содержит единичную группу.

Предложение 1.2.1. *Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, то пересечение конечного числа подгрупп из семейства $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$ снова принадлежит этому семейству.*

Доказательство. В самом деле, пусть подгруппы $N_1, N_2, \dots, N_k$ принадлежат семейству $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$. Тогда по теореме Ремака фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k N_i$ вкладывается в прямое произведение $\mathcal{K}$ -групп G/N_i и ввиду условий, наложенных на класс $\mathcal{K}$, сама оказывается $\mathcal{K}$ -группой. Это как раз и означает, что $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$. ■

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп, H — подгруппа некоторой группы G . Легко видеть, что пересечение любых двух $\mathcal{K}$ -отделимых подгрупп группы G снова является $\mathcal{K}$ -отделимой подгруппой. Поэтому существует наименьшая $\mathcal{K}$ -отделимая подгруппа группы G , содержащая подгруппу H . Мы будем называть ее $\mathcal{K}$ -замыканием подгруппы H в группе G и обозначать $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$.

Предложение 1.2.2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) = \bigcap_{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} HN.$$

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, то для всякой подгруппы $M \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$:

$$\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) = \bigcap_{\substack{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G), \\ N \leq M}} HN$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольная подгруппа F группы G является $\mathcal{K}$ -отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$F = \bigcap_{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} FN.$$

Отсюда следует, что если подгруппа F $\mathcal{K}$ -отделима в группе G и $H \leq F$, то

$$H_1 = \bigcap_{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} HN \leq F.$$

Заметим далее, что для любой подгруппы $N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$

$$H_1 N = \left(\bigcap_{M \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} HM \right) N \leq (HN)N \leq HN$$

и потому

$$\bigcap_{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} H_1 N \leq \bigcap_{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)} HN = H_1.$$

Таким образом, подгруппа H_1 сама является $\mathcal{K}$ -отделимой в группе G и,

следовательно, совпадает с $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$.

Пусть теперь M — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$.

Если g — произвольный элемент множества $G \setminus \mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$, то $g \notin HL$ хотя бы для одной подгруппы $L \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$ и, в частности, $g \notin H(L \cap M)$. Так как класс $\mathcal{K}$ предполагается замкнутым относительно взятия подгрупп и прямых произведений, то в силу предложения 1.2.1 подгруппа $N = L \cap M$ принадлежит семейству $\Omega_{\mathcal{K}}(G)$. Поэтому

$$g \notin \bigcap_{\substack{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G), \\ N \leq M}} HN.$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \supseteq \bigcap_{\substack{N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G), \\ N \leq M}} HN,$$

обратное же включение ввиду доказанного выше очевидно. ■

Предложение 1.2.3. *Если группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема и подгруппа H удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, то $\mathcal{K}$ -замыкание подгруппы H в группе G также удовлетворяет этому тождеству.*

Доказательство. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные элементы подгруппы $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$ и $g = w(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда для любого гомоморфизма $\psi \in \Psi_{\mathcal{K}}(G)$ $x_1\psi, x_2\psi, \dots, x_n\psi \in H\psi$ и, следовательно, $g\psi = 1$. Отсюда ввиду $\mathcal{K}$ -аппроксимируемости группы G вытекает, что $g = 1$. ■

Докажем теперь два утверждения об отделимости подгрупп, справедливые для всех классов групп, рассматривающихся в данной работе.

Предложение 1.2.4. *Если группа G — $\mathcal{K}$ -аппроксимируема, то централизатор $C_G(M)$ произвольного множества $M \subseteq G$ является $\mathcal{K}$ -отделимой подгруппой.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий централизатору $C_G(M)$ множества M . Тогда хотя бы для одного элемента $h \in M$ коммутатор $[g, h]$ отличен от единицы.

Пользуясь $\mathcal{K}$ -аппроксимируемостью группы G , выберем гомоморфизм $\psi \in \Psi_{\mathcal{K}}(G)$, переводящий этот коммутатор в нетривиальный элемент. Тогда $[g\psi, h\psi] \neq 1$ и потому элемент $g\psi$ не принадлежит централизатору множества $M\psi$ в группе $G\psi$. Остается лишь заметить, что этот централизатор содержит подгруппу $C_G(M)\psi$, откуда следует, что $g\psi \notin C_G(M)\psi$. ■

Предложение 1.2.5. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, G — $\mathcal{K}$ -аппроксимируемая группа, H — подгруппа группы G . Если существует подгруппа $M \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$, тривиально пересекающаяся с H , то подгруппа H $\mathcal{K}$ -отделима в группе G .*

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент подгруппы $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$. Тогда по модулю каждой подгруппы $N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$ он сравним с некоторым элемен-

том $h_N \in H$. Выбирая подгруппу N лежащей в M , мы получаем, что $h \equiv h_M \pmod{M}$ и $h \equiv h_N \pmod{M}$, откуда вытекает сравнение $h_M \equiv h_N \pmod{M}$. Но $M \cap H = 1$, поэтому $h_N = h_M$.

Таким образом, элемент h сравним с элементом $h_M \in H$ по модулю каждой подгруппы $N \in \Omega_K(G)$, лежащей в M . Из K -отделимости единичной подгруппы, равносильной K -аппроксимируемости группы G , и второй части предложения 1.2.2 теперь следует, что $h = h_M \in H$. ■

Далее укажем некоторые ограничения, которые достаточно наложить на класс K и подгруппу H для того, чтобы оказалось выполненным условие предыдущего предложения.

Предложение 1.2.6. Пусть K — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, G — K -аппроксимируемая группа, H — $\mathcal{S}_1$ -подгруппа группы G . Тогда существует подгруппа $N \in \Omega_K(G)$, тривиально пересекающаяся с H . В частности, H является K -группой.

Доказательство. Предположим сначала, что H — $\mathcal{A}_1$ -группа и воспользуемся индукцией по ее рангу $r(H)$.

Если $r(H) = 0$, то подгруппа H ввиду отсутствия кручения в группе G тривиальна и искомое утверждение очевидно.

Пусть $r(H) > 0$ и h — некоторый элемент подгруппы H , отличный от 1. Пусть также $M \in \Omega_K(G)$ — подгруппа, не содержащая h , и $H_1 = H \cap M$.

Фактор-группа H/H_1 содержит элемент бесконечного порядка hH_1 . Следовательно, $r(H_1) < r(H)$ и в силу индуктивного предположения найдется подгруппа $L \in \Omega_K(G)$ такая, что $H_1 \cap L = 1$. Положим $N = M \cap L$. Тогда по предложению 1.2.1 $N \in \Omega_K(G)$ и $H \cap N = H_1 \cap L = 1$, что и требовалось.

Пусть теперь подгруппа H является $\mathcal{S}_1$ -группой, и пусть $1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$ — ее субнормальный ряд с $\mathcal{A}_1$ -факторами. Из доказанного следует, что существует подгруппа $M \in \Omega_K(G)$, тривиально пересекающаяся с H_1 .

Поскольку

$$M \cap H_{i+1} / M \cap H_i \cong (M \cap H_{i+1}) H_i / H_i \leq H_{i+1} / H_i,$$

подгруппа $M \cap H$ также обладает субнормальным рядом с абелевыми факторами конечного ранга, но уже длины $n - 1$. В силу очевидных индуктивных соображений можно считать, что существует подгруппа $L \in \Omega_K(G)$, удовлетворяющая условию $L \cap (M \cap H) = 1$. Полагая, как и выше, $N = M \cap L$, мы получаем, что $N \in \Omega_K(G)$ и $H \cap N = 1$. ■

Пользуясь двумя последними предложениями, мы можем получить частичное обобщение утверждения А. И. Мальцева об $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимости всех подгрупп ограниченной разрешимой группы — основной результат данного параграфа.

Теорема 1.2.7. В $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемой группе все $\mathcal{S}$ -подгруппы $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы.

Доказательство. Пусть G — $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемая группа, H — $\mathcal{S}$ -подгруппа группы G и $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий H .

Из предложения 1.1.4 следует, что класс $\mathcal{S}_0$ замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, поэтому мы можем воспользоваться предложениями 1.2.6 и 1.2.5 и указать такой гомоморфизм $\psi \in \Psi_{\mathcal{S}_0}(G)$, что $g\psi \notin H\psi$. Так как группа $G\psi$ принадлежит классу $\mathcal{S}_0$, все ее подгруппы $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы. Это означает, что гомоморфизм ψ может быть продолжен до гомоморфизма на конечную группу, при котором образ элемента g по-прежнему не принадлежит образу подгруппы H . ■

§ 1.3. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость и π' -изолированность

Во введении мы уже напоминали, что подгруппа H называется π' -изолированной в группе G , если она содержит все корни π' -степеней, извлекающиеся в этой группе из ее элементов. Более формально, подгруппа H π' -изолирована в группе G , если для всякого элемента $g \in G$ и для всякого простого числа $q \notin \pi$ из условия $g^q \in H$ следует, что $g \in H$.

Согласно этому определению в случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел Π , произвольная подгруппа группы G является π' -изолированной. Таким образом, утверждение об $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости всех π' -изолированных подгрупп группы G превращается при $\pi = \Pi$ в обычное свойство финитной отделимости всех подгрупп.

Обсудим более подробно вопрос о соотношении понятий $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости и π' -изолированности. Как показывает следующее утверждение, в одну сторону включение всегда имеет место.

Предложение 1.3.1. *Каждая $\mathcal{F}_\pi$ -отделимая подгруппа является π' -изолированной. В частности, произвольная $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемая группа не имеет π' -кручения.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что подгруппа H группы G не является π' -изолированной и $g \in G$ — такой элемент, что $g \notin H$, но $g^q \in H$ для некоторого числа $q \in \pi'$. Пусть также ψ — произвольный гомоморфизм из семейства $\Psi_\pi(G)$ и порядок элемента $g\psi$ конечной π -группы $G\psi$ равен n .

Поскольку n является π -числом, найдется такое натуральное m , что $qm \equiv 1 \pmod{n}$ и, следовательно, $g\psi = (g\psi)^{qm}$. Таким образом, $g\psi \in H\psi$ и, так как гомоморфизм ψ был выбран произвольным, подгруппа H не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G . ■

Утверждение, обратное предложению 1.3.1, вообще говоря, неверно. В этом легко убедиться, если воспользоваться тем фактом, что нормальная подгруппа N группы G является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда фактор-группа G/N $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема.

Пример 1.3.2. Пусть G — некоторая группа, не имеющая кручения и не

являющаяся $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой. Представим ее в виде фактор-группы F/N подходящей свободной группы F . Тогда подгруппа N изолирована в группе F (и потому π' -изолирована для любого множества π), но не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в этой группе ни для какого π .

Конкретным примером группы G может служить группа Хигмена

$$G = \langle a, b, c; b^{-1}ab = a^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle.$$

Требуемые ее свойства установлены в [27], и, кроме того, следуют из результатов, полученных в дополнении. ■

Поскольку свободные группы аппроксимируются классом $\mathcal{F}_p$ для любого простого числа p [44], приведенный пример показывает также, что $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость некоторой группы, вообще говоря, не влечет за собой $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость всех ее π' -изолированных подгрупп.

В отличие от случая обычной финитной отделимости обратное утверждение также не всегда справедливо. Группа, все π' -изолированные подгруппы которой являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми, может иметь π' -кручение и потому не быть $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой. Подтверждением этому служит, например,

Предложение 1.3.3. *В любой конечной группе каждая π' -изолированная подгруппа $\mathcal{F}_\pi$ -отделима.*

Доказательство. Легко видеть, что подгруппа H конечной группы G является π' -изолированной тогда и только тогда, когда она содержит множество M всех элементов группы G , порядки которых являются π' -числами. Так как это множество переходит в себя при каждом автоморфизме группы G , оно содержится и в подгруппе

$$N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg.$$

Поэтому фактор-группа G/N является π -группой.

Если теперь $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе H , то поскольку $N \leq H$, элемент gN не принадлежит подгруппе H/N группы G/N . Таким образом, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в группе G . ■

Идея, использованная в примере 1.3.2, очень проста, однако любая подгруппа свободной группы, полученная таким образом и обладающая необходимыми свойствами, не будет конечно порожденной. Сейчас мы покажем, что существует группа, которая для каждого простого числа p аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ и при этом содержит конечно порожденную p' -изолированную подгруппу, не являющуюся $\mathcal{F}_p$ -отделимой. Для этого нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Хорошо известно, что свободные группы и нильпотентные группы без кручения обладают свойством однозначности извлечения корней. Некоторым обобщением этого факта является

Предложение 1.3.4. *Для любых двух элементов x и y $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируе-*

мой группы G и для любого π' -числа m из соотношения $x^m = y^m$ следует, что $x = y$.

Доказательство. В силу предложения 1.2.4 централизатор $C_G(x)$ элемента x в группе G является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой и, следовательно, π' -изолированной подгруппой. Поэтому $y \in C_G(x)$ и из равенства $x^m = y^m$ следует, что $(xy^{-1})^m = 1$. Но группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема и, стало быть, не имеет π' -крючения. Таким образом, $xy^{-1} = 1$. ■

Пример 1.3.5. Пусть F — свободная группа с множеством свободных порождающих $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, и пусть $G = F \times F$, $F_1 = \{(f, 1) \mid f \in F\}$, $F_2 = \{(1, f) \mid f \in F\}$. Рассмотрим подгруппу H группы G , порожденную элементами $x_i = (a_i, a_i)$, $1 \leq i \leq n$, и $(w, 1)$, где элемент w пробегает некоторое конечное множество слов W в порождающих a_i . Обозначим также через N нормальное замыкание множества W в группе F и положим $N_1 = \{(g, 1) \mid g \in N\}$, $N_2 = \{(1, g) \mid g \in N\}$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения $H \cap F_1 = N_1$ и $H \cap F_2 = N_2$.*

Доказательство. Если $g \in H \cap F_1$, то для любого $f \in F$

$$(f, 1)^{-1}g(f, 1) = (f, f)^{-1}g(f, f) \in H \cap F_1.$$

Поэтому подгруппа $H \cap F_1$ нормальна в группе F_1 и, следовательно, $N_1 \leq H \cap F_1$.

Поскольку подгруппа N_1 нормальна в группе F_1 , она является нормальной и во всей группе G . Стало быть, мы можем рассмотреть фактор-группу G/N_1 , изоморфную, очевидно, прямому произведению групп F/N и F .

Образ $H\epsilon$ подгруппы H относительно естественного гомоморфизма $\epsilon: G \rightarrow (F/N) \times F$ порождается элементами $x_i = (a_iN, a_i)$. Отсюда ввиду свободы группы F вытекает равенство $H\epsilon \cap F/N = 1$. Но это означает, что $H \cap F_1 \leq N_1$ и с учетом обратного включения, полученного ранее, $H \cap F_1 = N_1$.

Легко видеть, что для каждого элемента $w \in W$ $(1, w) \in H$ и что подгруппа H порождается элементами (a_i, a_i) и $(1, w)$, $w \in W$. Рассуждая, как и выше, получаем второе соотношение $H \cap F_2 = N_2$. ■

Лемма 2. *Если фактор-группа F/N не является $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой и обладает свойством однозначности извлечения π' -корней, то подгруппа H π' -изолирована, но не $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в группе G .*

Доказательство. В самом деле, образ $H\delta$ подгруппы H относительно естественного гомоморфизма δ группы G на группу $G_1 = (F/N) \times (F/N)$, изоморфную фактор-группе $G/(N \times N)$, порождается элементами $y_i = (a_iN, a_iN)$. Из однозначности извлечения π' -корней в группе F/N легко следует, что подгруппа $H\delta$ π' -изолирована в группе G_1 . Но в силу леммы 1 $\ker \delta \leq H$, поэтому подгруппа H также оказывается π' -изолированной в группе G .

Так как подгруппа N не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе F , найдется элемент $g \in \mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_F(N) \setminus N$. Обозначая через g_1 соответствующий элемент группы F_1 , мы получаем, что $g_1 \notin N_1 = H \cap F_1$, но при этом

$$g \in \mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_{F_1}(N_1) \leq \mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H).$$

Таким образом, подгруппа H не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G . ■

Поскольку группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема для любого простого числа p [15], нам остается привести пример группы F/N , удовлетворяющей условиям леммы 2. Покажем, что такой пример можно найти среди групп вида

$$\langle a, b; a^{-1}ba = b^k \rangle.$$

Известно, что для любого простого p эта группа $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда p делит число $k-1$ [48]. Поэтому, если p, q и r — попарно различные простые числа и $k=qr+1$, то соответствующая группа аппроксимируется классами $\mathcal{F}_q$ и $\mathcal{F}_r$, но не классом $\mathcal{F}_p$. Из предложения 1.3.4 теперь следует, что извлечение корней произвольной степени в ней однозначно. ■

Хорошо известно (см., напр., [3]), что конечное расширение группы с $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми подгруппами само является группой с $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми подгруппами. В заключение этого параграфа мы приведем обобщение данного утверждения, которое позволит нам слегка усиливать получаемые результаты.

Предложение 1.3.6. Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп конечного π -индекса, F — некоторая группа, все π' -изолированные $\mathcal{K}$ -подгруппы которой $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы. Если группа G представляет собой расширение группы F при помощи конечной π -группы, то все ее π' -изолированные $\mathcal{K}$ -подгруппы также являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми.

Доказательство. Пусть H — π' -изолированная $\mathcal{K}$ -подгруппа группы G , $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе H . Нам достаточно указать подгруппу $N \in \Omega_\pi(G)$ такую, что $g \notin HN$.

Если $g \notin HF$, то подгруппа F — искомая. Поэтому далее будем считать, что $g \in HF$.

Запишем элемент g в виде $g=hf$, где $h \in H, f \in F$. Заметим, что поскольку $g \notin H$, элемент f не может принадлежать пересечению $H \cap F$.

Легко видеть, что подгруппа $H \cap F$ π' -изолирована в группе F . К тому же она является $\mathcal{K}$ -подгруппой и, следовательно, $\mathcal{F}_\pi$ -отделима. Поэтому существует подгруппа $M \in \Omega_\pi(F)$ такая, что $f \notin (H \cap F)M$. Положим

$$N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Mx.$$

Для каждого элемента $x \in G$ подгруппа $x^{-1}Mx$ принадлежит семейству $\Omega_\pi(F)$ и, в частности, нормальна в группе F . Поэтому подгруппа N по-прежнему имеет конечный π -индекс в этой группе и, стало быть, принадлежит семейству $\Omega_\pi(G)$.

Если мы предположим теперь, что элемент g содержится в подгруппе HN , то, записав его в виде $g=h_1u$ для подходящих элементов $h_1 \in H$ и $u \in N$, получим, что $h^{-1}h_1=fu^{-1}$. Левая часть этого равенства представляет собой элемент подгруппы H , правая — элемент подгруппы F , следовательно, $h^{-1}h_1 \in H \cap F$. Но в этом случае $f=(h^{-1}h_1)u \in (H \cap F)N$ и, так как N лежит в M , то $f \in (H \cap F)M$, что противоречит выбору подгруппы M .

Таким образом, подгруппа N — искомая. ■

Применяя доказанное предложение к результату А. И. Мальцева [46] об $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимости всех подгрупп ограниченной разрешимой группы и к теореме 1.2.7 из § 1.2, мы получаем

Следствие 1.3.7. *В конечном расширении $\mathcal{S}$ -группы все подгруппы $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы. В конечном расширении $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемой группы все $\mathcal{S}$ -подгруппы $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы. ■*

Это утверждение будет неоднократно использоваться нами в части 2 для построения конкретных примеров обобщенных свободных произведений, являющихся π_c -группами. Заметим, что распространить его на случай отделимости в произвольном классе $\mathcal{F}_\pi$ и, в частности, утверждать, что в $\mathcal{S}$ -группе для каждого множества π все π' -изолированные подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы, нельзя.

Пример 1.3.8. Рассмотрим расщепляющееся расширение G бесконечной циклической группы $A = \langle a \rangle$ при помощи бесконечной же циклической группы $B = \langle b \rangle$ с сопровождающим гомоморфизмом, переводящим элемент b в единственный нетождественный автоморфизм группы A .

Если p — простое число и N — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(G)$, то для некоторого p -числа n $b^n \equiv 1 \pmod{N}$ и, стало быть, $b^{-n}ab^n \equiv a \pmod{N}$. С другой стороны, если $p \neq 2$, то $b^{-n}ab^n = a^{-1}$ и потому $a^2 \equiv 1 \pmod{N}$. Так как порядок элемента a по модулю подгруппы N является p -числом, т. е. нечетен, отсюда следует, что $a \in N$.

Таким образом, группа G не имеет кручения, но не аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ ни для какого нечетного p . ■

Разумеется, приведенный пример не исключает возможности описания $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых подгрупп в $\mathcal{S}$ -группах. Мы, однако, несколько сузим задачу, ограничившись далее рассмотрением $\mathcal{N}$ -групп и $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп.

§ 1.4. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгрупп в нильпотентных группах

В данном параграфе мы, следуя схеме рассуждений из статьи А. И. Мальцева [46], будем искать условия, которые достаточно наложить на нильпотентную группу для того, чтобы в ней все π' -изолированные подгруппы оказались $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми.

Прежде всего заметим, что если мы будем рассматривать этот вопрос применительно к некоторому фиксированному множеству простых чисел π , то в число групп, обладающих указанным свойством, войдут, например, квазициклические p -группы для всех $p \notin \pi$. Каждая такая группа содержит лишь одну π' -изолированную подгруппу — саму себя, являющуюся, очевидно, $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой. Таким образом, полученный в результате класс групп будет даже шире, чем класс нильпотентных групп, все подгруппы которых $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы.

С другой стороны, исследование данного вопроса именно в отношении нильпотентных групп объясняется наличием результата, согласно которому в

конечно порожденных нильпотентных группах π' -изолированность равносильна $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости для каждого множества π [38], [40].

Эти соображения подсказывают, что рассматриваемую задачу имеет смысл уточнить следующим образом. Мы будем искать условия, при которых нильпотентная группа G обладает свойством

(1.4.1) $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости π' -изолированных подгрупп при любом выборе множества π .

Предложение 1.4.2. *Абелева группа удовлетворяет условию (1.4.1) тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathcal{A}_2$.*

Доказательство. Необходимость этого условия установлена в предложении 1.1.2. Проверим достаточность.

Пусть $G \in \mathcal{A}_2$, π — некоторое множество простых чисел и H — π' -изолированная подгруппа группы G . Покажем, что фактор-группа $A = G/H$ $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема и, следовательно, подгруппа H $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в G .

Пусть a — произвольный неединичный элемент группы A . Предположим сначала, что он принадлежит некоторой примарной компоненте $T = \tau_p(A)$ группы A .

Так как подгруппа H π' -изолирована в группе G , то $p \in \pi$. Обозначая через n период группы T , конечный ввиду включения $G \in \mathcal{A}_2$, мы видим, что $A^n \cap T = 1$ и потому элемент $b = aA^n$ фактор-группы $B = A/A^n$ отличен от 1. Остается лишь заметить, что в соответствии с теоремой Прюфера периодическая p -группа B раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и, следовательно, является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой.

Случай, когда элемент a имеет произвольный конечный порядок, очевидным образом сводится к рассмотренному выше. Предположим теперь, что порядок этого элемента бесконечен.

Так как фактор-группа $A/\langle a \rangle$ принадлежит ввиду предложения 1.1.3 классу $\mathcal{A}_2$, порядки элементов каждой ее примарной компоненты ограничены в совокупности. Это означает, что для любого простого числа p можно указать такое n , что $a \notin A^{p^n}$. Доказательство теперь завершается так же, как и в предыдущем случае, необходимо лишь выбрать число p принадлежащим множеству π . ■

Мы видим, таким образом, что абелева группа, удовлетворяющая условию (1.4.1), не обязана быть ограниченной. Однако, нильпотентная группа, составленная из таких блоков, т. е. обладающая центральным рядом, для всех факторов которого справедливо условие (1.4.1), может содержать подгруппы, не отделимые даже в классе $\mathcal{F}_\Pi$.

Пример 1.4.3. Зафиксируем некоторое простое число p и рассмотрим следующую хорошо известную двуступенно нильпотентную группу

$$F = \langle a, b, c; a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle.$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ через F_i мы обозначим изоморфную копию группы F с порождающими a_i, b_i, c_i .

Пусть G есть обобщенное прямое произведение групп F_i с объединяемыми подгруппами $\langle c_i \rangle \leq Z(F_i)$. Тогда группа G имеет представление

$$\langle a_i, b_i, c; a_i^p = b_i^p = c^p = 1, \\ [a_i, b_i] = c, [a_i, b_j] = [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = 1, [a_i, c] = [b_i, c] = 1, i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \rangle$$

и обладает центральным рядом $1 \leq \langle c \rangle \leq G$, факторы которого в силу предложения 1.4.2 удовлетворяют условию (1.4.1).

Пусть теперь L — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G . Тогда для некоторых чисел $i, j, x \in \mathbb{N}$ непременно имеет место включение $a_i a_j^x \in L$, откуда $b_i^{-1} a_i a_j^x b_i = a_i a_j^x c \in L$ и $c \in L$. Таким образом, нетривиальный элемент c принадлежит каждой подгруппе из семейства $\Omega_\Pi(G)$ и поэтому единичная подгруппа группы G не является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой. ■

Заметим, что построенная выше группа G представляет собой пример расширения конечной p -группы при помощи $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группы, которое уже не является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемым, и что число p здесь было выбрано произвольным образом. Факт существования для каждого простого p групп с такими свойствами потребуются нам в § 2.3 части 2.

Покажем теперь, что для ограниченных нильпотентных групп условие (1.4.1) справедливо. Первым шагом в этом направлении служит критерий $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости $\mathcal{N}$ -групп, полученный Д. Н. Азаровым (не опубликовано) и обобщающий теорему К. Грюнберга [15] об условиях $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости конечно порожденных нильпотентных групп.

Предложение 1.4.4. *Ограниченная нильпотентная группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда периодическая часть $\tau(G)$ группы G является π -группой.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Проверку достаточности мы будем вести индукцией по ступени нильпотентности группы G .

Если G является абелевой группой, то ввиду π' -изолированности ее единичной подгруппы требуемый результат вытекает из предложения 1.4.2. Поэтому далее будем предполагать, что группа G имеет степень нильпотентности $c > 1$ и для всех $\mathcal{N}$ -групп меньшей степени утверждение справедливо.

Пусть $g \in G$ — произвольный нетривиальный элемент. Мы хотим показать, что существует гомоморфизм $\psi \in \Psi_\pi(G)$, переводящий g в элемент, отличный от 1.

В силу индуктивных соображений можно считать, что g лежит в центре $Z(G)$ группы G . Подгруппа $H = Z(G)$ согласно предложениям 1.1.4 и 1.1.6 является $\mathcal{A}$ -группой и по доказанному обладает подгруппой $N \in \Omega_\pi(H)$, не содержащей элемента g . Полагая $G_1 = G/N$ и $g_1 = gN$, мы видим, что элемент g_1 отличен от единицы и имеет в группе G_1 конечный порядок, являющийся π -числом.

Поскольку G_1 снова оказывается $\mathcal{N}$ -группой, она $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема и, следовательно, содержит подгруппу $M \in \Omega_\Pi(G_1)$, которой не принадлежит элемент g_1 . Обозначим через G_2 и g_2 фактор-группу G_1/M и элемент g_1M , соответственно.

Так как G_2 является уже конечной нильпотентной группой, то фактор-группа $G_2/\tau_\pi(G_2)$ представляет собой конечную π -группу. При этом элемент $g_2\tau_\pi(G_2)$ по-прежнему отличен от 1, поскольку порядок его прообраза в группе G_2 является π -числом.

Таким образом, гомоморфизм группы G на группу $G_2/\tau_\pi(G_2)$ — иско- мый. ■

Прежде, чем перейти к доказательству критерия $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости под- групп в $\mathcal{N}$ -группах, мы введем еще одно понятие, оказывающееся весьма по- лезным при изучении отделимости нильпотентных подгрупп.

Пусть G — некоторая группа и H — ее подгруппа. Легко видеть, что пе- ресечение любых двух π' -изолированных подгрупп группы G , содержащих H , снова является π' -изолированной подгруппой. Наименьшая π' -изолированная подгруппа с таким свойством называется π' -*изолятором* подгруппы H в группе G и обозначается $\pi'\mathcal{I}_G(H)$.

Легко видеть, что для любой подгруппы H имеют место включения

$${}_G\sqrt[\pi]{H} \subseteq \pi'\mathcal{I}_G(H) \leq \mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H),$$

где через ${}_G\sqrt[\pi]{H}$ обозначено множество всех π' -корней, извлекающихся из элементов подгруппы H в группе G . Выше мы уже отмечали, что π' -изолиро- ванная подгруппа не обязана быть $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой, поэтому второе включение может оказаться строгим. Первое включение в общем случае также является строгим.

Рассмотрим, например, свободную группу G ранга 2 с множеством свободных порождающих $\{a, b\}$ и в ней подгруппу H , порожденную элемен- тами a^2 и b^2 . Пусть также $\pi = \{3\}$. Тогда π' -изолятор подгруппы H в группе G содержит элементы a, b и, следовательно, совпадает со всей группой G . С другой стороны, любая степень элемента ab не принадлежит, очевидно, под- группе H , так что множество π' -корней из H строго содержится в π' -изолято- ре этой подгруппы.

В нильпотентных группах, однако, дело обстоит гораздо лучше:

Предложение 1.4.5 [49, теорема 4.5]. *Для любой подгруппы H нильпо- тентной группы G и для любого множества простых чисел π множество ${}_G\sqrt[\pi]{H}$ является подгруппой, т. е. представляет собой π' -изолятор подгруппы H в группе G .* ■

В следующем параграфе мы получим еще несколько утверждений, опи- сывающих π' -изоляторы нильпотентных подгрупп при определенных ограни- чениях, накладываемых на всю группу. Сейчас же обратимся к доказательству $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости π' -изолированных подгрупп в $\mathcal{N}$ -группах.

Теорема 1.4.6. *В ограниченной нильпотентной группе все π' -изолированные подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми при любом выборе множества π .*

Доказательство. Пусть G — ограниченная нильпотентная группа и H — ее произвольная π' -изолированная подгруппа. Обозначим через $N_G(H)$ нормализатор подгруппы H в группе G и по индукции через H_{i+1} — подгруппу $N_G(H_i)$. Известно, что для некоторого n имеет место равенство $H_n = G$, и что вместе с подгруппой H все члены последовательности $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots$ π' -изолированы в группе G (см., напр., [49, теорема 4.11]).

Мы применим индукцию по длине цепочки последовательных нормализаторов подгруппы H .

Если H нормальна в группе G , утверждение сразу же вытекает из предложения 1.4.4. Поэтому далее будем предполагать, что $H_1 = N_G(H)$ является собственной $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой подгруппой группы G .

Пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе H . Нам необходимо указать гомоморфизм $\psi \in \Psi_\pi(G)$, при котором $g\psi \notin H\psi$.

Поскольку подгруппа H_1 $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в группе G , мы можем считать, что в действительности $g \in H_1$. Из предложения 1.4.4 следует, что найдется подгруппа $N \in \Omega_\pi(H_1)$, содержащая H и не содержащая элемента g . При этом порядок элемента g по модулю подгруппы N оказывается π -числом.

Воспользуемся $\mathcal{F}_\pi$ -отделимостью всех подгрупп $\mathcal{N}$ -группы G и выберем подгруппу $M \in \Omega_\pi(G)$ таким образом, чтобы $g \notin NM$. Полагая $G_1 = G/M$, $N_1 = NM/M$ и $g_1 = gM$, мы получаем конечную нильпотентную группу G_1 , подгруппу N_1 , содержащую образ NM/M подгруппы H , и элемент g_1 , порядок которого по модулю N_1 отличен от 1 и является π -числом.

Заметим теперь, что подгруппы N_1 и $\tau_\pi(G_1)$ содержатся в π' -изоляторе подгруппы N_1 в группе G_1 , который совпадает с множеством π' -корней из N_1 и потому не содержит элемента g_1 . Отсюда следует, что $g_1 \notin N_1\tau_\pi(G_1)$ и, стало быть, образ элемента g_1 относительно естественного гомоморфизма группы G_1 на конечную π -группу $G_1/\tau_\pi(G_1)$ не принадлежит образу подгруппы N_1 . Теорема доказана. ■

Предложение 1.3.6 позволяет несколько усилить полученный результат.

Следствие 1.4.7. *В расширении $\mathcal{N}$ -группы при помощи конечной π -группы все π' -изолированные подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы. ■*

Как уже было отмечено после доказательства предложения 1.4.2, ограниченность нильпотентных групп, вообще говоря, не является необходимой для справедливости условия (1.4.1). Вместе с тем, разрешимая группа без кручения тогда и только тогда обладает свойством $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости всех подгрупп, когда она принадлежит классу $\mathcal{S}$ [46]. Объединяя это утверждение и теорему 1.4.6, мы получаем, что нильпотентная группа без кручения удовлетворяет условию (1.4.1) в том и только том случае, когда она ограниченная.

§ 1.5. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость нильпотентных подгрупп $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп

Теперь мы хотим показать, что в $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых группах все π' -изолированные $\mathcal{N}$ -подгруппы являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми при любом выборе множества π . Сразу отметим, что применить для доказательства этого утверждения ту же идею, что и в теореме 1.2.7, оказывается затруднительно по следующим причинам.

Для каждого элемента g $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы G и для каждой π' -изолированной $\mathcal{N}$ -подгруппы H можно указать гомоморфизм на $\mathcal{N}_0$ -группу, переводящий g в элемент, не принадлежащий образу подгруппы H . Однако последний не обязан быть при этом π' -изолированной и, следовательно, $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой подгруппой. Поэтому продолжить это отображение до гомоморфизма на $\mathcal{F}_\pi$ -группу, отделяющего g от H может оказаться невозможным.

Приводимое далее рассуждение следует несколько иным путем, причем в действительности удастся доказать более сильное утверждение, нежели то, что было сформулировано выше.

Для начала мы расширим наши знания о π' -изоляторах нильпотентных подгрупп. Полученные здесь результаты неоднократно будут применяться в дальнейшем.

Предложение 1.5.1. Пусть G — $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемая группа, H — нильпотентная подгруппа группы G степени s . Тогда π' -изолятор подгруппы H в группе G является нильпотентной подгруппой степени s и, следовательно, совпадает с множеством ${}_G\sqrt[s]{H}$.

Доказательство. По условию подгруппа H удовлетворяет тождеству

$$[x_1, x_2, \dots, x_{c+1}] = 1.$$

Согласно предложению 1.2.3 этому тождеству удовлетворяет и $\mathcal{F}_\pi$ -замыкание $\mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H)$ подгруппы H в группе G . Поэтому π' -изолятор $\pi'\text{-}\mathcal{I}_G(H)$, лежащий в подгруппе $\mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H)$, оказывается нильпотентной группой степени не выше s . Так как, с другой стороны, он содержит подгруппу H , то его степень нильпотентности в точности равна s . ■

Для локально циклических подгрупп доказанное предложение можно уточнить следующим образом.

Предложение 1.5.2. В $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группе π' -изолятор произвольной локально циклической подгруппы является локально циклической группой.

Доказательство. Пусть G — $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемая группа и H — ее локально циклическая подгруппа. Нам достаточно показать, что любые два элемента подгруппы $\pi'\text{-}\mathcal{I}_G(H)$ порождают циклическую подгруппу.

Лемма. Пусть $g, h \in G$ и $h^q \in \langle g \rangle$ для некоторого π' -числа q . Тогда под-

группа $\langle g, h \rangle$ является циклической.

Доказательство. Пусть $h^q = g^k$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что число q является простым. Поэтому возможны лишь два случая: $q \mid k$ и $(k, q) = 1$.

Если $k = qk'$, то в силу предложения 1.3.4 $h = g^{k'}$ и $\langle g, h \rangle = \langle g \rangle$. Если же $(k, q) = 1$, то $ku + qv = 1$ для некоторых целых чисел u, v и, так как ввиду предложения 1.2.4 $h \in C_G(g)$,

$$g = g^{ku+qv} = h^{qu} g^{qv} = (h^u g^v)^q, \quad h = h^{ku+qv} = h^{ku} g^{kv} = (h^u g^v)^k.$$

Таким образом, $\langle g, h \rangle = \langle h^u g^v \rangle$. ■

Пусть теперь g и h — произвольные элементы подгруппы $\pi' \mathcal{I}_G(H)$. Тогда согласно предыдущему предложению существуют такие π' -числа q и r , что $g^r, h^q \in H$. Обозначим через f порождающий подгруппы $\langle g^r, h^q \rangle$.

Применяя лемму к элементам h и f , мы видим, что подгруппа $\langle f, h \rangle$ является циклической и порождается некоторым элементом f_1 . Снова применяя лемму, теперь уже к элементам f_1 и g , получаем, что элементы g и h принадлежат циклической подгруппе $\langle f_1, g \rangle$. ■

Следующее утверждение также служит уточнением предложения 1.5.1 и одновременно представляет собой первую часть основной теоремы настоящего параграфа.

Предложение 1.5.3. Пусть $\mathcal{K}$ — класс $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемых групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений. Тогда в любой $\mathcal{K}$ -аппроксимируемой группе π' -изолятор произвольной $\mathcal{N}$ -подгруппы является $\mathcal{K}$ -группой.

Доказательство. Пусть G — $\mathcal{K}$ -аппроксимируемая группа и H — $\mathcal{N}$ -подгруппа группы G . Пользуясь предложением 1.2.6, выберем подгруппу $N \in \Omega_{\mathcal{K}}(G)$, тривиально пересекающуюся с подгруппой H .

Пусть g — произвольный элемент из пересечения $\pi' \mathcal{I}_G(H) \cap N$. Ввиду $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости группы G подгруппа $\pi' \mathcal{I}_G(H)$ совпадает с множеством ${}_G \sqrt[q]{H}$, поэтому существует число q такое, что $g^q \in H$. Заметим, что тогда элемент g^q принадлежит пересечению $H \cap N$ и, следовательно, равен 1. Но группа G не имеет кручения, поэтому $g = 1$.

Таким образом, $\pi' \mathcal{I}_G(H) \cap N = 1$ и подгруппа $\pi' \mathcal{I}_G(H)$ вкладывается в $\mathcal{K}$ -группу G/N . ■

Вторую половину нашей теоремы содержит

Предложение 1.5.4. Пусть $\mathcal{K}$ — класс $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемых групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, и пусть в любой $\mathcal{K}$ -группе $\mathcal{F}_\pi$ -замыкание произвольной $\mathcal{S}_1$ -подгруппы совпадает с множеством π' -корней из этой подгруппы. Если группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема, то и в ней $\mathcal{F}_\pi$ -замыкание произвольной $\mathcal{S}_1$ -подгруппы совпадает с множеством π' -корней из этой подгруппы.

Доказательство. Пусть H — некоторая $\mathcal{S}_1$ -подгруппа группы G и g — произвольный элемент из подгруппы $\mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H)$. Тогда для каждой подгруппы $N \in \Omega_\kappa(G)$ образ элемента g в фактор-группе G/N принадлежит подгруппе $\mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_{G/N}(HN/N)$, которая по условию совпадает с множеством π' -корней из подгруппы HN/N .

Пользуясь предложением 1.2.6, выберем подгруппу $M \in \Omega_\kappa(G)$, тривиально пересекающуюся с H . Ввиду сказанного выше порядок элемента gM фактор-группы G/M по модулю подгруппы HM/M конечен и равен некоторому π' -числу q . Мы хотим показать теперь, что для каждой подгруппы $N \in \Omega_\kappa(G)$, лежащей в M , порядок элемента gN по модулю подгруппы HN/N также равен q .

Пусть $N \in \Omega_\kappa(G)$ — произвольная подгруппа, лежащая в M , и пусть $r = |gN| \pmod{HN/N}$. Тогда $(gM)^r \in HM/M$ и, следовательно, q делит r .

Поскольку естественный гомоморфизм группы G на G/M действует инъективно на подгруппе H , существует единственный элемент $h \in H$ такой, что $hM = g^q M$. Точно так же имеется лишь один элемент $f \in H$, удовлетворяющий условию $fN = g^r N$. Из приведенных равенств вытекает, что $h^t M = fM$, где $t = r/q$. Но $h^{-t} f \in H$, а пересечение подгрупп H и M тривиально. Поэтому $f = h^t$.

Тем самым, мы получаем следующие соотношения, имеющие место в фактор-группе G/N :

$$(gN)^{qt} = (gN)^r = fN = (hN)^t.$$

Заметим теперь, что $\mathcal{K}$ -группа G/N $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема и в силу предложения 1.3.4 обладает свойством однозначности извлечения π' -корней. Отсюда $(gN)^q = hN \in HN/N$ и, стало быть, порядок r элемента gN по модулю подгруппы HN/N совпадает с q .

Итак, элемент g^q принадлежит подгруппе HN для каждой подгруппы $N \in \Omega_\kappa(G)$, лежащей в M . Напомним, что в соответствии с предложением 1.2.5 подгруппа H является $\mathcal{K}$ -отделимой в группе G , т. е. $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) = H$. С другой стороны, по предложению 1.2.2

$$\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) = \bigcap_{\substack{N \in \Omega_\kappa(G), \\ N \leq M}} HN$$

Таким образом, $g^q \in H$ и, следовательно, $\mathcal{F}_\pi\text{-Cl}_G(H) = \sqrt[q]{H}$, что и требовалось. ■

Непосредственно из предложений 1.5.3 и 1.5.4, а также предложения 1.5.1 вытекает искомая

Теорема 1.5.5. Пусть G — $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемая группа, H — $\mathcal{N}$ -подгруппа группы G степени s , π — некоторое множество простых чисел. Тогда множество π' -корней из подгруппы H является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой $\mathcal{N}$ -подгруппой степени s . В частности, каждая π' -изолированная $\mathcal{N}$ -подгруппа группы G $\mathcal{F}_\pi$ -отделима.

Если группа G аппроксимируется конечно порожденными нильпотент-

ными группами без кручения, то множество π' -корней из подгруппы H также является конечно порожденной подгруппой.

Доказательство. В самом деле, в силу предложения 1.5.4 справедливы равенства

$${}_G\sqrt[\pi']{H} = \pi' \cdot \mathcal{I}_G(H) = \mathcal{F}_\pi \cdot Cl_G(H).$$

Из предложения 1.5.3 следует, что подгруппа $\pi' \cdot \mathcal{I}_G(H)$ является ограниченной или конечно порожденной нильпотентной в зависимости от того, каким классом аппроксимируется группа G . И, наконец, степень нильпотентности этой подгруппы равна s ввиду предложения 1.5.1. ■

Заметим, что в силу предложения 1.2.6 произвольная $\mathcal{S}$ -подгруппа $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы принадлежит классу $\mathcal{N}_0$. Поэтому теорема 1.5.5 утверждает, в частности, $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость всех π' -изолированных $\mathcal{S}$ -подгрупп $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы. Применяя к этому результату предложение 1.3.6, мы получаем

Следствие 1.5.6. *В расширении $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы при помощи конечной π -группы все π' -изолированные $\mathcal{S}$ -подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.* ■

При этом необходимо отметить, что $\mathcal{S}$ -подгруппы почти $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп уже, разумеется, не обязаны быть нильпотентными.

ЧАСТЬ 2. ОТДЕЛИМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ГРУПП

§ 2.1. Конструкция свободного произведения групп с объединенной подгруппой

Как явствует из названия, вторая часть работы целиком посвящена описанию $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых циклических подгрупп обобщенных свободных произведений групп. В этом параграфе мы напомним определение и некоторые хорошо известные свойства конструкции свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Кроме того, здесь оказалось уместным привести одно вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства теоремы 2.5.10 из § 2.5 (предложение 2.1.9).

Пусть A и B — две группы, заданные следующими представлениями:

$$A = \langle a_1, a_2, \dots; u_1, u_2, \dots \rangle, B = \langle b_1, b_2, \dots; v_1, v_2, \dots \rangle.$$

Пусть также H — подгруппа группы A , K — подгруппа группы B и φ — изоморфизм группы H на группу K . Свободным произведением групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ (или, короче, обобщенным свободным произведением групп A и B), называется группа $G = (A * B; H = K, \varphi)$, задаваемая представлением вида:

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, h = h\varphi (h \in H) \rangle.$$

При этом группы A и B называют свободными множителями, H и K — объединяемыми подгруппами.

Введенные обозначения мы будем предполагать фиксированными на протяжении всей второй части. Также без дополнительных оговорок будем считать всюду, что обобщенное свободное произведение G нетривиально, т. е. H и K являются собственными подгруппами свободных множителей A и B .

Из определения группы G следует, что каждый ее элемент g определяется некоторым словом w от порождающих $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$. Легко видеть, что с использованием определяющих соотношений $h = h\varphi$ слово w может быть приведено к виду $w_1 \dots w_n$, где

- 1) каждый сомножитель w_i является словом либо только от порождающих $a_1, a_2, \dots$ (A -словом), либо только от порождающих $b_1, b_2, \dots$ (B -словом);
- 2) если $n > 1$, то соседние слоги w_i и w_{i+1} не являются одновременно A -словами или B -словами;

- 3) если $n > 1$, то каждый A -слог w_i определяет в группе A элемент, не принадлежащий подгруппе H , и каждый B -слог w_j определяет в группе B элемент, не принадлежащий подгруппе K .

Слово w от порождающих $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, определяющее элемент $g \in G$ и удовлетворяющее условиям 1)–3), называют *несократимой записью элемента g* . Следующее утверждение играет ключевую роль в доказательстве всех основных свойств конструкции обобщенного свободного произведения двух групп.

Предложение 2.1.1 [43, теорема 4.4]. *Всякий элемент группы G , обладающий несократимой записью с числом слогов, большим 1, отличен от единицы. ■*

Непосредственно из определения группы G следует, что отображение, переводящее порождающие символы $a_1, a_2, \dots$ группы A в соответствующие порождающие символы $a_1, a_2, \dots$ группы G , задает гомоморфизм α группы A в группу G . Аналогичным образом определяется гомоморфизм β группы B в группу G .

Предложение 2.1.2 [43, теорема 4.3]. *Отображения α и β являются вложениями групп A и B в группу G . При этом $A\alpha \cap B\beta = H\alpha = K\beta$. ■*

Сформулированное утверждение позволяет нам далее считать свободные множители A и B подгруппами группы G . При этом символы H и K оказываются двумя различными обозначениями одной и той же подгруппы группы G , поэтому последнюю часто называют *свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой* и записывают в виде $G = (A * B; H)$, предполагая изоморфизм φ заданным. Мы, однако, не будем использовать такое обозначение, поскольку оно затрудняет понимание того, зависит ли то или иное утверждение от выбора изоморфизма φ . В условиях значительного числа результатов из §§2.4–2.6 такой зависимости нет.

Предложение 2.1.3. *Пусть α и β — гомоморфизмы групп A и B в некоторую группу X , и пусть $h\alpha = h\varphi\beta$ для каждого элемента $h \in H$. Тогда существует гомоморфизм ρ группы G в группу X , действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием отображений α и β , соответственно.*

Доказательство. В самом деле, если группа G задана представлением

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, h = h\varphi \ (h \in H) \rangle,$$

то при отображении в группу X порождающих символов $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, переводящем символ a_i в элемент $a_i\alpha$ и символ b_j в элемент $b_j\beta$, все определяющие соотношения переходят в равенства, справедливые в группе X . ■

Предложение 2.1.4. *Пусть $g = g_1 \dots g_n = f_1 \dots f_m$ — две несократимые записи элемента g . Тогда $m = n$ и для каждого i , $1 \leq i \leq n$, существуют элементы $h_i, k_i \in H$ такие, что $f_i = h_i g_i k_i$.*

Доказательство будем вести индукцией по n , предполагая без потери общности, что $n \leq m$.

Пусть сначала $n=1$, и предположим, что $m \geq 2$. Тогда $g_1^{-1}f_1 \dots f_m = 1$.

Если элементы g_1 и f_1 не принадлежат одному и тому же свободному множителю, то левая часть этого равенства представляет собой несократимую запись единичного элемента группы G длины $m+1$, что противоречит предложению 2.1.1. Если элементы g_1 и f_1 лежат в одной и той же подгруппе A или B , но $g_1^{-1}f_1 \notin H$, мы снова получаем в левой части несократимую запись единицы длины m и противоречие с предложением 2.1.1. Наконец, если $g_1^{-1}f_1 \in H$, то левая часть оказывается несократимой записью 1 длины $m-1$. Из предложения 2.1.1 теперь следует, что $m=2$ и $(g_1^{-1}f_1)f_2=1$. Но отсюда вытекает включение $f_2 \in H$, что невозможно.

Таким образом, $m=1$ и $f_1=g_1$.

Пусть теперь $n \geq 2$ и $g_n^{-1} \dots g_1^{-1}f_1 \dots f_m = 1$.

Поскольку запись элемента в левой части не может быть несократимой, $g_1^{-1}f_1 \in H$. Положим $k_1 = g_1^{-1}f_1$ и $f'_2 = k_1f_2$.

Тогда произведения $g_2 \dots g_n$ и $f'_2 \dots f_m$ представляют собой несократимые записи одного и того же элемента длины $n-1$ и $m-1$, соответственно. Из индуктивного предположения теперь следует, что $n-1=m-1$ и для каждого i , $2 \leq i \leq n$, существуют элементы $h_i, k_i \in H$ такие, что $f'_2 = h_2g_2k_2$ и $f_i = h_i g_i k_i$ при $i > 2$.

В результате, $f_1 = g_1k_1$, $f_2 = (k_1^{-1}h_2)g_2k_2$ и $f_i = h_i g_i k_i$ при $i > 2$. ■

Таким образом, любые две несократимые записи элемента $g \in G$ содержат одно и то же число слогов, которое мы будем называть *длиной элемента* g и обозначать через $l(g)$. Следует отметить, что определенная здесь длина элемента отличается от длины, вводимой в книге [43]. Так, например, все элементы из подгрупп A и B имеют согласно нашему определению единичную длину, в то время как длина в смысле [43] элементов из подгруппы H равна нулю.

Из предложения 2.1.4 следует также, что в любых двух несократимых записях элемента g на одинаковых местах стоят сомножители, лежащие в одной и той же подгруппе A или B , и это позволяет ввести еще одно понятие.

Элемент $g \in G$ называется *циклически несократимым*, если в его несократимой записи $g = g_1 \dots g_n$ при $n > 1$ сомножители g_1 и g_n не лежат одновременно в A или в B . В частности, все элементы длины 1 циклически несократимы. Иными словами, элемент g не является циклически несократимым тогда и только тогда, когда он имеет нечетную длину, большую 1.

Предложение 2.1.5. Пусть g — произвольный элемент группы G нечетной длины и $g_1 \dots g_{2n+1}$ — его несократимая запись. Если g не сопряжен ни с каким элементом из множества $A \cup B$, то существуют такое натуральное число $m \leq n$ и такой элемент $f \in A \setminus H \cup B \setminus K$, что

$$g = g_1 \dots g_m g_{m+1} \dots g_{(2n+1)-m} f g_m^{-1} \dots g_1^{-1},$$

причем элемент $g_{m+1} \dots g_{(2n+1)-m} f$ циклически несократим, а элемент $f g_m^{-1}$ (лежащий в той же подгруппе A или B , где находятся элементы f и g_m) не входит в подгруппу H .

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n .

Если $n = 1$, то можно положить $m = 1$ и $f = g_3 g_1$, поскольку элемент

$$g' = g_1^{-1} g g_1 = g_2 g_3 g_1 = g_2 f$$

по условию не принадлежит множеству $A \cup B$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Если $g_{2n+1} g_1 \notin H$, то элемент $g' = g_1^{-1} g g_1$ циклически несократим и мы снова полагаем $m = 1$ и $f = g_{2n+1} g_1$.

Пусть $g_{2n+1} g_1 \in H$. Тогда элемент g' имеет длину $2n - 1$ и произведение $g_2 \dots g_{2n-1} g'_{2n}$, где $g'_{2n} = g_{2n} g_{2n+1} g_1$, представляет собой его несократимую запись. В силу индуктивного предположения элемент g' записывается в виде

$$g' = g_2 \dots g_m g_{m+1} \dots g_{(2n+1)-m} f g_m^{-1} \dots g_2^{-1}$$

для подходящих числа $m \geq 2$ и элемента $f \in A \setminus H \cup B \setminus K$. Очевидно, что m и f являются искомыми. ■

Из доказанного утверждения вытекает

Предложение 2.1.6. Для любых двух элементов $g, h \in G$ если один из этих элементов имеет четную длину и $h = g^q$ для некоторого положительного числа q , то другой элемент также имеет четную длину и $l(h) = l(g)q$.

Доказательство. Действительно, если четную длину имеет элемент g , то утверждение очевидно. Предположим теперь, что этот элемент имеет нечетную длину.

Если g не сопряжен ни с каким элементом из множества $A \cup B$, то в силу предложения 2.1.5 его можно записать в виде

$$g = g_1 \dots g_m g_{m+1} \dots g_{l(g)-m} f g_m^{-1} \dots g_1^{-1},$$

для подходящих $m \in \mathbb{N}$ и $f \in A \setminus H \cup B \setminus K$, таких что элемент $g_{m+1} \dots g_{l(g)-m} f$ циклически несократим и $f g_m^{-1} \notin H$. Тогда произведение

$$g_1 \dots g_m \left(\underbrace{(g_{m+1} \dots g_{l(g)-m} f) \dots (g_{m+1} \dots g_{l(g)-m} f)}_{q-1} \right) g_{m+1} \dots g_{l(g)-m} f g_m^{-1} \dots g_1^{-1},$$

где $f' = f g_m^{-1}$, представляет собой несократимую запись элемента h и

$$l(h) = q(l(g) - 2m + 1) + (2m - 1) —$$

нечетное число.

Если же элемент g сопряжен с некоторым элементом $u \in A \cup B$ при помощи элемента w , то, используя индукцию по $l(w)$, легко показать, что и в этом случае элемент $h = w^{-1} u^q w$ имеет нечетную длину. ■

Предложение 2.1.7. Группа G обладает элементом порядка q тогда и только тогда, когда таким элементом обладает хотя бы один из свободных множителей A и B .

Доказательство. Пусть g — элемент порядка q группы G . Из предложения 2.1.6 следует, что он имеет нечетную длину и в силу предложения 2.1.5 сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом w , порядок кото-

рого также равен q . Этот элемент w ввиду предложения 2.1.6 не может иметь четную длину, следовательно, он принадлежит одному из свободных множителей A и B . ■

Приведем теперь два результата о подгруппах обобщенного свободного произведения. Первый из них известен как теорема Х. Нейман [28].

Предложение 2.1.8. Пусть N — нормальная подгруппа группы G . Если $N \cap A = N \cap B = 1$, то подгруппа N свободна. ■

Предложение 2.1.9. Пусть H и K — бесконечные циклические подгруппы и пусть группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема для некоторого класса групп $\mathcal{K}$. Если подгруппа $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \cap A$ отлична от H и не содержит элементов конечного порядка, то произвольная нециклическая абелева подгруппа группы G сопряжена с некоторой подгруппой одного из свободных множителей.

Доказательство. Обозначим через h и k порождающие подгрупп H и K , соответственно.

Лемма 1. Для всякого натурального числа n найдется элемент $g_n \in A \setminus H$, принадлежащий $\mathcal{K}$ -замыканию подгруппы H^n в группе G .

Доказательство. Пусть $g \in (\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \cap A) \setminus H$.

Очевидно, что если элемент g имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы H , то достаточно положить $g_n = g^n$. Поэтому мы будем считать далее, что порядок g по модулю H конечен и равен q .

Ввиду предложения 1.2.4 $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \leq C_G(H)$, следовательно, элементы g и h перестановочны. Покажем, что элемент g^q можно предполагать равным h .

Действительно, пусть $g^q = h^m$ и $d = (m, q)$. Пусть также $m = dm'$, $q = dq'$.

Если предположить, что $d \neq 1$, то из равенств $g^q = h^m$ и $[g, h] = 1$ следует $(g^{q'} h^{-m'})^d = 1$. Но элемент $g^{q'} h^{-m'}$ принадлежит подгруппе $\mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \cap A$, которая не содержит элементов конечного порядка, поэтому $f^{q'} = h^{m'}$ и мы получаем противоречие с тем, что порядок элемента g по модулю подгруппы H равен q .

Таким образом, $d = 1$ и для некоторых целых чисел u и v имеет место равенство $tu + qv = 1$. Полагая элемент g' равным $g^u h^v$, мы получаем, что

$$g' \in \mathcal{K}\text{-Cl}_G(H) \cap A$$

и $(g')^q = h$. Так как к тому же $(q, u) = 1$, то $g' \notin H$.

Итак, будем считать далее, что $g^q = h$.

Зафиксируем некоторое натуральное число n и представим его в виде $n = st$, где s — q -число, а t взаимно просто с q .

Поскольку $g \in \mathcal{K}\text{-Cl}_G(H)$, каждому гомоморфизму $\psi \in \Psi_{\mathcal{K}}(G)$ соответствует некоторое число x такое, что $g\psi = h^x\psi$. Так как $g^q = h$, то порядок r элемента $h\psi$ конечен и делит число $qx - 1$. Отсюда следует, в частности, что $(q, r) = 1$. Но тогда числа s и r также являются взаимно простыми, и потому $H^s\psi = H\psi$.

Положим $g_n = g^t$. Так как $(q, t) = 1$, то $g^t \notin H$, но при каждом гомоморфизме $\psi \in \Psi_{\mathcal{K}}(G)$ элемент $g^t\psi$ входит в подгруппу $H^t\psi = H^{st}\psi = H^n\psi$, что и требовалось. ■

Лемма 2. Для любого неединичного элемента $f \in H$ $C_G(f) = C_A(f)$.

Доказательство. Покажем вначале, что подгруппа K антинормальна в группе B , т. е. для любого элемента $b \in B \setminus K$ и для любого ненулевого целого n $b^{-1}k^n b \notin K$.

Пусть, напротив, для некоторого элемента $b \in B \setminus K$ и для некоторого числа n , которое без ограничения общности можно считать положительным, имеет место включение $b^{-1}k^n b \in K$. Положим $f = [b^{-1}g_n b, g_n]$, где g_n — элемент из леммы 1. Тогда элемент f имеет несократимую запись длины 8 и потому не равен единице. Однако при любом гомоморфизме $\psi \in \Psi_K(G)$ образ элемента g_n оказывается в образе подгруппы $H^n = K^n$, поэтому

$$(b^{-1}g_n b)\psi \in (b^{-1}K^n b)\psi \subseteq K\psi$$

и $f\psi = 1$. Тем самым мы получаем противоречие с K -аппроксимируемостью группы G .

Из доказанного следует, в частности, что для любого неединичного элемента $f \in H$ $C_G(f) \cap B = K$.

Пусть теперь $f \in H$, $g \in G$ — произвольные элементы и $g = g_1 \dots g_n$ — несократимая запись элемента g , причем $n \geq 2$.

Если g_1 является B -словом, то в силу доказанного $g_1^{-1}fg_1 \notin K$. Поэтому элемент

$$g^{-1}fg = g_n^{-1} \dots g_2^{-1}(g_1^{-1}fg_1)g_2 \dots g_n$$

имеет несократимую запись длины $2n - 1$ и, в частности, $g^{-1}fg \neq f$.

Аналогичная ситуация имеет место, если g_1 является A -словом, но $g_1^{-1}fg_1 \notin H$. Если же элемент $g_1^{-1}fg_1$ лежит в H , то

$$g_2^{-1}(g_1^{-1}fg_1)g_2 \in B \setminus K,$$

так что в любом случае $g^{-1}fg \neq f$. ■

Еще для дальнейших рассуждений нам потребуется описание коммутирующих элементов обобщенного свободного произведения двух групп. Мы приведем его в общем виде без учета ограничений, наложенных на подгруппы H и K в формулировке настоящего предложения.

Лемма 3 [43, теорема 4.5]. Пусть f и g — некоторые элементы группы G . Если $[f, g] = 1$, то имеет место одна и только одна из следующих трех возможностей:

- 1) один из элементов f, g сопряжен с некоторым элементом подгруппы H ;
- 2) оба элемента f, g лежат в некоторой подгруппе, сопряженной с A или с B и ни один из них не сопряжен ни с каким элементом подгруппы H ;
- 3) существуют элементы $u, w \in G$, $h_1, h_2 \in H$ и целые числа s, t такие, что $f = u^{-1}h_1uw^s$, $g = u^{-1}h_2uw^t$ и $[h_1, h_2] = [u^{-1}h_1u, w] = [u^{-1}h_2u, w] = 1$, причем ни f , ни g не сопряжен ни с каким элементом из множества $A \cup B$. ■

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству утверждения, сформулированного в условии предложения.

Пусть L — произвольная абелева подгруппа группы G . Рассмотрим три случая.

Случай 1. Подгруппа L содержит элемент g , сопряженный с некоторым элементом подгруппы H .

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $g \in H$. Тогда из леммы 2 сразу же следует, что любой коммутирующий с g элемент $f \in L$ должен принадлежать подгруппе A .

Случай 2. Подгруппа L содержит элемент g , сопряженный с некоторым элементом множества $A \cup B$, и ни один элемент из L не сопряжен ни с каким элементом из подгруппы H .

Мы снова можем считать, что $g \in A \cup B$. Если при этом $g \in A$, то в силу леммы 3 (случай 2) подгруппа L целиком содержится в группе A . И точно так же, если $g \in B$, то $L \leq B$.

Случай 3. Никакой элемент подгруппы L не сопряжен ни с каким элементом из множества $A \cup B$.

Пусть g — некоторый элемент подгруппы L . Покажем, что если $L \neq \langle g \rangle$, то из элемента g в подгруппе L извлекается корень нетривиальной степени.

Выберем элемент $f \in L$ таким образом, чтобы он не принадлежал циклической подгруппе, порожденной элементом g . Ввиду леммы 3 (случай 3) мы можем указать такие элементы $u, w \in G$ и такие целые числа m, n, s, t , что $f = u^{-1}h^m u w^s$, $g = u^{-1}h^n u w^t$ и

$$[u^{-1}h^m u, w] = [u^{-1}h^n u, w] = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$[h^m, u w u^{-1}] = [h^n, u w u^{-1}] = 1.$$

Поэтому в силу леммы 2 либо $m = n = 0$, либо $u w u^{-1} \in A$. Вторая возможность сразу же приводит к противоречию, поскольку элементы

$$f = u^{-1}h^m(u w u^{-1})^s u \text{ и } g = u^{-1}h^n(u w u^{-1})^t u$$

оказываются в подгруппе, сопряженной с A при помощи элемента u . Таким образом, $f = w^s$ и $g = w^t$.

Пусть $d = (s, t)$ и числа q и r таковы, что $sq + tr = d$. Поскольку $f \notin \langle g \rangle$, t не делит s и, следовательно, $d \neq t$. В то же время элемент $w^d = g^r f^q$ принадлежит подгруппе L и, стало быть, является искомым корнем из элемента g .

Пусть теперь x — произвольный элемент подгруппы L . Ввиду ограничений, наложенных на эту подгруппу, элемент x сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом неединичной длины, поэтому в соответствии с предложением 2.1.6 из него не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Обозначим через y некоторый корень максимальной степени, извлекающийся из элемента x в подгруппе L . Тогда из доказанного только что немедленно следует, что $L = \langle y \rangle$. ■

§ 2.2. Описание семейства $\Delta_\pi(G)$

Настоящий параграф содержит описание семейства $\Delta_\pi(G)$ всех $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых циклических подгрупп группы G при определенных условиях, накладываемых на эту группу. Данное описание лежит в основе всех результатов, полученных во второй части работы.

Прежде всего заметим, что если N — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_\pi(G)$ и $R = N \cap A$, $S = N \cap B$, то $R \in \Omega_\pi(A)$, $S \in \Omega_\pi(B)$ и $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Семейство пар подгрупп, получаемых пересечением с группами A и B всевозможных подгрупп из $\Omega_\pi(G)$, будет играть важную роль в дальнейшем изложении, поэтому мы введем для него специальное обозначение: Θ_π . Кроме того, символами $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$ будем обозначать проекции этого семейства на группы A и B .

До сих пор мы имели дело лишь с отделимостью в некотором классе групп. Введем теперь более общее понятие отделимости семейством нормальных подгрупп.

Пусть Σ — семейство нормальных подгрупп некоторой группы X . Будем говорить, что подгруппа Y группы X отделима в X семейством подгрупп Σ , если

$$\bigcap_{N \in \Sigma} YN = Y.$$

Таким образом, определенная ранее отделимость подгруппы Y в классе $\mathcal{K}$ равносильна отделимости Y семейством $\Omega_{\mathcal{K}}(X)$.

Обозначим через $\Lambda_\pi(A)$ и $\Lambda_\pi(B)$ семейства всех π' -изолированных циклических подгрупп свободных множителей A и B , отделимых в этих группах семействами $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$, соответственно. Пусть также $\bar{\Lambda}_\pi(A)$ и $\bar{\Lambda}_\pi(B)$ обозначают семейства π' -изолированных циклических подгрупп, не отделимых в группах A и B семействами $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$.

Поскольку все подгруппы из семейства $\Theta_\pi(A)$ нормальны в группе A и имеют в ней конечный π -индекс, из отделимости некоторой подгруппы семейством $\Theta_\pi(A)$ следует и ее отделимость семейством $\Omega_\pi(A)$. Таким образом, $\Lambda_\pi(A) \subseteq \Delta_\pi(A)$ и $\bar{\Lambda}_\pi(A) \supseteq \bar{\Delta}_\pi(A)$ (напомним, что через $\bar{\Delta}_\pi(X)$ мы обозначили семейство всех π' -изолированных циклических подгрупп группы X , не являющихся $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми в этой группе). Аналогичные утверждения имеют место и для подгрупп группы B , поэтому $\Lambda_\pi(B) \subseteq \Delta_\pi(B)$ и $\bar{\Lambda}_\pi(B) \supseteq \bar{\Delta}_\pi(B)$.

Из определения семейств $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$ легко следует, что произвольная подгруппа группы A или группы B , $\mathcal{F}_\pi$ -отделимая в группе G , оказывается отделимой в A или в B семейством подгрупп $\Theta_\pi(A)$ или $\Theta_\pi(B)$, соответственно. Непосредственно из этого замечания вытекает

Предложение 2.2.1. *Если циклическая подгруппа группы G принадлежит семейству $\Delta_\pi(G)$, то она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_\pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\pi(B)$. ■*

Достаточное условие справедливости обратного утверждения содержит

Теорема 2.2.2. Пусть группа G удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(2.2.3) \quad \bigcap_{N \in \Theta_\pi(A)} N = \bigcap_{M \in \Theta_\pi(B)} M = 1 \text{ и}$$

$$(2.2.4) \quad \bigcap_{N \in \Theta_\pi(A)} HN = H, \quad \bigcap_{M \in \Theta_\pi(B)} KM = K$$

Тогда произвольная π' -изолированная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_\pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\pi(B)$, принадлежит семейству $\Delta_\pi(G)$. В частности, группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема.

Доказательство. Следуя Г. Баумслагу [6], произвольные подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$, удовлетворяющие условию $(R \cap H)\varphi = S \cap K$, мы будем называть (H, K, φ) -совместимыми. Если нормальные подгруппы $R \leq A$ и $S \leq B$ (H, K, φ) -совместимы, то отображение $\varphi_{R,S}: HR/R \rightarrow KS/S$, ставящее в соответствие элементу hR , $h \in H$, элемент $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому можно построить группу

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \varphi_{R,S}).$$

При этом естественные гомоморфизмы группы A на A/R и группы B на B/S продолжаемы ввиду предложения 2.1.3 до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

Предложение 2.2.5. Ядро гомоморфизма $\rho_{R,S}$ совпадает с нормальным замыканием в группе G множества $R \cup S$.

Доказательство. В самом деле, если группы A и B заданы представлениями $A = \langle a_1, a_2, \dots; u_1, u_2, \dots \rangle$ и $B = \langle b_1, b_2, \dots; v_1, v_2, \dots \rangle$, то согласно определению группа $G_{R,S}$ имеет следующее представление:

$$G_{R,S} = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; \\ u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, r, s, hr = (h\varphi)s \ (h \in H, r \in R, s \in S) \rangle.$$

Очевидно, что с помощью преобразований Тице это представление может быть приведено к виду:

$$G_{R,S} = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots; \\ u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, h = (h\varphi), r, s \ (h \in H, r \in R, s \in S) \rangle.$$

Но это как раз и означает, что $G_{R,S}$ есть фактор-группа группы G по нормальному замыканию множества $R \cup S$. ■

Если теперь ψ — произвольный гомоморфизм из семейства $\Psi_\pi(G)$, и $R = \ker \psi \cap A$, $S = \ker \psi \cap B$, то в силу доказанного только что предложения $\ker \rho_{R,S} \leq \ker \psi$. Таким образом, каждый гомоморфизм группы G на конечную π -группу проходит через группу $G_{R,S}$ при подходящем выборе пары подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$. Это означает, что если циклическая подгруппа C группы G является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой, то для каждого элемента $g \in G \setminus C$ существует такая пара подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$, что образ элемента g относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$ не принадлежит

некоторой $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой подгруппе группы $G_{R,S}$, содержащей образ подгруппы C . Поэтому при изучении свойства $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости в группе G класс обобщенных свободных произведений конечных π -групп может быть использован в качестве промежуточного. Реализовать эту идею позволяет

Предложение 2.2.6. Пусть $R \in \Omega_\pi(A)$, $S \in \Omega_\pi(B)$ и $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда $(R, S) \in \Theta_\pi$. Если группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то все ее π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.

Доказательство. Если группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то существует подгруппа $N_{R,S} \in \Omega_\pi(G_{R,S})$, тривиально пересекающаяся с конечными подгруппами A/R и B/S . Обозначая через N прообраз подгруппы $N_{R,S}$ относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$, мы получаем, что $N \cap A = R$ и $N \cap B = S$, т. е. $(R, S) \in \Theta_\pi$.

Далее, в силу предложения 2.1.8 подгруппа $N_{R,S}$ свободна и, следовательно, аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения [25]. Стало быть, группа $G_{R,S}$ представляет собой расширение $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы при помощи конечной π -группы, и все ее π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы ввиду следствия 1.5.6.

Обратно, пусть $(R, S) \in \Theta_\pi$, и пусть подгруппа $N \in \Omega_\pi(G)$ такова, что $N \cap A = R$ и $N \cap B = S$. Тогда $\ker \rho_{R,S} \leq N$ и потому $N\rho_{R,S} \cap A/R = N\rho_{R,S} \cap B/S = 1$. Тем самым, группа $G_{R,S}$ снова оказывается расширением свободной группы при помощи конечной π -группы, что и обеспечивает ее $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость. ■

Таким образом, для доказательства $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости данной циклической подгруппы C группы G нам достаточно уметь для каждого элемента $g \in G \setminus C$ находить такую пару подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$, что элемент $g\rho_{R,S}$ не принадлежит некоторой π' -изолированной циклической подгруппе группы $G_{R,S}$, содержащей подгруппу $C\rho_{R,S}$. Отметим, что хотя подгруппа C , будучи $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой, является π' -изолированной в G , ее образ может не быть таковым ни при каком гомоморфизме $\rho_{R,S}$ группы G на нетривиальное обобщенное свободное произведение конечных π -групп. Соответствующий пример приводится по окончании доказательства.

Реализуем намеченную схему рассуждений.

Пусть C — π' -изолированная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из $\bar{\Lambda}_\pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\pi(B)$, и пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий C . Пусть также c — порождающий подгруппы C и $g = g_1 g_2 \dots g_m$, $c = c_1 c_2 \dots c_n$ — несократимые записи элементов g и c . Применяя при необходимости подходящий внутренний автоморфизм группы G , мы можем считать далее, что элемент c циклически несократим.

Пусть сначала $n = 1$, и пусть для определенности $c \in A$.

Заметим, что если $(R, S) \in \Theta_\pi$, то все циклические подгруппы свободных множителей группы $G_{R,S}$ (конечных π -групп) π' -изолированы. Поэтому в данном случае нам достаточно указать такую пару подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$, что $g\rho_{R,S} \notin C\rho_{R,S}$.

По условию подгруппа C отделима подгруппами из семейства $\Theta_\pi(A)$. Поэтому в случае, когда $g \in A$, найдется пара подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$ такая, что $g \notin CR$ и, следовательно, $gr_{R,S} \notin Cr_{R,S}$.

Пусть $g \notin A$. Тогда при $m=1$ $g=g_1 \in B \setminus K$. Если же $m>1$, то каждый слог g_i несократимой записи элемента g принадлежит одному из свободных множителей и не входит в объединяемую подгруппу.

Ввиду условия (2.2.4) отделимости объединяемых подгрупп семействами $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$, для каждого i ($1 \leq i \leq m$) можно указать пару подгрупп $(R_i, S_i) \in \Theta_\pi$ такую, что $g_i \notin HR_i$, если $g_i \in A$, и $g_i \notin KS_i$, если $g_i \in B$. Положим

$$R = \bigcap_{i=1}^m R_i \text{ и } S = \bigcap_{i=1}^m S_i.$$

Из определения семейства Θ_π легко следует, что пара подгрупп (R, S) снова принадлежит этому семейству. Очевидно также, что $l(gr_{R,S}) = l(g)$, и если $m=1$, то $gr_{R,S} \in Br_{R,S} \setminus Kr_{R,S}$. Таким образом, в этом случае элемент $gr_{R,S}$ также не принадлежит подгруппе $Cr_{R,S}$.

Из доказанного следует, в частности, что группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема.

В самом деле, условие (2.2.3) означает, что единичная подгруппа принадлежит семействам $\Lambda_\pi(A)$ и $\Lambda_\pi(B)$. Из него вытекает также, что группы A и B не имеют π' -кручения, поэтому в силу предложения 2.1.7 π' -кручения нет и в группе G .

Таким образом, тривиальная подгруппа группы G π' -изолирована в G и не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_\pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\pi(B)$. Следовательно, она принадлежит семейству $\Delta_\pi(G)$, что и дает требуемый результат.

Пусть теперь $n \geq 2$. Как и выше, найдем пару подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$ такую, что $l(gr_{R,S}) = l(g)$ и $l(cr_{R,S}) = l(c)$. Заметим, что запись элемента $cr_{R,S}$ по-прежнему является циклически несократимой.

Для любой пары подгрупп $(U, V) \in \Theta_\pi$ такой, что $U \leq R$ и $V \leq S$, имеет место равенство $l(cr_{U,V}) = l(c) > 1$. Поэтому в силу предложения 2.1.6 из элемента $cr_{U,V}$ не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Из предложения 1.5.2 теперь следует, что π' -изолятор $F_{U,V}$ подгруппы $Cr_{U,V}$ в группе $G_{U,V}$ является циклической подгруппой. Покажем, что подгруппы U и V можно выбрать таким образом, чтобы элемент $gr_{U,V}$ не принадлежал подгруппе $F_{U,V}$.

Запишем число n в виде $n=qt$, где q является π -числом, а t — π' -числом, если $\pi \neq \Pi$, и $t=1$, если $\pi = \Pi$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. n не делит mt .

Так как n не делит mt , то в силу предложения 2.1.6 $(gr_{R,S})^t \notin Cr_{R,S}$. Покажем, что тогда $gr_{R,S} \notin F_{R,S}$.

Пусть $f_{R,S}$ обозначает порождающий подгруппы $F_{R,S}$, и пусть $(f_{R,S})^z = cr_{R,S}$. Из предложения 2.1.6 следует, что тогда $z|n$. Но z является π' -числом, поэтому оно делит t и, стало быть, $(F_{R,S})^t \leq Cr_{R,S}$. Таким образом, предполагая, что $gr_{R,S} \in F_{R,S}$, мы приходим к утверждению $(gr_{R,S})^t \in Cr_{R,S}$, которое проти-

воречит установленному ранее.

Случай 2. $mt=nk$ для некоторого положительного k .

Так как подгруппа C π' -изолирована в группе G и $g \notin C$, то $g^t \neq c^{\pm k}$. Из установленной выше $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости группы G теперь следует, что существует подгруппа $L \in \Omega_\pi(G)$ такая, что $g^{-t}c^k, g^{-t}c^{-k} \notin L$. Положим $U=R \cap L$, $V=S \cap L$.

Тогда $(gr_{U,V})^t \neq (cr_{U,V})^{\pm k}$ и, так как $l(gr_{U,V})=l(g)=m$ и $l(cr_{U,V})=l(c)=n$, то $(gr_{U,V})^t \notin Cr_{U,V}$. Как и в разобранный выше случае, отсюда вытекает, что $gr_{U,V} \notin F_{U,V}$, и доказательство на этом закончено. ■

Приведем теперь обещанный

Пример 2.2.7. Пусть группа G задана представлением $G=\langle a, b; a^p=b^p \rangle$, где p — некоторое простое число. Ясно, что эта группа является свободным произведением бесконечных циклических групп $A=\langle a \rangle$ и $B=\langle b \rangle$ с циклическими подгруппами $H=A^p$ и $K=B^p$, объединенными относительно очевидного изоморфизма.

Поскольку свободное произведение с циклическим объединением двух конечных p -групп всегда аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ [18], из предложения 2.2.6 следует, что для любого p -числа n $(A^n, B^n) \in \Theta_p$. Поэтому каждая p' -изолированная подгруппа группы A принадлежит семейству $\Lambda_p(A)$ и каждая p' -изолированная подгруппа группы B принадлежит семейству $\Lambda_p(B)$. В частности, здесь оказываются выполненными условия (2.2.3) и (2.2.4) теоремы 2.2.2, из которой теперь вытекает, что произвольная p' -изолированная циклическая подгруппа группы G является $\mathcal{F}_p$ -отделимой в этой группе.

Положим $c=(ab)^q a^p$, где q — некоторое простое число, отличное от p , и покажем, что циклическая подгруппа $C=\langle c \rangle$ является p' -изолированной в группе G .

В самом деле, теорема 2.2.2 утверждает в частности, что группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Повторяя рассуждение из доказательства этой теоремы, мы видим, что p' -изолятор D подгруппы C в группе G является циклической группой.

Пусть d — некоторый порождающий подгруппы D , и пусть p' -число n таково, что $d^n=c$. Поскольку элемент c циклически несократим, элемент d также циклически несократим и, следовательно, имеет четную длину. При этом $nl(d)=2q$, откуда $l(d)=2$ или $l(d)=2q$. В первом случае из равенства $d^n=c$ легко следует, что $d=aba^{pk}$ для некоторого подходящего целого k . Но тогда $a^{pqk}=a^p$, что невозможно. Поэтому $l(d)=2q$ и $d=c$.

Таким образом, подгруппа C p' -изолирована в группе G и, стало быть, $\mathcal{F}_p$ -отделима в этой группе.

Покажем теперь, что при каждом гомоморфизме $\rho_{R,S}$ группы G на нетривиальное обобщенное свободное произведение образ подгруппы C не является p' -изолированной подгруппой группы $G_{R,S}$.

Действительно, для каждой пары подгрупп $(R, S) \in \Theta_p$, где $R \neq A$ и $S \neq B$, группа $G_{R,S}$ имеет представление

$$G_{R,S} = \langle a, b; a^n = b^n = 1, a^p = b^p \rangle$$

для подходящего p -числа n . Положим $g = aba^{px}$, где x удовлетворяет условию $qx \equiv 1 \pmod{n}$. Тогда элемент $gr_{R,S}$ имеет длину 2 и потому не принадлежит подгруппе $Cr_{R,S}$, порожденной элементом $cr_{R,S}$ длины $2q$. Однако, $(gr_{R,S})^q \in Cr_{R,S}$, и, таким образом, подгруппа $Cr_{R,S}$ не является p' -изолированной в группе $G_{R,S}$. ■

Теорема 2.2.2 обобщает результаты Г. Кима, полученные им в [21] для обобщенных свободных произведений двух π_c -групп. Кроме того, $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы G при выполнении условий (2.2.3) и (2.2.4) установлена в [6] для случая $\pi = \Pi$ и в [40] для случая $\pi = \{p\}$.

Соотношения (2.2.3) и (2.2.4) часто называют фильтрационным условием Г. Баумслага. Именно он в работе [6] впервые использовал класс обобщенных свободных произведений конечных групп при изучении свойства финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Позже эта методика была перенесена на HNN-расширения [5] и применена к исследованию аппроксимируемости свободных конструкций в других классах конечных групп [40], [48].

Стоит отметить, что почти все «аппроксимационные» результаты для свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой получены в предположении справедливости условий (2.2.3) и (2.2.4). При этом условие (2.2.3), как нетрудно проверить, является необходимым для $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости группы G . В некоторых случаях это верно и в отношении условия (2.2.4). Так, например, М. Ширвани [31] показал, что аппроксимируемость группы G классом $\mathcal{F}_\pi$ влечет за собой выполнение условия (2.2.4), если $\pi = \Pi$ и группы A, B удовлетворяют нетривиальному тождеству. Частный случай этого утверждения имеет место для произвольного множества π .

Предложение 2.2.8. Пусть A и B — нильпотентные группы. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то для нее справедливо условие (2.2.4).

Доказательство. Предположим, напротив, что условие (2.2.4) не выполняется.

Пусть для определенности $H_1 = \bigcap_{N \in \Theta_\pi(A)} HN \neq H$, и пусть $a \in H_1 \setminus H$, $b \in B \setminus K$. Пусть также степень нильпотентности группы B равна c и

$$g = [a, \underbrace{b, \dots, b}_c].$$

Непосредственная проверка показывает, что при любом c элемент g имеет несократимую запись неединичной длины и, следовательно, отличен от 1. С другой стороны, $H_1 \leq \mathcal{F}_\pi\text{-}Cl_G(H)$, поэтому при каждом гомоморфизме $\psi \in \Psi_\pi(G)$ имеет место соотношение $g\psi \in \gamma_{c+1}(B) = 1$. Тем самым, мы получаем противоречие с $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемостью группы G . ■

В общем случае, однако, условие (2.2.4) не является необходимым для

справедливости утверждения теоремы 2.2.2. Но прежде, чем привести соответствующий пример, докажем

Следствие 2.2.9. Пусть группа G представляет собой обычное свободное произведение $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемых групп A и B . Тогда произвольная π' -изолированная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Delta}_\pi(A) \cup \bar{\Delta}_\pi(B)$, является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G .

Доказательство. Из результатов работы Д. Н. Азарова и Д. Тьеджо [39] следует, что свободное произведение двух конечных π -групп всегда является $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группой. Поэтому семейства $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$ совпадают с семействами $\Omega_\pi(A)$ и $\Omega_\pi(B)$, соответственно, и условия (2.2.3) и (2.2.4) теоремы 2.2.2 равносильны $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости групп A и B . Кроме того, $\Lambda_\pi(A) = \Delta_\pi(A)$ и $\Lambda_\pi(B) = \Delta_\pi(B)$, так что искомое утверждение вытекает непосредственно из теоремы 2.2.2. ■

Пример 2.2.10. Пусть A — свободная группа с множеством свободных порождающих a, b , B — свободная группа с множеством свободных порождающих c, d , и пусть H — подгруппа группы A , порожденная элементами a и $a_1 = b^{-1}ab$, K — подгруппа группы B , порожденная элементами c и $c_1 = d^{-1}c^2d$. Очевидно, что указанные порождающие подгрупп H и K порождают эти подгруппы свободно, и потому отображение, переводящее a в c и a_1 в c_1 , определяет изоморфизм φ подгруппы H на подгруппу K .

Таким образом, группа

$$G = \langle a, b, c, d; a = c, b^{-1}ab = d^{-1}c^2d \rangle$$

является свободным произведением групп A и B с подгруппами H и K , объединенными относительно изоморфизма φ .

Докажем теперь три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Циклическая подгруппа группы G не принадлежит семейству $\Delta_\Pi(G)$ тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой, порожденной элементом вида a^{2^k} .

Доказательство. Полагая в представлении

$$G = \langle a, b, c, d; a = c, b^{-1}ab = d^{-1}c^2d \rangle$$

группы G $t = bd^{-1}$, с помощью очевидных преобразований Тие перейдем к представлению

$$G = \langle a, b, t; t^{-1}at = a^2 \rangle,$$

которое говорит о том, что группа G является обычным свободным произведением группы $C = \langle a, t; t^{-1}at = a^2 \rangle$ и бесконечной циклической группы D с порождающим b . Ввиду $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемости группы C (см. [7], [26]) и следствия 2.2.9 циклическая подгруппа группы G не принадлежит семейству $\Delta_\Pi(G)$ тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из $\bar{\Delta}_\Pi(C) \cup \bar{\Delta}_\Pi(D) = \bar{\Delta}_\Pi(C)$.

Как показано в § Д.1 (теорема Д.1.8), семейство $\bar{\Delta}_\Pi(C)$ состоит из под-

групп группы C , сопряженных с подгруппами, порождаемыми элементами вида a^k . Но элементы a и a^2 сопряжены в G , поэтому циклическая подгруппа группы G не является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой, порожденной элементом вида a^{2^k} . ■

Лемма 2. Если подгруппа M из семейства $\Omega_\Pi(A)$ (семейства $\Omega_\Pi(B)$) принадлежит семейству $\Theta_\Pi(A)$ (соответственно, семейству $\Theta_\Pi(B)$), то порядок элемента a (соответственно, элемента c) по модулю подгруппы M является нечетным числом.

Доказательство. Пусть подгруппы $M \in \Omega_\Pi(A)$ и $N \in \Omega_\Pi(B)$ (H, K, φ) -совместимы. Положим $H \cap M = U$ и $K \cap N = V$, так что $U\varphi = V$.

Очевидно, что порядки элементов a и a_1 по модулю подгруппы M должны совпадать, и так как фактор-группа H/U естественным образом вложима в фактор-группу A/M , порядки этих элементов по модулю подгруппы U совпадают.

Переходя к образам относительно φ , получаем совпадение порядков элементов c и c_1 группы K по модулю подгруппы V , а потому — и совпадение порядков этих элементов по модулю подгруппы N . Отсюда следует, что по модулю N элементы c и c^2 имеют один и тот же порядок, и, стало быть, порядок элемента c по модулю подгруппы N является нечетным числом.

Поскольку при изоморфизме подгруппы HM/M группы A/M на подгруппу KN/N группы B/N , индуцированном изоморфизмом φ , элементу aM соответствует элемент cN , порядок элемента a по модулю M также является нечетным числом. ■

Лемма 3. Если циклическая подгруппа группы G не является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой, то она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_\Pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\Pi(B)$.

Доказательство. В силу леммы 1, если циклическая подгруппа группы G не является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой, то она сопряжена с некоторой подгруппой F , порожденной элементом вида a^{2^k} . Покажем, что $F \notin \Lambda_\Pi(A)$.

В самом деле, пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Theta_\Pi(A)$. В силу леммы 2 порядок m элемента a по модулю подгруппы M является нечетным числом, и потому для некоторого целого числа l выполнено сравнение $2l \equiv 1 \pmod{m}$. Следовательно, $a \equiv a^{2l} \pmod{M}$ и $a^k \equiv (a^{2^k})^l \pmod{M}$, откуда $a^k \in FM$.

Но подгруппа $F = \langle a^{2^k} \rangle$ не содержит элемента a^k . Таким образом, она не является отделимой семейством $\Theta_\Pi(A)$. ■

Итак, произвольная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_\Pi(A) \cup \bar{\Lambda}_\Pi(B)$, является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой, т. е. для группы G имеет место утверждение теоремы 2.2.2. В то же время условие (2.2.4) этой теоремы не выполнено, поскольку элемент c в силу леммы 2 принадлежит пересечению

$$\bigcap_{N \in \Theta_\Pi(B)} KN,$$

но не принадлежит K . ■

В заключение отметим, что теорема 2.2.2 действительно дает описание семейства $\Delta_\pi(G)$ лишь в том случае, когда такое описание имеется для семейств $\Theta_\pi(A)$, $\Theta_\pi(B)$ и $\Lambda_\pi(A)$, $\Lambda_\pi(B)$. Тем не менее этот результат может оказаться полезным и тогда, когда установлены лишь некоторые свойства семейств $\Theta_\pi(A)$ и $\Theta_\pi(B)$, позволяющие проверить условия (2.2.3) и (2.2.4). В этом случае теорема 2.2.2 гарантирует $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость всех π' -изолированных циклических подгрупп группы G , порождаемых циклически несократимыми элементами неединичной длины.

§ 2.3. Достаточные условия максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$

Очевидно, что произвольная подгруппа из семейства $\bar{\Delta}_\pi(A) \cup \bar{\Delta}_\pi(B)$ не является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G . Нас теперь будут интересовать условия, при которых семейство $\Delta_\pi(G)$ является максимальным, т. е. содержит произвольную π' -изолированную циклическую подгруппу группы G , не сопряженную ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Delta}_\pi(A) \cup \bar{\Delta}_\pi(B)$. Каким образом это утверждение связано с $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемостью группы G , показывает

Предложение 2.3.1. *Максимальность семейства $\Delta_\pi(G)$ влечет за собой $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы G тогда и только тогда, когда группы A и B $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Для проверки достаточности следует фактически повторить одно рассуждение из доказательства теоремы 2.2.2.

Поскольку группы A и B $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы, единичная подгруппа принадлежит семействам $\Delta_\pi(A)$ и $\Delta_\pi(B)$. Кроме того, отсюда следует, что в группах A и B (а потому и в G) отсутствует π' -кручение. Это означает, что единичная подгруппа π' -изолирована в группе G и, стало быть, ввиду максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$ $\mathcal{F}_\pi$ -отделима. ■

Имеет место следующее общее достаточное условие максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$, обобщающее аналогичный результат Г. Кима [21] о финитной отделимости циклических подгрупп группы G .

Теорема 2.3.2. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы, и пусть группа G удовлетворяет следующим двум условиям:*

(2.3.3) *подгруппы H и K $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы в группах A и B , соответственно;*

(2.3.4) $\forall M \in \Omega_\pi(A) \forall N \in \Omega_\pi(B) \exists (R, S) \in \Theta_\pi (R \leq M \wedge S \leq N)$.

Тогда семейство $\Delta_\pi(G)$ является максимальным.

Доказательство. Очевидно, что всякая подгруппа F группы A или группы B , $\mathcal{F}_\pi$ -отделимая в A или в B , оказывается отделимой семействами $\Theta_\pi(A)$ или $\Theta_\pi(B)$, соответственно. Поэтому, в частности, $\Delta_\pi(A) = \Lambda_\pi(A)$, $\Delta_\pi(B) = \Lambda_\pi(B)$ и группа G удовлетворяет условию (2.2.4) теоремы 2.2.2. Кроме того, поскольку

группы A и B $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы, группа G удовлетворяет также условию (2.2.3) этой теоремы, что и дает требуемый результат. ■

Отметим, что если A и B — конечные π -группы, то условие (2.3.3) выполняется автоматически, а $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы G влечет за собой и справедливость условия (2.3.4).

Действительно, если группа G аппроксимируется классом $\mathcal{F}_\pi$, она обладает подгруппой $N \in \Omega_\pi(G)$, тривиально пересекающейся со свободными множителями. Отсюда $(1, 1) \in \Theta_\pi$, что делает утверждение (2.3.4) тривиальным.

Следующий пример показывает однако, что в общем случае условия (2.3.3) и (2.3.4) теоремы 2.3.2 не являются необходимыми.

Пример 2.3.5. Пусть C и D — некоторые группы, E — подгруппа группы C , F — подгруппа группы D . Пусть далее группа E_1 изоморфна подгруппе E и группа F_1 изоморфна подгруппе F . Обозначим через A (обычное) свободное произведение групп C и F_1 , через B — свободное произведение групп D и E_1 . Пусть также H обозначает свободное произведение E и F_1 , K — свободное произведение E_1 и F , так что $H \leq A$ и $K \leq B$.

Зафиксируем некоторые изоморфизмы α группы E_1 на E и β группы F_1 на F . Ввиду предложения 2.1.3 отображения α^{-1} и β продолжаемы до изоморфизма φ подгрупп H и K . Таким образом, мы можем построить группу

$$G = (A * B; H = K, \varphi).$$

Лемма 1. Если группы C и D $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемы, то семейство $\Delta_\pi(G)$ является максимальным.

Доказательство. Пусть

$$C = \langle c_1, c_2, \dots; u_1, u_2, \dots \rangle, D = \langle d_1, d_2, \dots; v_1, v_2, \dots \rangle, \\ E_1 = \langle e_1, e_2, \dots; w_1, w_2, \dots \rangle, F_1 = \langle f_1, f_2, \dots; t_1, t_2, \dots \rangle —$$

некоторые представления групп C, D, E_1 и F_1 . Тогда группа G имеет следующее представление:

$$G = \langle c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots, e_1, e_2, \dots, f_1, f_2, \dots; \\ u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, w_1, w_2, \dots, t_1, t_2, \dots, e_i = e_i \alpha, f_j = f_j \beta \rangle,$$

где $e_i \alpha$ — некоторое слово в символах $c_1, c_2, \dots$ и $f_j \beta$ — некоторое слово в символах $d_1, d_2, \dots$. Исключая символы $e_1, e_2, \dots, f_1, f_2, \dots$ из числа образующих группы G и учитывая, что при этом каждое слово w_i оказывается выводимым из соотношений $u_1, u_2, \dots$, а слово t_j — из соотношений $v_1, v_2, \dots$, мы приходим к представлению

$$G = \langle c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots; u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots \rangle,$$

из которого вытекает, что группа G является обычным свободным произведением групп C и D .

Следовательно, в силу следствия 2.2.9 π' -изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она

не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Delta}_\pi(C) \cup \bar{\Delta}_\pi(D)$. Но

$$\bar{\Delta}_\pi(C) \subseteq \bar{\Delta}_\pi(A) \text{ и } \bar{\Delta}_\pi(D) \subseteq \bar{\Delta}_\pi(B),$$

поэтому каждая π' -изолированная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Delta}_\pi(A) \cup \bar{\Delta}_\pi(B)$, является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в G . ■

Таким образом, для группы G всегда справедливо утверждение теоремы 2.3.2. Если, однако, подгруппы E и F не являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми в группах C и D , то $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгрупп H и K в группах A и B также не имеет места. Следовательно, условие (2.3.3) теоремы 2.3.2 не является необходимым.

Теперь мы хотим показать, что необходимым не будет и условие (2.3.4). В этом нам поможет

Лемма 2. *Если для группы G справедливо условие (2.3.4) и подгруппа E $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в группе C , то каждая подгруппа $U \in \Omega_\pi(E)$ также является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе C .*

Доказательство. Обозначим через U_1 образ подгруппы U относительно изоморфизма φ и положим $M=A$, $N=\ker \rho_{D,U_1}$, где ρ_{D,U_1} — гомоморфизм группы B . Группа B_{D,U_1} изоморфна конечной π -группе E_1/U_1 , поэтому $N \in \Omega_\pi(B)$ и в силу условия (2.3.4) существует пара подгрупп $(R, S) \in \Theta_\pi$ такая, что $R \leq M$ и $S \leq N$.

Пусть $V=R \cap C$. Тогда $V \in \Omega_\pi(C)$ и

$$V \cap E = (R \cap H) \cap E = ((S \cap K) \cap E_1) \varphi^{-1} \leq U_1 \varphi^{-1} = U.$$

Отсюда легко следует, что подгруппа U $\mathcal{F}_\pi$ -отделима в группе C .

В самом деле, пусть $c \in C$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе U . Если $c \notin E$, то ввиду $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости подгруппы E найдется подгруппа $L \in \Omega_\pi(C)$ такая, что $c \notin EL$ и, в частности, $c \notin UL$. Если же $c \in E$, то, как нетрудно убедиться, $c \notin UV$. ■

Таким образом, нам остается лишь привести пример группы C , обладающей такими подгруппами E и $U \in \Omega_\pi(E)$, что первая из них является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе C , а вторая — нет.

В § 1.4 части 1 был построен пример 1.4.3 расширения N конечной π -группы M при помощи $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группы, которое само уже не аппроксимируется классом $\mathcal{F}_\pi$. Обозначим через C свободную группу, имеющую базис той же мощности, что и система порождающих группы N , и через ψ — некоторый гомоморфизм группы C на N . Тогда, полагая U и E равными, соответственно, ядру гомоморфизма ψ и прообразу подгруппы M , мы получаем требуемый результат. ■

Еще один пример того, что $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость объединяемых подгрупп не следует из максимальности семейства $\Delta_\pi(G)$, но уже для случая циклического объединения, доставляет теорема 2.5.11 из § 2.5. Заметим также, что хотя условие (2.3.4) и не является необходимым для справедливости утверждения тео-

ремы 2.3.2, оно тем не менее не может быть отброшено. Об этом свидетельствует пример 2.2.10 из предыдущего параграфа.

Теорема 2.3.2, как и теорема 2.2.2, может быть использована лишь в том случае, когда известно внутреннее описание семейства Θ_π . Поскольку пара нормальных (H, K, φ) -совместимых подгрупп $R \leq A$ и $S \leq B$ принадлежит этому семейству тогда и только тогда, когда группа $G_{R,S}$ $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, наличие такого описания равносильно существованию критерия $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π -групп.

Хорошо известно [6], что свободное произведение с объединенной подгруппой двух конечных групп всегда является финитно аппроксимируемой группой. Поэтому имеет место

Предложение 2.3.6. *Если подгруппы $R \in \Omega_\pi(A)$ и $S \in \Omega_\pi(B)$ (H, K, φ) -совместимы, то существует такая подгруппа $N \in \Omega_\pi(G)$, что $R = N \cap A$ и $S = N \cap B$. ■*

Критерий $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p -групп был получен Г. Хигменом в работе [18]. Непосредственно из формулировки этого результата вытекает

Предложение 2.3.7. *Пара подгрупп (R, S) принадлежит семейству Θ_p тогда и только тогда, когда существуют последовательности подгрупп $R = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_m = A$, $S = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n = B$ такие, что:*

- 1) $R_i \in \Omega_p(A)$, $S_j \in \Omega_p(B)$ ($0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$);
- 2) $|R_{i+1}/R_i| = |S_{j+1}/S_j| = p$ ($0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$);
- 3) *изоморфизм φ отображает множество $\{R_i \cap H\}$ на множество $\{S_j \cap K\}$. ■*

Приведенное утверждение получено Е. Д. Логиновой в [40]. Следуя этой работе, подгруппы R и S , удовлетворяющие условиям предложения 2.3.7, мы будем называть (H, K, φ, p) -совместимыми.

В упомянутой статье Хигмена отмечено, что если A и B — конечные p -группы, а объединяемые подгруппы H и K являются циклическими или лежат в центрах свободных множителей, то $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость группы G всегда имеет место. Тем самым мы получаем

Предложение 2.3.8. *Если подгруппы H и K являются циклическими или лежат в центрах свободных множителей A и B , то любые две (H, K, φ) -совместимые подгруппы $R \in \Omega_p(A)$ и $S \in \Omega_p(B)$ принадлежат семейству Θ_p . ■*

Приведенные утверждения показывают что для использования теорем 2.2.2 и 2.3.2 мы должны обладать достаточно большим запасом пар (H, K, φ) -или (H, K, φ, p) -совместимых подгрупп. Этого можно добиться, накладывая на группы A и B различные условия регулярности по подгруппам H и K , к определению которых мы сейчас и переходим.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, Y — подгруппа группы X . Будем говорить, что:

- 1) *группа X $\mathcal{K}$ -регулярна по подгруппе Y , если для всякой подгруппы $M \in \Omega_{\mathcal{K}}(Y)$*

- найдется подгруппа $N \in \Omega_K(X)$ такая, что $N \cap Y = M$;
- 2) группа X слабо K -регулярна по подгруппе Y , если существует такая подгруппа $Q \in \Omega_K(Y)$, что для всякой подгруппы $M \in \Omega_K(Y)$, лежащей в Q , существует подгруппа $N \in \Omega_K(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y = M$;
- 3) группа X K -квазирегулярна по подгруппе Y , если для всякой подгруппы $M \in \Omega_K(Y)$ найдется подгруппа $N \in \Omega_K(X)$ такая, что $N \cap Y \leq M$.

Скажем несколько слов о терминологии.

Понятие регулярности употребляется в литературе только применительно к бесконечным циклическим подгруппам или парам таких подгрупп и только в случае $K = \mathcal{F}_\Pi$. Впервые оно появилось в работе Б. Эванса [11] для обозначения свойства, которое мы называли слабой $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярностью.

Г. Нибло [29] перенес это понятие на пары подгрупп для изучения аппроксимационных свойств HNN-расширений групп. Он назвал группу X регулярной по паре $\{h, k\}$ элементов бесконечного порядка, если существует такое натуральное ε , что для всякого натурального λ найдется подгруппа $N_\lambda \in \Omega_\Pi(X)$, удовлетворяющая условиям $N_\lambda \cap \langle h \rangle = \langle h^{\varepsilon\lambda} \rangle$ и $N_\lambda \cap \langle k \rangle = \langle k^{\varepsilon\lambda} \rangle$.

Понятие квазирегулярности было введено Г. Кимом и С. Тангом [24] также для пар бесконечных циклических подгрупп. Их определение выглядит следующим образом: группа X квазирегулярна по паре $\{h, k\}$ элементов бесконечного порядка, если для каждого натурального ε можно указать натуральное число λ и подгруппу $N_\lambda \in \Omega_\Pi(X)$, удовлетворяющие условиям $N_\lambda \cap \langle h \rangle = \langle h^{\varepsilon\lambda} \rangle$ и $N_\lambda \cap \langle k \rangle = \langle k^{\varepsilon\lambda} \rangle$.

Отметим, что группу, являющуюся (слабо) $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по бесконечной циклической подгруппе Y называют также (слабо) Y -мощной. Эти термины были предложены С. Тангом [33].

Ясно, что из трех введенных нами условий самым сильным является K -регулярность. Легко видеть также, что если класс K замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, то слабая K -регулярность влечет K -квазирегулярность.

Далее нас будет интересовать лишь случай, когда $K = \mathcal{F}_\pi$.

Очевидно, что если группа A является $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по подгруппе H , то ввиду предложения 2.3.6 семейство $\Theta_\Pi(B)$ совпадает с семейством $\Omega_\Pi(B)$. Отсюда следует, что отделимость в группе B семейством $\Theta_\Pi(B)$ равносильна обычной финитной отделимости и, в частности, $\Lambda_\Pi(B) = \Delta_\Pi(B)$.

Точно так же из предложения 2.3.8 следует, что если подгруппы H и K являются циклическими или лежат в центрах свободных множителей, то $\mathcal{F}_p$ -регулярность группы A по подгруппе H влечет за собой максимальность семейства $\Theta_p(B)$, а потому и равенство $\Lambda_p(B) = \Delta_p(B)$. Сейчас мы покажем, что это утверждение остается верным и при снятии ограничений с подгрупп H и K .

Напомним, что нормальный ряд группы называется *главным*, если все его факторы являются простыми группами.

Хорошо известно, что каждая конечная p -группа обладает нетривиаль-

ным центром и потому содержит нормальную циклическую подгруппу порядка p . Применяя очевидную индукцию по порядку группы, мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.3.9. *Каждая конечная p -группа обладает главным рядом. Нормальный ряд конечной p -группы является главным тогда и только тогда, когда его факторы представляют собой циклические группы порядка p . ■*

Столь же очевидно

Предложение 2.3.10. *Произвольный нормальный ряд в конечной p -группе может быть уплотнен до главного. ■*

Предложение 2.3.11. *Пусть $H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$ — последовательность подгрупп из семейства $\Omega_p(H)$, порядки факторов которой являются делителями числа p . Если для каждого i , $0 \leq i \leq n$, существуют подгруппы $C_i \in \Omega_p(A)$ и $D_i \in \Omega_p(B)$ такие, что $(C_i \cap H)\varphi = H_i\varphi = D_i \cap K$, то подгруппы*

$$C = \bigcap_{i=0}^n C_i \text{ и } D = \bigcap_{i=0}^n D_i$$

(H, K, φ, p) -совместимы.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $C_n = A$ и $D_n = B$. Положим для каждого $j = 0, \dots, n$

$$R_j = \bigcap_{i=j}^n C_i \text{ и } S_j = \bigcap_{i=j}^n D_i$$

В результате мы получим возрастающие последовательности нормальных подгрупп конечного p -индекса $C = R_0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_n = A$ и $D = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_n = B$, удовлетворяющие соотношениям $(R_j \cap H)\varphi = H_j\varphi = S_j \cap K$ для любого $j = 0, \dots, n$. В силу предложения 2.3.10 эти последовательности можно уплотнить таким образом, чтобы порядки их факторов были делителями числа p .

Поскольку $|H_{j+1}/H_j| \in \{1, p\}$, для всякой подгруппы U такой, что $R_j \leq U \leq R_{j+1}$, пересечение $U \cap H$ должно совпадать либо с подгруппой H_j , либо с подгруппой H_{j+1} . Точно так же, если $S_j \leq V \leq S_{j+1}$, то $V \cap K = K_j$ или $V \cap K = K_{j+1}$. Следовательно, полученные последовательности подгрупп удовлетворяют всем условиям предложения 2.3.7, и подгруппы C и D являются (H, K, φ, p) -совместимыми. ■

Предложение 2.3.12. *Если группа A является $\mathcal{F}_p$ -регулярной по подгруппе H , то семейство $\Theta_p(B)$ совпадает с семейством $\Omega_p(B)$.*

Доказательство. Пусть D — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(B)$, и пусть $D = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq D_n = B$ — прообразы членов некоторого главного ряда фактор-группы B/D относительно естественного гомоморфизма группы B на B/D . Пользуясь $\mathcal{F}_p$ -регулярностью группы A по подгруппе H , мы для каждого i , $0 \leq i \leq n$, можем отыскать подгруппу $C_i \in \Omega_p(A)$ такую, что $(C_i \cap H)\varphi = D_i \cap K$. Из предыдущего предложения теперь следует, что подгруппы

$$C = \bigcap_{i=0}^n C_i \text{ и } D = \bigcap_{i=0}^n D_i$$

являются (H, K, φ, p) -совместимыми. Таким образом, $D \in \Theta_p(B)$. ■

Установим, наконец, связь между понятиями отделимости и регулярности.

Предложение 2.3.13. Пусть X — некоторая группа, Y — ее $\mathcal{F}_\pi$ -отделимая подгруппа. Группа X $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярна по подгруппе Y тогда и только тогда, когда все подгруппы из семейства $\Omega_\pi(Y)$ являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми в группе X .

Доказательство. Необходимость. Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_\pi(Y)$, элемент $x \in X$ не принадлежит M . Если $x \notin Y$, то ввиду $\mathcal{F}_\pi$ -отделимости подгруппы Y найдется подгруппа $N \in \Omega_\pi(X)$ такая, что $x \notin YN$.

Пусть теперь $x \in Y$. Поскольку группа X $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярна по подгруппе Y , существует подгруппа $N \in \Omega_\pi(X)$, удовлетворяющая соотношению $N \cap Y \leq M$. Легко видеть, что в этом случае $MN \cap Y = M$, поэтому $x \notin MN$.

Достаточность. Пусть снова M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_\pi(Y)$, и пусть $1 = y_1, \dots, y_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов Y по M . Используя $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость подгруппы M в группе X , найдем подгруппу $N \in \Omega_\pi(X)$ такую, что $y_2, \dots, y_n \notin MN$.

Если мы предположим теперь, что пересечение $N \cap Y$ не содержится в M и выберем некоторый элемент $g \in (N \cap Y)M$, то, записывая его в виде $g = hy_i$ для подходящих i и $h \in M$, получим $hy_i \in N$ и $y_i \in MN$, что противоречит выбору подгруппы N . Таким образом, $N \cap Y \leq M$. ■

Далее в этом параграфе мы покажем, каким образом, накладывая на группы G , A и B различные условия регулярности, можно обеспечить выполнение условия (2.3.4) из теоремы 2.3.2.

Предложение 2.3.14. Пусть $\pi = \Pi$ или $\pi = \{p\}$. Если группа G является $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярной по подгруппе H , то для нее справедливо условие (2.3.4).

Доказательство. Пусть $M \in \Omega_\pi(A)$ и $N \in \Omega_\pi(B)$ — произвольные подгруппы, $Q = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1}$ и $L \in \Omega_\pi(G)$ — такая подгруппа, что $L \cap H \leq Q$ (ее существование обеспечивается $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярностью G по H). Положим $C = L \cap A$, $D = L \cap B$, $R = C \cap M$ и $S = D \cap N$.

Поскольку $R \cap H = (L \cap M) \cap H = L \cap H$ и $S \cap K = (L \cap N) \cap K = L \cap K$, подгруппы R и S являются (H, K, φ) -совместимыми, что доказывает наше утверждение в случае, когда $\pi = \Pi$.

Далее будем считать, что $\pi = \{p\}$. Так как $(C, D) \in \Theta_\pi$, существуют последовательности нормальных подгрупп конечного p -индекса $C = C_0 \leq C_1 \leq \dots \leq C_n = A$ и $D = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq D_n = B$, удовлетворяющие условиям предложения 2.3.7. Поскольку $R \cap H = C \cap H$ и $S \cap K = D \cap K$, из предложения 2.3.11 следует, что подгруппы

$$R = R \cap C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_n \text{ и } S = S \cap D_0 \cap D_1 \cap \dots \cap D_n$$

также являются (H, K, ϕ, p) -совместимыми. ■

Требуя, чтобы группы A и B удовлетворяли некоторым дополнительным условиям, можно добиться справедливости утверждения, обратного предложению 2.3.14, причем уже без ограничений на множество π .

Предложение 2.3.15. *Если группа A $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярна по подгруппе H или группа B $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярна по подгруппе K , то из условия (2.3.4) следует, что группа G является $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярной по подгруппе H .*

Доказательство. Пусть для определенности группа A $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярна по подгруппе H , Q — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_\pi(H)$, и пусть подгруппа $M \in \Omega_\pi(A)$ такова, что $M \cap H \leq Q$. Положим $N = B$ и, пользуясь условием (2.3.4), найдем такие подгруппы R и S , что $(R, S) \in \Theta_\pi$, $R \leq M$ и $S \leq N$. По определению семейства Θ_π подгруппы R и S представляют собой пересечения со свободными множителями A и B некоторой подгруппы $L \in \Omega_\pi(G)$. Так как $L \cap H = R \cap H \leq M \cap H \leq Q$, подгруппа L является искомой. ■

Приведем теперь два достаточных условия $\mathcal{F}_\pi$ -квазирегулярности группы G по подгруппе H .

Предложение 2.3.16. *Если группа A слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярна по подгруппе H и группа B $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярна по подгруппе K , то группа G является $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярной по подгруппе H .*

Доказательство. Пусть U — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_\Pi(H)$. Пусть также $V \in \Omega_\Pi(H)$ — подгруппа, удовлетворяющая условию:

$$\forall M \in \Omega_\Pi(H) (M \leq V \Rightarrow \exists N \in \Omega_\Pi(A) N \cap H = M).$$

Положим $Q = U \cap V$.

Пользуясь $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярностью группы B по подгруппе K , выберем подгруппу $S \in \Omega_\Pi(B)$ таким образом, чтобы $S \cap K \leq Q\phi$. Из свойства слабой $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярности группы A по подгруппе H теперь вытекает существование подгруппы $R \in \Omega_\Pi(A)$, (H, K, ϕ) -совместимой с S . Обозначая через L нормальную подгруппу конечного индекса группы G , пересечения которой со свободными множителями A и B совпадают с подгруппами R и S , соответственно, мы получаем, что $L \cap H \leq Q \leq U$. Таким образом, подгруппа L — искомая. ■

Предложение 2.3.17. *Если группа A $\mathcal{F}_p$ -регулярна по подгруппе H и группа B $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярна по подгруппе K , то группа G является $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярной по подгруппе H .*

Доказательство. Пусть Q — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$. Выберем в группе B такую подгруппу $S \in \Omega_p(B)$, что $S \cap K \leq Q\phi$. В силу предложения 2.3.12 подгруппа S принадлежит семейству $\Theta_p(B)$, поэтому существует нормальная подгруппа L группы G конечного p -индекса, удовлетворяющая условию $L \cap B = S$. Но тогда $L \cap H \leq Q$, что и требовалось. ■

Теперь мы обладаем достаточным количеством вспомогательных утвер-

ждений и можем перейти к описанию семейства $\Delta_\pi(G)$ в ряде конкретных ситуаций. Традиционно аппроксимационные свойства группы G изучаются при тех или иных ограничениях, накладываемых на объединяемые подгруппы. Наилучших результатов в этом направлении удалось добиться с использованием условий конечности, цикличности и нормальности, а также центральности, как частного случая последнего.

Мы также будем придерживаться этой схемы. При этом оказывается, что утверждения, касающиеся свободных произведений с конечной или нормальной объединенной подгруппой, являются следствиями одних и тех же более общих результатов. Таким образом, мы будем изучать три случая: когда объединяемая подгруппа а) является циклической, б) лежит в центре хотя бы одного из свободных множителей, в) «почти» нормальна в группе G , т. е. содержит подгруппу конечного индекса, нормальную в G .

Соображения технического характера, изложенные в начале этого параграфа, вынуждают нас ограничиться рассмотрением, главным образом, двух возможностей: $\pi = \Pi$ и $\pi = \{p\}$. Первая из них изучается в § 2.4, вторая — в §§ 2.5 и 2.6. При этом некоторые результаты последних двух параграфов удастся распространить на случай произвольного множества простых чисел π .

§ 2.4. $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных разрешимых групп

Прежде всего следует отметить, что в литературе рассматривался частный случай нашей задачи, заключающийся в определении условий, при которых все циклические подгруппы группы G оказываются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми. Основные результаты в этом направлении были получены (в хронологическом порядке) Р. Б. Д. Т. Олленби и Р. С. Грегораком [3], Б. Эвансом [11] и Г. Кимом [21]. Для удобства цитирования сформулируем некоторые из них в виде предложения.

Предложение 2.4.1. *Обобщенное свободное произведение G является π_c -группой, если:*

- 1) A и B — π_c -группы, H и K — конечные подгруппы [3];
- 2) A и B представляют собой конечные расширения полициклических или свободных групп, H и K — циклические подгруппы [3], [11];
- 3) A и B представляют собой конечные расширения полициклических групп, подгруппы H и K нормальны в свободных множителях [3].

Первым мы будем рассматривать случай, когда объединяемая подгруппа является циклической.

Оказывается, что свободное произведение с циклическим объединением двух π_c -групп уже не обязано быть π_c -группой [2]. Таким образом, здесь не представляется возможным получить результаты, столь же общие, как и для конечной объединяемой подгруппы. Что касается известных утверждений (в

том числе и сформулированных в предложении 2.4.1), то все они доказаны с использованием аналогов предложения 2.3.16. Явным образом этот подход впервые был обозначен Б. Эвансом в [11].

В настоящей работе также не предлагается ничего принципиально нового. Теорема 2.4.4, приводимая ниже, позволяет лишь слегка обобщить результаты из предложения 2.4.1 2).

Предложение 2.4.2. *Конечное расширение $\mathcal{S}$ -группы слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярно по любой циклической подгруппе.*

Доказательство. Пусть группа A есть конечное расширение ограниченной разрешимой группы C , H — циклическая подгруппа группы A , порожденная элементом h . Если подгруппа H конечна, утверждение очевидно, поэтому далее будем считать H бесконечной.

Пусть $1 = C^{(n)} \leq \dots \leq C' \leq C$ — ряд коммутантов группы C , и пусть i — максимальное число, такое что $H \cap C^{(i)} \neq 1$. Положим m равным порядку элемента h по модулю $C^{(i)}$ и покажем что для всякого натурального числа v найдется подгруппа $R \in \Omega_\Pi(A)$ такая, что $R \cap H = H^{mv}$.

Не ограничивая общности рассуждений (переходя, если необходимо, к фактор-группе $(A/C^{(i+1)})/\tau(C^{(i)}/C^{(i+1)})$), мы можем считать, что $i = n - 1$ и подгруппа $C^{(i)}$ не имеет кручения.

В силу предложения 1.1.6 $C^{(n-1)}$ является $\mathcal{A}$ -группой, поэтому уравнение $x^v = c^v$, где $c = h^m$, разрешимо в ней относительно x лишь для конечного множества v -чисел u . Пусть w — максимальное такое v -число. Тогда, в частности, $c^v \in (C^{(n-1)})^w$.

Предположим теперь, что порядок элемента c по модулю подгруппы $(C^{(n-1)})^w$ отличен от v , т. е. существует такое число v' , что $c^{v'} \in (C^{(n-1)})^w$ и $0 < v' < v$. В этом случае $c^{v'} = d^w$ для некоторого элемента $d \in C^{(n-1)}$. С другой стороны, можно считать, что $v' | v$. Поэтому $v = v'l$ для некоторого натурального числа l и $d^{wl} = c^v$, что противоречит максимальной w .

Таким образом, порядок элемента c по модулю подгруппы $D = (C^{(n-1)})^w$ равен v и порядок элемента h по модулю этой подгруппы равен mv . При этом подгруппа D является характеристической в C и, следовательно, нормальной в A .

Ввиду следствия 1.3.7 группа A имеет $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимые подгруппы, поэтому фактор-группа A/D $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема и, стало быть, обладает нормальной подгруппой R/D конечного индекса, не содержащей элементов $hD, \dots, h^{mv-1}D$. Тогда $h, \dots, h^{mv-1} \notin R$ и $h^{mv} \in R$, так что подгруппа R является искомой. ■

Предложение 2.4.3. *Конечное расширение $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемой группы слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярно по любой циклической подгруппе.*

Доказательство. Пусть снова группа A есть конечное расширение $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемой группы C , H — циклическая подгруппа группы A , порожденная элементом h . Положим q равным порядку элемента h по модулю C .

Воспользуемся $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемостью группы C и выберем в ней

подгруппу $N \in \Omega_{\mathcal{S}_0}(C)$ такую, что $h^q \notin N$. Поскольку фактор-группа C/N без кручения, пересечение $N \cap H$ тривиально.

Пусть теперь $a_1, \dots, a_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы A по подгруппе C . Так как ограничение на C внутреннего автоморфизма, производимого элементом a_i , представляет собой некоторый автоморфизм группы C , подгруппа $N_i = a_i^{-1} N a_i$ принадлежит семейству $\Omega_{\mathcal{S}_0}(C)$. Положим

$$M = \bigcap_{i=1}^n N_i.$$

Поскольку класс $\mathcal{S}_0$ замкнут относительно взятия подгрупп и конечных прямых произведений, подгруппа M в силу предложения 1.2.1 снова принадлежит семейству $\Omega_{\mathcal{S}_0}(C)$ и при этом нормальна в A . Таким образом, мы получаем гомоморфизм группы A на конечное расширение $\mathcal{S}_0$ -группы, инъективный на подгруппе H .

В соответствии с предложением 2.4.2 фактор-группа A/M является слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по подгруппе HM/M . Легко видеть также, что если в группе A/M нормальная подгруппа R/M конечного индекса пересекается с циклической подгруппой HM/M по подгруппе $(HM/M)^{mv}$, то в группе A имеет место соотношение $R \cap H = H^{mv}$. Отсюда следует, что группа A является слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по подгруппе H . ■

Теорема 2.4.4. Пусть группы A и B представляют собой конечные расширения $\mathcal{S}$ -групп или $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемых групп, подгруппы H и K являются циклическими. Тогда G — π_c -группа.

Доказательство. Из предложения 2.3.16 с учетом доказанных выше утверждений следует, что группа G является $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярной по подгруппе H . Поэтому в соответствии с предложением 2.3.14 для нее справедливо условие (2.3.4) теоремы 2.3.2. Кроме того, A и B ввиду следствия 1.3.7 являются π_c -группами. Таким образом, искомое утверждение вытекает из теоремы 2.3.2. ■

Отметим, что новым в теореме 2.4.4 является лишь факт $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимости всех циклических подгрупп группы G . $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемость этой группы была установлена ранее Д. Н. Азаровым в [35] и [37].

Теперь перейдем к случаю, когда объединяемая подгруппа лежит в центре хотя бы одного свободного множителя. Здесь предложение 2.3.16 позволяет доказать более общее утверждение.

Теорема 2.4.5. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемы, подгруппы из семейства $\Omega_\Pi(H)$ являются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми в группе A и подгруппы из семейства $\Omega_\Pi(K)$ являются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми в группе B . Если существует подгруппа $Q \in \Omega_\Pi(H)$ такая, что $Q \leq Z(A)$ или $Q \leq Z(B)$, то семейство $\Delta_\Pi(G)$ является максимальным.

Доказательство. Пусть для определенности $Q \leq Z(A)$, покажем, что груп-

па A является слабо $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по подгруппе H .

В самом деле, пусть подгруппа $M \in \Omega_\Pi(H)$ лежит в Q и, следовательно, центральна в A . По условию она $\mathcal{F}_\Pi$ -отделима в группе A , поэтому фактор-группа A/M $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема. Отсюда вытекает, в частности, существование подгруппы $N/M \in \Omega_\Pi(A/M)$, тривиально пересекающейся с конечной подгруппой H/M . Очевидно, что тогда $N \cap H = M$.

Заметим еще, что ввиду предложения 2.3.13 группа B является $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярной по подгруппе K . Доказательство теперь завершается так же, как и в теореме 2.4.4: искомое утверждение следует из теоремы 2.3.2. ■

В случае, когда объединяемые подгруппы «почти» нормальны в свободных множителях, $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярность группы G по подгруппе H приходится проверять непосредственно. Однако это не мешает и здесь получить достаточно общее утверждение.

Теорема 2.4.6. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемы, подгруппы из семейства $\Omega_\Pi(H)$ являются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми в группе A и подгруппы из семейства $\Omega_\Pi(K)$ являются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми в группе B . Если каждая подгруппа $M \in \Omega_\Pi(H)$ содержит подгруппу $L \in \Omega_\Pi(H)$, нормальную в G , то семейство $\Delta_\Pi(G)$ является максимальным.*

Доказательство. Ввиду предложения 2.3.14 и теоремы 2.3.2 нам достаточно показать, что группа G является $\mathcal{F}_\Pi$ -квазирегулярной по подгруппе H .

Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_\Pi(H)$. По условию подгруппа M содержит подгруппу $L \in \Omega_\Pi(H)$, нормальную в G . Фактор-группа G/L , будучи свободным произведением с конечным объединением, $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема [6]. Следовательно, существует подгруппа $N/L \in \Omega_\Pi(G/L)$, тривиально пересекающаяся с конечной подгруппой H/L . Но тогда $N \cap H = L \leq M$, что и требовалось. ■

Приведем теперь несколько конкретных приложений теорем 2.4.5 и 2.4.6.

Если подгруппы H и K конечны, то, используя любое из этих утверждений, мы получаем следующее обобщение предложения 2.4.1 1).

Следствие 2.4.7. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемы, подгруппы H и K конечны. Тогда семейство $\Delta_\Pi(G)$ является максимальным.* ■

Следствие 2.4.8. *Пусть группы A и B представляют собой конечные расширения $\mathcal{S}$ -групп или $\mathcal{S}_0$ -аппроксимируемых групп. Пусть также подгруппы H и K принадлежат классу $\mathcal{S}$ при условии, что какой-либо из множителей A, B не является почти $\mathcal{S}$ -группой. Если хотя бы одна из объединяемых подгрупп лежит в центре соответствующего свободного множителя или обе они нормальны в группах A и B , то G — π_c -группа.*

Доказательство. Ввиду следствия 1.3.7 все подгруппы из семейств $\Omega_\Pi(H)$ и $\Omega_\Pi(K)$ оказываются $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимыми в группах A и B . Поэтому, если $H \leq \mathcal{Z}(A)$ или $K \leq \mathcal{Z}(B)$, то искомое утверждение следует из теоремы 2.4.5.

Заметим далее, что если подгруппы H и K нормальны в свободных множителях и M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_{\Pi}(H)$ индекса n , то подгруппа $L=H^n$ в силу предложения 1.1.5 имеет конечный индекс в H , является нормальной в G и лежит в M . Таким образом, в этом случае оказываются выполненными все условия теоремы 2.4.6. ■

Следствие 2.4.9. Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}_{\Pi}$ -аппроксимлируемые группы, и пусть существуют подгруппы $R \in \Omega_{\Pi}(A)$ и $S \in \Omega_{\Pi}(B)$ такие, что $R \leq H$, $S \leq K$ и $R\varphi = S$. Тогда семейство $\Delta_{\Pi}(G)$ является максимальным.

Доказательство. Группы A и B конечно порождены, следовательно, конечно порожденными являются и все подгруппы из семейств $\Omega_{\Pi}(H)$ и $\Omega_{\Pi}(K)$.

Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_{\Pi}(H)$ и $n=[R:R \cap M]$. Хорошо известно, что в конечно порожденной группе имеется лишь конечное число подгрупп данного конечного индекса n [17]. Поэтому пересечение L всех подгрупп индекса n группы R снова имеет конечный индекс в R . При этом подгруппа L является характеристической в R и, следовательно, нормальной в группе G . Так как $L \leq M$, отсюда вытекает также, что подгруппа M $\mathcal{F}_{\Pi}$ -отделима в группе A .

Для подгрупп из семейства $\Omega_{\Pi}(K)$ справедливы аналогичные рассуждения, таким образом, утверждение следствия получается из теоремы 2.4.6. ■

§ 2.5. $\mathcal{F}_{\pi}$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных нильпотентных групп с циклическим объединением

Как уже было отмечено, свойство $\mathcal{F}_{\pi}$ -отделимости для множества π , отличного от Π , в литературе фактически не рассматривалось. Аппроксимлируемость групп классом $\mathcal{F}_{\pi}$ также изучена значительно менее финитной. Автору известно лишь три результата достаточно общего характера, полученных в этом направлении для обобщенных свободных произведений двух групп. Первый из них — это уже упоминавшийся критерий Г. Хигмена $\mathcal{F}_p$ -аппроксимлируемости свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных групп. Два других принадлежат Д. Н. Азарову и выглядят следующим образом.

Предложение 2.5.1. 1) Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные $\mathcal{F}_{\pi}$ -аппроксимлируемые группы, H и K — бесконечные циклические подгруппы. Группа G $\mathcal{F}_{\pi}$ -аппроксимлируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K являются π' -изолированными в свободных множителях A и B [38].

2) Пусть A и B — свободные группы, H и K — циклические подгруппы. Группа G $\mathcal{F}_{\pi}$ -аппроксимлируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K π' -изолированы в группах A и B , либо хотя бы одна из этих подгрупп является изолированной в соответствующем свободном множителе [36].

Отметим, что частный случай приведенного утверждения для одноэлементного множества π доказан также Г. Кимом и С. Тангом в [23].

В данном параграфе мы получим некоторое обобщение результатов из предложения 2.5.1, но сначала докажем несколько утверждений об $\mathcal{F}_p$ -отделимости циклических подгрупп в группе G .

Техника доказательства аппроксимационных свойств группы G в случае $\pi = \{p\}$, вообще говоря, сложнее, нежели в случае $\pi = \Pi$. В этом уже можно было убедиться на примере § 2.3. Поэтому, как правило, мы можем лишь надеяться получить p -аналоги отдельных результатов об отделимости подгрупп и аппроксимируемости группы G в классе $\mathcal{F}_\Pi$. Однако, в случае циклической объединяемой подгруппы ситуация складывается прямо противоположная.

Если свободное произведение двух π_c -групп с циклическим объединением может, вообще говоря, не быть π_c -группой, то свободное произведение двух $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемых групп с $\mathcal{F}_p$ -отделимыми циклическими объединяемыми подгруппами всегда является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группой [22] и обладает максимальным семейством $\mathcal{F}_p$ -отделимых циклических подгрупп. В действительности, имеет место еще более сильное утверждение, к доказательству которого мы сейчас и переходим.

Предложение 2.5.2. *Произвольная $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа $\mathcal{F}_p$ -регулярна по любой локально циклической подгруппе.*

Доказательство. Пусть A — $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа и H — ее локально циклическая подгруппа. Заметим прежде всего, что произвольная подгруппа M из семейства $\Omega_\Pi(H)$ совпадает с подгруппой H^m , где $m = [H : M]$.

В самом деле, $H^m \leq M$. С другой стороны, фактор-группа H/H^m является циклической, и порядки всех ее элементов делят m . Поэтому индекс подгруппы H^m в H также делит m и, следовательно, $H^m = M$.

Пусть теперь M — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$ и h — порождающий подгруппы H по модулю M . Пользуясь $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемостью группы A , выберем подгруппу $N \in \Omega_p(A)$ таким образом, чтобы $h^t \notin N$ для любого ненулевого натурального t , меньшего индекса m подгруппы M в группе H . Так как все элементы h^t , $0 < t < m$, лежат в различных смежных классах по модулю подгруппы N , индекс n пересечения $N \cap H$ в группе H не меньше m . Поскольку m и n являются к тому же p -числами, отсюда следует, что m делит n и $N \cap H \leq M$.

Пусть $N = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_l = A$ — прообразы членов некоторого главного ряда фактор-группы A/N относительно естественного гомоморфизма на эту группу. Тогда индексы в H подгрупп из последовательности

$$N \cap H = N_0 \cap H \leq N_1 \cap H \leq \dots \leq N_l \cap H = H$$

заполняют все множество положительных p -чисел, не превосходящих n , и, так как группа H обладает единственной подгруппой индекса m , то найдется такое k , что $N_k \cap H = M$. ■

Из доказанного с учетом предложения 2.3.12 следует, что если подгруп-

пы H и K являются локально циклическими и группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, то справедливы равенства $\Theta_p(A) = \Omega_p(A)$ и $\Theta_p(B) = \Omega_p(B)$, откуда $\Lambda_p(A) = \Delta_p(A)$ и $\Lambda_p(B) = \Delta_p(B)$.

Теорема 2.5.3. Пусть A и B — $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемые группы, H и K — локально циклические подгруппы, $\mathcal{F}_p$ -отделимые в свободных множителях A и B . Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Доказательство. Ввиду предложений 2.5.2 и 2.3.17 группа G является $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярной по подгруппе H , поэтому в силу предложения 2.3.14 для нее имеет место условие (2.3.4) теоремы 2.3.2. Из данной теоремы и вытекает требуемый результат. ■

В этом и следующем параграфах мы получим целый ряд достаточных условий максимальности семейства $\Delta_p(G)$ в случае, когда объединяемые подгруппы являются конечными. Первым из них является

Следствие 2.5.4. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, H и K — конечные циклические подгруппы. Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным. ■

Напомним, что в силу следствия 1.5.6 все π' -изолированные $\mathcal{S}$ -подгруппы расширения $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемой группы при помощи конечной π -группы являются $\mathcal{F}_\pi$ -отделимыми. Это замечание позволяет привести

Следствие 2.5.5. Пусть группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп при помощи конечных p -групп, H и K являются локально циклическими $\mathcal{S}$ -подгруппами, p' -изолированными в свободных множителях A и B . Тогда в группе G все p' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_p$ -отделимы. ■

Аналогичное утверждение можно было бы сформулировать и для случая, когда группы A и B являются расширениями $\mathcal{N}_p$ -групп при помощи конечных p -групп. Однако, оно вытекает из приведенного.

Действительно, пусть группа A представляет собой расширение $\mathcal{N}_p$ -группы C при помощи конечной p -группы. Выберем подгруппу $M \in \Omega_p(C)$ таким образом, чтобы пересечение $M \cap \tau(C)$ было тривиально, и положим

$$L = \bigcap_{a \in A} a^{-1}Ma.$$

Тогда подгруппа L принадлежит семейству $\Omega_p(A)$ и не имеет кручения. Таким образом, группа A оказывается расширением $\mathcal{N}_0$ -группы при помощи конечной p -группы. Такое же рассуждение справедливо и для группы B .

Перейдем теперь к обобщению результатов из предложения 2.5.1. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, важную роль здесь будет играть

Предложение 2.5.6. $\mathcal{N}$ -группы и $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемые группы являются $\mathcal{F}_p$ -регулярными по любой локально циклической подгруппе для каждого простого числа p .

Доказательство. Для $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп утверждение вытекает из предложения 2.5.2, поскольку все они $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы для любого простого p .

Пусть A — ограниченная нильпотентная группа, H — ее локально циклическая подгруппа и M — некоторая подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$. Так как фактор-группа A/T , где $T = \tau_p(A)$, $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то снова в силу предложения 2.5.2 существует подгруппа $N/T \in \Omega_p(A/T)$ такая, что $N/T \cap HT/T = MT/T$. Покажем, что тогда $N \cap H = M$.

Поскольку $MT \leq N$, имеет место включение $M \subseteq N \cap H$.

Обратно, пусть g — произвольный элемент из $N \cap H$. Тогда он принадлежит подгруппе MT и, следовательно, может быть записан в виде $g = ht$ для подходящих элементов $h \in M$, $t \in T$. Но подгруппа M лежит в H и имеет p -индекс в этой подгруппе, поэтому $t \in H \cap T = \tau_p(H) \leq M$. Таким образом, $g \in M$. ■

Предложение 2.5.7. Пусть π — некоторое множество простых чисел, X — нильпотентная или $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая для каждого числа $p \in \pi$ группа, Y — π' -изолированная нильпотентная подгруппа группы X . Тогда для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ можно указать такое число $p \in \pi$, что x не принадлежит p' -изолятору подгруппы Y в группе X .

Доказательство. В самом деле, если порядок элемента x по модулю подгруппы Y конечен и равен n , выберем в качестве p некоторый простой делитель числа n . Ввиду π' -изолированности подгруппы Y n является π -числом, поэтому $p \in \pi$. При этом элемент x не принадлежит множеству p' -корней из подгруппы Y , которое в силу предложений 1.4.5 и 1.5.1 совпадает с p' -изолятором подгруппы Y в группе X .

Если же порядок x по модулю Y бесконечен, то $x \notin p'\text{-}\mathfrak{I}_X(Y)$ для любого числа $p \in \pi$. ■

Следующее утверждение представляет собой обобщение результата Д. Н. Азарова, сформулированного в предложении 2.5.1 1).

Теорема 2.5.8. Пусть A и B — $\mathcal{N}_\pi$ -группы или $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемые группы, H и K — локально циклические $\mathcal{N}$ -подгруппы, π' -изолированные в A и в B , соответственно (условие $H, K \in \mathcal{N}$ выполняется автоматически, если хотя бы один из свободных множителей является $\mathcal{N}_\pi$ -группой). Тогда в группе G все π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.

Доказательство. Нам достаточно показать, что произвольная π' -изолированная локально циклическая $\mathcal{N}$ -подгруппа группы A (группы B) отделима семейством $\Theta_\pi(A)$ (соответственно, семейством $\Theta_\pi(B)$). Поскольку единичная подгруппа группы G ввиду $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости групп A и B является π' -изолированной, в этом случае будут выполнены условия (2.2.3) и (2.2.4) теоремы 2.2.2. Так как, к тому же, семейства $\bar{\Lambda}_\pi(A)$ и $\bar{\Lambda}_\pi(B)$ оказываются пустыми, из утверждения этой теоремы мы и получим требуемый результат.

Итак, пусть C — некоторая π' -изолированная локально циклическая

$\mathcal{N}$ -подгруппа группы A , $a \in A$ — произвольный элемент, не принадлежащий C . Тогда в соответствии с предложением 2.5.7 a не принадлежит p' -изолятору подгруппы C в группе A для подходящего простого числа $p \in \pi$.

Заметим теперь, что каким бы ни было выбранное число p , подгруппа $p'\text{-}\mathfrak{I}_A(C)$ в силу теорем 1.4.6 и 1.5.5 является $\mathcal{F}_p$ -отделимой в группе A и, следовательно, найдется подгруппа $R \in \Omega_p(A)$ такая, что $a \notin p'\text{-}\mathfrak{I}_A(C)R$.

Так как по предложению 2.5.6 группа B является $\mathcal{F}_p$ -регулярной по подгруппе K , то в соответствии с предложением 2.3.12 семейство $\Theta_p(A)$ совпадает с семейством $\Omega_p(A)$. Таким образом, $a \notin CR$ и $R \in \Theta_p(A) \subseteq \Theta_\pi(A)$, что и требовалось.

Рассуждения для группы B аналогичны. ■

Напомним, что в соответствии с предложением 2.2.8 $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость объединяемых подгрупп является необходимым условием $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости группы G в случае, когда A и B — нильпотентные группы. Из этого замечания вытекает

Следствие 2.5.9. Пусть A и B — ограниченные нильпотентные группы, подгруппы H и K являются локально циклическими. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то все ее π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы. ■

Однако в общем случае, как показывает предложение 2.5.1 2), $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы G уже не влечет за собой π' -изолированность объединяемых подгрупп. Поэтому мы не можем пока утверждать, что аналог следствия 2.5.9 имеет место для свободных групп A и B . Заполнить возникший пробел позволяют две теоремы, приводимые ниже.

Теорема 2.5.10. Пусть H и K — бесконечные циклические подгруппы и их централизаторы в группах A и B , соответственно, не содержат элементов конечного порядка. Если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Доказательство. Как было отмечено выше, ввиду цикличности объединяемой подгруппы и $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости группы G имеют место равенства $\Theta_p(A) = \Omega_p(A)$, $\Theta_p(B) = \Omega_p(B)$, $\Lambda_p(A) = \Delta_p(A)$ и $\Lambda_p(B) = \Delta_p(B)$. К тому же из аппроксимируемости группы G следует, что для нее выполнено условие (2.2.3) теоремы 2.2.2:

$$\bigcap_{N \in \Theta_p(A)} N = \bigcap_{M \in \Theta_p(B)} M = 1.$$

Если условие (2.2.4) этой теоремы:

$$\bigcap_{N \in \Omega_p(A)} HN = \bigcap_{N \in \Theta_p(A)} HN = H, \quad \bigcap_{M \in \Omega_p(B)} KM = \bigcap_{M \in \Theta_p(B)} KM = K$$

также оказывается верным, то произвольная p' -изолированная циклическая подгруппа группы G , не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\bar{\Lambda}_p(A) \cup \bar{\Lambda}_p(B)$, является $\mathcal{F}_p$ -отделимой. Но в данном случае

$$\bar{\Lambda}_p(A) \cup \bar{\Lambda}_p(B) = \bar{\Delta}_p(A) \cup \bar{\Delta}_p(B),$$

таким образом, мы получаем искомое утверждение.

Далее будем считать, что условие (2.2.4) теоремы 2.2.2 не выполняется.

Пусть для определенности

$$H_1 = \mathcal{F}_p\text{-}Cl_A(H) = \bigcap_{N \in \Omega_p(A)} HN \neq H.$$

В силу предложения 1.2.4 имеет место включение $H_1 \leq \mathcal{C}_A(C)$, поэтому подгруппа H_1 не содержит элементов конечного порядка, и мы находимся в условиях предложения 2.1.9 из § 2.1.

Предположим теперь, что циклическая подгруппа $C = \langle c \rangle$ является p' -изолированной, но не $\mathcal{F}_p$ -отделимой в группе G . Пусть также $g \in \mathcal{F}_p\text{-}Cl_G(C) \setminus C$.

Из предложения 1.2.4 следует, что $g \in \mathcal{C}_G(C)$, поэтому элементы c и g порождают в G абелеву подгруппу. В силу предложения 2.1.9 эта подгруппа либо сопряжена с некоторой подгруппой одного из свободных множителей A и B , либо является циклической. В первом случае мы получаем, что подгруппа C сопряжена с некоторой подгруппой из семейства

$$\bar{\Lambda}_p(A) \cup \bar{\Lambda}_p(B) = \bar{\Delta}_p(A) \cup \bar{\Delta}_p(B).$$

Покажем, что второй случай невозможен.

В самом деле, пусть $\langle c, g \rangle = \langle w \rangle$ и $c = w^s$ и $g = w^t$ для подходящих целых чисел s и t . Так как подгруппа C p' -изолирована в G , то s является p -числом и в силу предложения 2.5.2 найдется подгруппа $N \in \Omega_p(G)$ такая, что $N \cap \langle w \rangle = C$. Поскольку элемент g не принадлежит C , его образ в фактор-группе G/N отличен от единицы. Но тогда $gN \notin C/N$, и мы получаем противоречие с выбором элемента g . ■

Теорема 2.5.11. Пусть A и B — свободные группы, H и K — циклические подгруппы. Если в точности одна из подгрупп H и K является изолированной в соответствующем свободном множителе, то для любого непустого множества простых чисел π все π' -изолированные циклические подгруппы группы G $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.

Доказательство. В силу предложения 2.5.1 2) группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема для любого простого числа p , поэтому мы можем применить к ней теорему 2.5.10. Из этой теоремы следует, что для каждого простого числа p все p' -изолированные циклические подгруппы группы G $\mathcal{F}_p$ -отделимы.

Та из объединяемых подгрупп, которая не является изолированной в соответствующем свободном множителе, не будет и $\mathcal{F}_p$ -отделимой в этом сомножителе по крайней мере для одного простого числа p . Поэтому мы снова оказываемся в условиях предложения 2.1.9, из которого вытекает, что произвольная абелева подгруппа группы G является циклической.

Пусть теперь π — некоторое множество простых чисел, C — π' -изолированная циклическая подгруппа группы G и $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий C . Из предложения 2.5.7 следует, что тогда $g \notin p'\text{-}\mathcal{I}_G(C)$ для подходящего простого числа $p \in \pi$.

В силу отмеченного выше и предложения 1.5.2 подгруппа $C_1 = p' \cdot \mathcal{I}_G(C)$ является циклической. Поэтому она $\mathcal{F}_p$ -отделима в группе G и существует подгруппа $N \in \Omega_p(G)$ такая, что $g \notin C_1 N$. В результате мы получаем, что $g \notin CN$ и $N \in \Omega_p(G) \subseteq \Omega_\pi(G)$. Таким образом, подгруппа C является $\mathcal{F}_\pi$ -отделимой в группе G . ■

Теперь, пользуясь теоремами 2.5.8 и 2.5.11 и предложением 2.5.1 2), мы можем привести утверждение, аналогичное следствию 2.5.9.

Следствие 2.5.12. *Пусть A и B — свободные группы, подгруппы H и K являются циклическими. Если группа G $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то все ее π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы. ■*

Из теоремы 2.5.11 видно, что если π отлично от множества всех простых чисел Π , то ни $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость объединяемых подгрупп, ни даже их π' -изолированность не являются необходимыми условиями того, чтобы в группе G все π' -изолированные циклические подгруппы были $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы. Таким образом, мы получаем еще один пример того, что условия теорем 2.2.2 и 2.3.2, вообще говоря, не являются необходимыми.

§ 2.6. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях ограниченных нильпотентных групп с нормальным объединением

Следующей нашей целью является получение аналогов теорем 2.4.5 и 2.4.6 из § 2.4 в случае $\pi = \{p\}$. Для теоремы 2.4.5 это удастся сделать без особых затруднений, хотя и ценой незначительного усиления посылки.

Теорема 2.6.1. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, и пусть все подгруппы из семейств $\Omega_p(H)$ и $\Omega_p(K)$ $\mathcal{F}_p$ -отделимы в группах A и B , соответственно. Если $H \leq \mathcal{Z}(A)$ или $K \leq \mathcal{Z}(B)$, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2.4.5. Если, скажем, $H \leq \mathcal{Z}(A)$, то группа A является $\mathcal{F}_p$ -регулярной по подгруппе H . Так как к тому же группа B $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярна по подгруппе K , то ввиду предложения 2.3.17 группа G оказывается $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярной по H . Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 2.3.2. ■

Попытаемся теперь получить p -аналог теоремы 2.4.6. Ситуация здесь оказывается сложнее, поскольку при доказательстве этой теоремы использовалось утверждение о том, что свободное произведение $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемых групп с конечным объединением всегда является $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемой группой. Для класса $\mathcal{F}_p$ при любом выборе числа p это не так: даже свободное произведение двух конечных p -групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группой (см. пример далее). Поэтому все приво-

димые ниже результаты будут сводить задачу к вопросу о том, является ли $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемым то или иное свободное произведение с конечной объединяемой подгруппой.

Пример 2.6.2. Пусть p — некоторое простое число и

$$H = \prod_{i=1}^p \langle h_i; h_i^p = 1 \rangle.$$

Пусть также α и β — автоморфизмы группы H , определенные следующим образом: $h_i\alpha = h_{i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$, $h_p\alpha = h_1$, $h_1\beta = h_1h_2$, $h_i\beta = h_i$, $2 \leq i \leq p$. Обозначим через A и B подгруппы $\langle \alpha \rangle H$ и $\langle \beta \rangle H$ голоморфа группы H и через G свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H (изоморфизм φ здесь оказывается тождественным отображением).

Предположим, что группа G является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой и, следовательно, существует гомоморфизм ψ этой группы на конечную p -группу, инъективный на множестве $A \cup B$.

Так как подгруппа $H\psi$ нормальна в группе $G\psi$, то через нее проходит некоторый главный ряд этой группы. Отсюда вытекает, что подгруппа $H\psi$ должна содержать нормальную и, следовательно, центральную в группе $G\psi$ циклическую подгруппу порядка p .

Непосредственная проверка показывает, что центр группы $A\psi$, изоморфной A , совпадает с подгруппой, порожденной элементом $(h_1h_2 \dots h_p)\psi$. Но в группе $B\psi$ эта подгруппа не является центральной, и, стало быть, мы получаем противоречие.

Таким образом, группа G не является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой. ■

Для удобства обозначим через $\Sigma_p(H)$ семейство всех таких подгрупп из $\Omega_p(H)$, которые нормальны в группах A и B (а, следовательно, и в группе G).

Теорема 2.6.3. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы и все подгруппы из семейств $\Omega_p(H)$ и $\Omega_p(K)$ являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми в этих группах. Пусть также каждая подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$. Если существует такая подгруппа $Q \in \Sigma_p(H)$, что для любой подгруппы $L \in \Sigma_p(H)$ фактор-группа $G/Q^p Q' L$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Доказательство. Если X — некоторая группа и Y — нормальная подгруппа группы X , то ограничение на подгруппу Y произвольного внутреннего автоморфизма группы X представляет собой некоторый автоморфизм группы Y . Подгруппу группы $\text{Aut}(Y)$, составленную из всех таких автоморфизмов, мы будем обозначать $\text{Aut}_X(Y)$.

Легко видеть, что отображение $\alpha_Y: X \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ автоморфизм группы Y , индуцированный внутренним автоморфизмом $\hat{x}$ группы X , гомоморфно. Ядро этого гомоморфизма совпадает с централизатором $C_X(Y)$ подгруппы Y в группе X . Поэтому, если группа X

$\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то в силу предложения 1.2.4 группа $\text{Aut}_X(Y)$ также является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой.

Таким образом, если группа G аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$, то для любой подгруппы $Q \in \Sigma_p(H)$ группа $\text{Aut}_G(Q)$ является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой. Г. Хигмен в работе [18] показал, что наоборот, если A и B — конечные p -группы, подгруппы H и K нормальны в свободных множителях A , B и $\text{Aut}_G(H)$ является p -группой, то группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Обобщением этого результата является

Лемма 1. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы и все подгруппы из семейств $\Omega_p(H)$ и $\Omega_p(K)$ $\mathcal{F}_p$ -отделимы в этих группах. Если семейство $\Sigma_p(H)$ содержит такую подгруппу Q , что фактор-группа G/Q $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема и $\text{Aut}_G(Q)$ является конечной p -группой, то семейство $\Delta_p(G)$ максимально.

Доказательство. Ввиду предложения 2.3.14 нам достаточно показать, что группа G $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярна по подгруппе H .

Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $M \leq Q$.

Обозначим через U подгруппу $\text{Aut}_G(Q)Q$ голоморфа группы Q . Так как $\text{Aut}_G(Q)$ — конечная группа, то подгруппа

$$L = \bigcap_{u \in U} u^{-1}Mu$$

снова имеет конечный p -индекс в Q и при этом нормальна в U .

Пусть $L = L_0 \leq L_1 \leq \dots \leq L_k = Q \leq L_{k+1} \leq \dots \leq L_m = U$ — прообразы членов некоторого главного ряда фактор-группы U/L (конечной p -группы), проходящего через подгруппу Q/L . Если g — произвольный элемент группы G и σ — ограничение на подгруппу Q производимого им внутреннего автоморфизма группы G , то согласно определению группы U $g^{-1}L_i g = L_i^\sigma = \sigma^{-1}L_i \sigma = L_i$ для всех i , не превосходящих k . Таким образом, подгруппы $L = L_0, L_1, \dots, L_k$ являются нормальными в группе G . Поскольку все они к тому же $\mathcal{F}_p$ -отделимы в группах A и B , найдутся подгруппы $C_i \in \Omega_p(A)$ и $D_i \in \Omega_p(B)$ такие, что $(C_i \cap H)\varphi = L_i \varphi = D_i \cap K$, $0 \leq i \leq k$.

По условию фактор-группа G/Q $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, поэтому существует подгруппа $F/Q \in \Omega_p(G/Q)$, тривиально пересекающаяся с конечной подгруппой H/Q . Пусть $F = F_0 \leq F_1 \leq \dots \leq F_n = G$ — прообразы членов некоторого главного ряда фактор-группы G/F . Обозначим через C_{k+j} и D_{k+j} , $1 \leq j \leq n$, пересечения подгрупп F_j со свободными множителями A и B . Из предложения 2.3.11 теперь следует, что пара подгрупп

$$C = \bigcap_{i=0}^{k+n} C_i \text{ и } D = \bigcap_{i=0}^{k+n} D_i$$

принадлежит семейству Θ_p , т. е. существует подгруппа $N \in \Omega_p(G)$ такая, что $N \cap A = C$ и $N \cap B = D$. Тогда $N \cap H = L \leq M$, что и требовалось. ■

Используя приведенное доказательство, нетрудно показать, что если

группа G удовлетворяет условию леммы 1, то каждая подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит такую подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$, что фактор-группа G/L $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Поэтому условие данной леммы сильнее условия рассматриваемой теоремы, и, таким образом, выделять ее в качестве самостоятельного утверждения не следует.

Если X — некоторая группа, Y — ее характеристическая подгруппа, то произвольный автоморфизм группы X индуцирует некоторый автоморфизм группы Y . Легко видеть, что отображение $\beta_Y: \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y)$, переводящее элемент $\sigma \in \text{Aut}(X)$ в его ограничение на подгруппу Y , гомоморфно. В работе А. В. Якушева [50] доказана

Лемма 2. Пусть X — конечная p -группа, $\sigma \in \text{Aut}(X)$. Порядок автоморфизма σ является p -числом тогда и только тогда, когда p -числом является порядок индуцированного им автоморфизма фактор-группы X/X^p . ■

Непосредственная проверка показывает, что справедлива также

Лемма 3. Пусть Y — нормальная подгруппа группы X , Z — характеристическая подгруппа группы Y , $\alpha_Y: X \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$ и $\alpha_{Y/Z}: X/Z \rightarrow \text{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$ — определенные выше гомоморфизмы, ε — естественный гомоморфизм группы X на фактор-группу X/Z , $\beta_Z: \text{Aut}(Y) \rightarrow \text{Aut}(Y/Z)$ — гомоморфизм индуцирования. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_Y} & \text{Aut}_X(Y) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \beta_Z \\ X/Z & \xrightarrow{\alpha_{Y/Z}} & \text{Aut}(Y/Z) \end{array}$$

В частности, образ группы $\text{Aut}_X(Y)$ относительно гомоморфизма β_Z совпадает с подгруппой $\text{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$. ■

Перейдем теперь собственно к доказательству теоремы. Как обычно, нам достаточно будет установить, что группа G является $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярной по подгруппе H .

Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$.

По условию подгруппа $M \cap Q$ содержит некоторую подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$ и фактор-группы $G/Q^p Q' Q = G/Q$ и $G/Q^p Q' L$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы. Мы хотим показать, что $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой является и фактор-группа $G_1 = G/L$.

Ввиду леммы 1 нам достаточно убедиться в том, что (конечная) группа $\text{Aut}_{G_1}(Q_1)$, где $Q_1 = Q/L$, является p -группой. Лемма 2 утверждает, что это верно тогда и только тогда, когда p -группой является ее образ относительно гомоморфизма индуцирования β_T , где $T = Q_1^p Q'_1 = Q^p Q' L/L$. Но в соответствии с леммой 3 этот образ совпадает с группой $\text{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$.

Фактор-группа G_1/T изоморфна группе $G_2 = G/Q^p Q' L$, и этот изоморфизм индуцирует изоморфизм групп $\text{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$ и $\text{Aut}_{G_2}(Q_2)$, где $Q_2 = Q/Q^p Q' L$.

Так как G_2 — $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа, то $\text{Aut}_{G_2}(Q_2)$ является p -группой.

Таким образом, группа G/L $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема и потому существует подгруппа $N/L \in \Omega_p(G/L)$ такая, что $N/L \cap H/L = 1$. Отсюда $N \cap H = L \leq M$, и доказательство на этом закончено. ■

Отметим, что если подгруппа $T = Q^p Q'$ имеет конечный индекс в Q , то из $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости фактор-группы G/T следует и $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость группы G/TL для любой подгруппы $L \in \Sigma_p(H)$, так как она получается из G/T факторизацией по конечной и, следовательно, $\mathcal{F}_p$ -отделимой подгруппе LT/T . Тем самым, вопрос об $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости группы G в данном случае сводится к проверке того, является ли $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемым некоторое свободное произведение с нормальной элементарной абелевой объединенной подгруппой.

Приведем теперь ряд следствий теорем 2.6.1 и 2.6.3.

Следствие 2.6.4. Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, подгруппы H и K конечны.

- 1) Если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.
- 2) Если $H \leq Z(A)$ или $K \leq Z(B)$, то группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.
- 3) Если подгруппы H и K нормальны в свободных множителях A и B , то группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой является фактор-группа $G/H^p H'$.

Доказательство. Первое утверждение получается из теоремы 2.6.3, если положить $Q=1$. Второе непосредственно следует из теоремы 2.6.1. Для доказательства третьего заметим, что если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то этим свойством будет обладать и ее фактор-группа по конечной подгруппе $H^p H'$. Обратное утверждение вытекает из рассуждения, предваряющего это следствие. ■

Следствие 2.6.5. Пусть группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}_0$ -аппроксимируемых групп при помощи конечных p -групп, H и K являются p' -изолированными $\mathcal{S}$ -подгруппами. Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $H \leq Z(A)$ или $K \leq Z(B)$;
- 2) подгруппы H и K нормальны в свободных множителях и фактор-группа $G/H^p H'$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема.

Тогда в группе G все p' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_p$ -отделимы.

Доказательство. Напомним, что в $\mathcal{S}$ -группе степенная подгруппа согласно предложению 1.1.5 всегда имеет конечный индекс. Поэтому $H^p H' \in \Sigma_p(H)$, и если M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$ индекса n , то подгруппа $L = H^n$ принадлежит семейству $\Sigma_p(H)$ и лежит в H . Таким образом, второе утверждение вытекает из теоремы 2.6.3, следствия 1.5.6 и замечания, предшествовавшего следствию 2.6.4.

Первое утверждение следует из теоремы 2.6.1. ■

Следствие 2.6.6. Пусть A и B — конечно порожденные $\mathcal{F}_p$ -аппроксимруемые группы, и пусть существуют подгруппы $R \in \Omega_p(A)$ и $S \in \Omega_p(B)$ такие, что $R \leq H$, $S \leq K$ и $R\phi = S$. Если фактор-группа $G/R^p R'$ $\mathcal{F}_p$ -аппроксимруема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Доказательство этого утверждения такое же, как и следствия 2.4.9 из § 2.4, необходимо лишь отметить, что группа R/R' конечно порождена, поэтому подгруппа $R^p R'$ имеет конечный индекс в H . ■

В предыдущем параграфе нам удалось распространить результаты, полученные для обобщенных свободных произведений $\mathcal{N}$ -групп и $\mathcal{N}_0$ -аппроксимруемых групп, на случай произвольного множества π . Соответствующий аналог следствия 2.6.5 также может быть получен, но в несколько ослабленном варианте.

Теорема 2.6.7. Пусть A и B — $\mathcal{N}_\pi$ -группы или $\mathcal{N}_0$ -аппроксимруемые группы, H и K — π' -изолированные $\mathcal{N}$ -подгруппы. Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $H \leq Z(A)$ или $K \leq Z(B)$;
- 2) H и K — нормальные подгруппы свободных множителей A и B , и подгруппа H/H' группы G/H' является локально циклической или лежит в центре хотя бы одной из фактор-групп A/H' , B/H' .

Тогда в группе G все π' -изолированные циклические подгруппы $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.

Доказательство следует той же схеме, которая была использована при доказательстве теоремы 2.5.8 из предыдущего параграфа, причем вначале рассуждение придется повторить почти дословно. Нам достаточно показать, что произвольная π' -изолированная $\mathcal{N}$ -подгруппа группы A (группы B) отделима семейством $\Theta_\pi(A)$ (соответственно, семейством $\Theta_\pi(B)$). Тогда искомое утверждение будет следовать из теоремы 2.2.2.

Пусть C — некоторая π' -изолированная $\mathcal{N}$ -подгруппа группы A , $a \in A$ — произвольный элемент, не принадлежащий C . По предложению 2.5.7 $a \notin p' \cdot \mathcal{I}_A(C)$ для подходящего простого числа $p \in \pi$. Подгруппа $C_1 = p' \cdot \mathcal{I}_A(C)$ в силу теорем 1.4.6 и 1.5.5 является $\mathcal{F}_p$ -отделимой в группе A , поэтому существует подгруппа $M \in \Omega_p(A)$ такая, что $a \notin C_1 M$.

Предположим теперь, что группа G $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярна по подгруппе H . Предложение 2.3.14 утверждает, что тогда для нее справедливо условие (2.3.4) теоремы 2.3.2. Следовательно, найдется пара подгрупп $(R, S) \in \Theta_p$, удовлетворяющая условию $R \leq M$ (в качестве N берем всю группу B). В результате мы получаем, что $R \in \Theta_p(A) \subseteq \Theta_\pi(A)$ и $a \notin CR \leq C_1 M$.

Рассуждения для группы B аналогичны.

Таким образом, нам осталось показать, что группа G является $\mathcal{F}_p$ -квазирегулярной по подгруппе H для любого простого числа p .

Пусть сначала имеет место условие 1), и пусть для определенности $H \leq Z(A)$. Пусть также M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$, $V =$

$p'\text{-}\mathcal{I}_B(M\phi)$ и $1=h_1, h_2, \dots, h_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов H по M .

Так как подгруппа M p' -изолирована в H , то $V \cap K = M\phi$. Воспользуемся $\mathcal{F}_p$ -отделимостью подгруппы V в группе B и выберем подгруппу $S \in \Omega_p(B)$ таким образом, чтобы $h_i\phi \notin VS$ для всех $i \geq 2$. Тогда, как легко видеть, $S \cap K \leq M\phi$.

Обозначим подгруппу $(S \cap K)\phi^{-1}$ через Q и положим $U = p'\text{-}\mathcal{I}_A(Q)$.

Если $u \in U, x \in A$ — произвольные элементы и число q таково, что $u^q \in Q$, то поскольку подгруппа Q нормальна в A , $(x^{-1}ux)^q = x^{-1}u^qx \in Q$ и $x^{-1}ux \in U$. Таким образом, U — нормальная подгруппа группы A , и мы можем рассмотреть фактор-группу A/U .

Ввиду $\mathcal{F}_p$ -отделимости подгруппы U группа A/U $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, поэтому найдется подгруппа $R/U \in \Omega_p(A/U)$, удовлетворяющая условию $R/U \cap HU/U = 1$. Тогда

$$U \cap H \leq R \cap H \leq (R \cap HU) \cap H = U \cap H.$$

Но подгруппа Q p' -изолирована в H . Следовательно, пересечение $U \cap H$ совпадает с Q и $R \cap H = Q = (S \cap K)\phi^{-1}$.

Рассмотрим группу

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \phi_{R,S}).$$

Она представляет собой свободное произведение конечных p -групп с объединяемой подгруппой, лежащей в центре свободного множителя A/R , и в силу следствия 2.6.4 является $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группой. Поэтому $(R, S) \in \Theta_p$, т. е. подгруппы R и S представляют собой пересечения со свободными множителями некоторой подгруппы $N \in \Omega_p(G)$. Поскольку $N \cap H = Q \leq M$, подгруппа N является искомой и доказательство в этом случае закончено.

Пусть теперь выполнено условие 2), и пусть снова M — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$.

Положим $Q = H^n$, где $n = [H : M]$. Тогда подгруппа Q является характеристической в H и, следовательно, нормальной в G . К тому же ввиду предложения 1.1.5 она имеет конечный p -индекс в H и лежит в M .

Из приведенных выше рассуждений следует, что подгруппы $U = p'\text{-}\mathcal{I}_A(Q)$ и $V = p'\text{-}\mathcal{I}_B(Q\phi)$ нормальны в свободных множителях и $U \cap H = Q = (V \cap K)\phi^{-1}$. Стало быть, мы можем построить группу

$$G_{U,V} = (A/U * B/V; HU/U = KV/V, \phi_{U,V}).$$

Введем для удобства следующие обозначения: $G_1 = G_{U,V}$, $A_1 = A/U$, $B_1 = B/V$, $H_1 = HU/U$, $K_1 = KV/V$.

Так как подгруппы U и V $\mathcal{F}_p$ -отделимы в свободных множителях A и B , то группы A_1 и B_1 $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы. Поэтому $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемость группы G_1 равносильна, ввиду следствия 2.6.4, $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости фактор-группы $G_1/H_1^p H_1'$. Покажем, что последнее имеет место.

Если подгруппа H/H' лежит в центре, скажем, группы A/H' , то взаимный коммутант $[A, H]$ подгрупп A и H лежит в H' . Отсюда

$$[A_1, H_1] \leq H'_1 \text{ и } H_1/H'_1 \leq Z(A_1/H'_1).$$

Если же группа H/H' является локально циклической, таковой будет и группа

$$H_1/H'_1 = (HU/U)/(H'U/U) \cong H/H'(H \cap U).$$

Таким образом, фактор-группа $G_1/H_1^p H'_1$ представляет собой свободное произведение $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемых групп с конечной объединяемой подгруппой, которая либо является циклической, либо лежит в центре одного из свободных множителей. В силу следствий 2.5.4 и 2.6.4 эта группа аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$.

Итак, G_1 оказывается $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой группой, следовательно, найдется подгруппа N_1 , тривиально пересекающаяся с подгруппой H_1 . Выбирая подгруппу N равной прообразу N_1 относительно гомоморфизма $\rho_{U, \nu}$, мы получаем, что $N \in \Omega_p(G)$ и

$$N \cap H \leq (N \cap HU) \cap H = U \cap H = Q \leq M.$$

Таким образом, подгруппа N — искомая. ■

ДОПОЛНЕНИЕ. ОТДЕЛИМОСТЬ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГРУПП

§ Д.1. Описание $\mathcal{F}_\pi$ -отделимых подгрупп группы G_k

В этом дополнении мы покажем, каким образом отдельные предшествующие результаты могут быть применены к некоторым группам с одним определяющим соотношением и их обобщенным свободным произведениям. Речь идет о группах следующего вида:

$$G_k = \langle a, c; c^{-1}ac = a^k \rangle, |k| > 1,$$

которые принадлежат хорошо известному классу групп Баумслага-Солитера [7], задаваемых представлениями

$$G_{k,l} = \langle a, c; c^{-1}a^l c = a^k \rangle,$$

где без потери общности можно считать, что $|k| \geq l > 0$.

$\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемость группы G_k при любом k была установлена в работах [7] и [26]. Д. И. Молдаванский [48] показал, что группа G_k аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ тогда и только тогда, когда p делит число $k-1$. Мы дополним эти результаты описанием подгрупп группы G_k , отделимых в классах $\mathcal{F}_\Pi$ и $\mathcal{F}_p$, а в следующем параграфе получим необходимые и достаточные условия максимальности семейств $\Delta_\Pi(G)$ и $\Delta_p(G)$ для обобщенного свободного произведения G двух групп указанного вида.

Для начала приведем ряд утверждений, касающихся строения группы G_k . Обозначим через L нормальное замыкание в этой группе элемента a .

Используя теорему Шрайера (см. [43, теорема 2.9]), нетрудно показать, что подгруппа L порождается элементами $a_i = c^{-i}ac^i$ и обладает следующим представлением:

$$\langle a_i; a_i^k = a_{i+1} \ (i \in \mathbb{Z}) \rangle,$$

т. е. изоморфна группе k -ичных дробей. Отсюда следует, что группа G_k не имеет кручения и произвольный ее элемент может быть записан в виде $c^m a_i^n$ для подходящих целых чисел m, n, i . Очевидно, число m здесь определено однозначно.

Непосредственная проверка показывает справедливость равенства

$$(c^m a_i^n)^l = c^{ml} a_i^{nS(k^m, l)},$$

где $S(x, y) = 1 + x + \dots + x^{y-1}$, для любых $m, l \in \mathbb{N}, n, i \in \mathbb{Z}$.

Заметим далее, что если $n=uv$, где u — k -число и $(v, k)=1$, то для некоторого $r>0$ $u|k^r$ и потому $a_{i+r}^v \in \langle a_i^n \rangle$ для каждого целого i . Таким образом, подгруппа L^v содержится в L^n и, следовательно, $L^n = L^v$.

Предложение Д.1.1. *Произвольная нециклическая конечно порожденная подгруппа группы G_k порождается элементами вида $c^u a^w$ и a^v , где $u, v > 0$, $(k, v)=1$.*

Доказательство. Пусть H — нециклическая конечно порожденная подгруппа группы G_k с порождающими $h_1, h_2, \dots, h_n$. Поскольку фактор-группа G/L является циклической, мы можем считать, что лишь один из этих элементов, скажем h_1 , не принадлежит подгруппе L . В этом случае подгруппа $\langle h_2, \dots, h_n \rangle$ оказывается циклической, и, таким образом, подгруппа H порождается элементами вида $c^u a_i^w$ и a_j^v , где без потери общности $u > 0$.

Легко видеть, что для любого целого m $(c^u a_i^w)^{-m} a_j^v (c^u a_i^w)^m = a_{j+um}^v$ и поэтому для всякого $j \in \mathbb{Z}$

$$\langle c^u a_i^w, a_j^v \rangle = \langle c^u a_i^w, L^v \rangle.$$

Следовательно, элементы $c^u a_i^w$ и a^v также порождают подгруппу H , и к тому же число v можно считать положительным и взаимно простым с k .

Таким образом, если $i \geq 0$, мы получаем искомую систему порождающих: $\{c^u a^{wk^i}, a^v\}$. Если же $i < 0$, то поскольку $(k, v)=1$, существует такое число t , что $k^{-i}t \equiv w \pmod{v}$, и $c^u a_i^w \equiv c^u a_i^{k^{-i}t} = c^u a^t \pmod{L^v}$. Стало быть, $H = \langle c^u a^t, L^v \rangle = \langle c^u a^t, a^v \rangle$. ■

Пусть $H = \langle c^u a^w, a^v \rangle$, $u, v > 0$, и $c_1 = c^u a^w$, $a_1 = a^v$. Нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$c_1^{-1} a_1 c_1 = a_1^{k^u},$$

с помощью которого произвольное слово в порождающих a_1 и c_1 может быть приведено к виду: $c_1^m (c_1^{-i} a_1 c_1^i)^n$, $m, n, i \in \mathbb{Z}$. Поскольку равенство $c_1^m (c_1^{-i} a_1 c_1^i)^n = 1$ в силу отсутствия кручения в группе G_k справедливо лишь при $m=n=0$, подгруппа H имеет представление

$$H = \langle a_1, c_1; c_1^{-1} a_1 c_1 = a_1^{k^u} \rangle.$$

Помимо прочего, отсюда вытекают следующие два утверждения. Во-первых, если $g = c^m a_i^n \in H$, то $u|m$. Во-вторых, подгруппа H является расщепляющимся расширением подгруппы L_1 — нормального замыкания в H элемента a_1 — при помощи циклической подгруппы с порождающим $c_1 = a^u b^w$. Поэтому $H \cap L = L_1$ и, так как, очевидно, $L_1 = L^v$, пересечение $H \cap L$ совпадает с L^v .

Заметим далее, что если $(k, v)=1$, то $a_i^n \in L^v$ тогда и только тогда, когда $v|n$.

В самом деле, если $a_i^n \in L^v$, то для некоторых чисел $j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $a^n = a_j^{vm}$, и при этом можно считать, что $k \nmid m$. Отсюда либо $a^n = a^{vmk^j}$, если $j \geq 0$, либо $a^{nk^{-j}} = a^{vm}$, если $j < 0$, и, так как группа G_k без кручения, $n = vmk^j$ или $nk^{-j} = vm$. Ввиду условий $(k, v)=1$ и $k \nmid m$, второе равенство невозможно. Таким образом, $j \geq 0$ и $v|n$.

Непосредственным следствием приведенных утверждений является

Предложение Д.1.2. Если подгруппы $H = \langle c^u a^v, a^v \rangle$ и $K = \langle c^{u'} a^{v'}, a^{v'} \rangle$, где $u, v, u', v' > 0$, $(k, v) = (k, v') = 1$, совпадают, то $u = u'$ и $v = v'$. ■

Д. Коллинз в работе [10] установил, что группа автоморфизмов группы G_k порождается элементами:

$$\alpha: \begin{matrix} c \mapsto ca \\ a \mapsto a \end{matrix}, \quad \beta: \begin{matrix} c \mapsto c \\ a \mapsto a^{-1} \end{matrix}, \quad \gamma_i: \begin{matrix} c \mapsto c \\ a \mapsto a^{k_i} \end{matrix},$$

где k_i — произвольный простой делитель числа k . Заметим, что любая подгруппа $H = \langle c^u a^v, a^v \rangle$ группы G_k переходит под действием изоморфизма α^{-w} в подгруппу, порожденную элементами c^u и a^v .

Предложение Д.1.3. Индекс в группе G_k подгруппы $H = \langle c^u, a^v \rangle$, где $u, v > 0$, $(k, v) = 1$, конечен и равен uv .

Доказательство. Пусть $g = c^m a_i^n$ — произвольный элемент группы G_k . Покажем, что он лежит в одном левом смежном классе по подгруппе H с некоторым элементом $g' = c^{m'} a^{n'}$, где $0 \leq m' < u$ и $0 \leq n' < v$.

Запишем элемент g в виде $g = c^{m'} a_j^n c^{m-m'}$, где число m' равно остатку от деления m на u и $j = i + (m' - m)$. Тогда $g \in c^{m'} a_j^n H$. Если при этом $j \geq 0$, то наше утверждение очевидно.

Пусть $j < 0$. Пользуясь взаимной простотой k и v , найдем, как и при доказательстве предложения Д.1.1, число t , удовлетворяющее условию $k^{-j}t \equiv n \pmod{v}$. В результате мы получаем включение $c^{m'} a_j^n \in c^{m'} a_j^{k^{-j}t} L^v \subseteq c^{m'} a^t H$, и, таким образом, данный случай сводится к предыдущему.

Остается проверить, что все элементы множества

$$S = \{c^m a^n \mid 0 \leq m < u, 0 \leq n < v\}$$

лежат в различных левых смежных классах по подгруппе H .

Ясно, что если $g = c^m a^n$ и $g' = c^{m'} a^{n'}$ — два элемента из этого множества и $gH = g'H$, то $u \mid m - m'$, и так как $|m - m'| < u$, имеет место равенство $m = m'$. Поскольку $H \cap L = L^v$ и $(k, v) = 1$, из включения $g^{-1}g' = a^{n'-n} \in H$ теперь следует, что $v \mid n - n'$, и потому $n = n'$. ■

Предложение Д.1.4. Подгруппа $H = \langle c^{uv\Phi(v)}, a^v \rangle$, где $u, v > 0$, $(k, v) = 1$ и $\Phi(\cdot)$ — функция Эйлера, является характеристической в группе G_k .

Доказательство. Поскольку автоморфизмы $\beta^{\pm 1}$ и $\gamma_i^{\pm 1}$ оставляют подгруппу H на месте, нам достаточно проверить, что $c^{uv\Phi(v)} \alpha^{\pm 1} \in H$.

Так как $(k, v) = 1$, то $k^{\Phi(v)} \equiv 1 \pmod{v}$. Поэтому

$$\frac{k^{v\Phi(v)} - 1}{k^{\Phi(v)} - 1} = S(k^{\Phi(v)}, v) = 1 + k^{\Phi(v)} + \dots + (k^{\Phi(v)})^{v-1} \equiv 0 \pmod{v},$$

$$S(k, uv\Phi(v)) = \frac{k^{uv\Phi(v)} - 1}{k - 1} = \frac{k^{uv\Phi(v)} - 1}{k^{v\Phi(v)} - 1} \frac{k^{v\Phi(v)} - 1}{k^{\Phi(v)} - 1} \frac{k^{\Phi(v)} - 1}{k - 1} \equiv 0 \pmod{v} \text{ и}$$

$$c^{uv\Phi(v)} \alpha^{\pm 1} = (ca^{\pm 1})^{uv\Phi(v)} = c^{uv\Phi(v)} a^{\pm S(k, uv\Phi(v))} \in c^{uv\Phi(v)} L^v \subseteq H. \quad \blacksquare$$

Заметим далее, что если $k \equiv 1 \pmod{p}$ и $v = p^n$, то для любого положительного u

$$\frac{k^{up} - 1}{k^u - 1} \equiv 0 \pmod{p} \text{ и}$$

$$S(k^u, v) = \frac{k^{uv} - 1}{k^u - 1} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{k^{up^{i+1}} - 1}{k^{up^i} - 1} \equiv 0 \pmod{v}.$$

Отсюда по аналогии с предложением Д.1.4 вытекает

Предложение Д.1.5. Если $k \equiv 1 \pmod{p}$, и u и v — произвольные p -числа, то подгруппа $H = \langle c^{uv}, a^v \rangle$ является характеристической в группе G_k . ■

Описание подгрупп группы G_k завершает

Предложение Д.1.6. Произвольная подгруппа H группы G_k , не являющаяся конечно порожденной, лежит в подгруппе L . Если $cHc^{-1} \leq H$, то для некоторого положительного v , взаимно простого с k , имеет место равенство $H = L^v$.

Доказательство. Так как фактор-группа G_k/L является циклической, то $H \cap L \neq 1$. Если мы предположим существование элемента $h \in H$, не принадлежащего подгруппе L , то подгруппа $\langle h, g \rangle$, где g — некоторый нетривиальный элемент из пересечения $H \cap L$, не будет циклической. В силу предложения Д.1.3 ее индекс, а, следовательно, и индекс подгруппы H в группе G_k , будет конечным. Это означает, что H является конечно порожденной подгруппой и мы, тем самым, получаем противоречие. Таким образом, $H \leq L$.

Если $cHc^{-1} \leq H$, то вместе с некоторым элементом a_i^n подгруппа H будет содержать и всю подгруппу L^n . Стало быть, ее индекс в группе L конечен, и, так как в локально циклической группе произвольная подгруппа конечного индекса является степенной (см. доказательство предложения 2.5.2), то для некоторого числа $v > 0$, которое можно считать взаимно простым с k , имеет место равенство $H = L^v$. ■

Теперь мы готовы перейти к основной задаче настоящего параграфа — описанию подгрупп группы G_k , отделимых в классах $\mathcal{F}_\Pi$ и $\mathcal{F}_p$. Интересно отметить, что здесь оказывается полезным следующее

Предложение Д.1.7. Группа G_k является $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярной по любой циклической подгруппе C , не лежащей в подгруппе L .

Доказательство. В самом деле, так как $C \not\leq L$, то ввиду изолированности подгруппы L $C \cap L = 1$. Поэтому для каждого $n > 0$ $C \cap C^n L = C^n$. Остается лишь заметить, что поскольку фактор-группа G_k/L является циклической, $C^n L/L \in \Omega_\Pi(G_k/L)$ и $C^n L \in \Omega_\Pi(G_k)$. ■

Теорема Д.1.8. Подгруппа H группы G_k является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой тогда и только тогда, когда для нее справедливо одно из следующих трех утверждений:

- 1) H — циклическая подгруппа, не лежащая в L ;
- 2) H — нециклическая конечно порожденная подгруппа;

- 3) H совпадает с подгруппой L^n для подходящего положительного n , взаимно простого с k .

Доказательство. Необходимость. Предположим сначала, что H является циклической подгруппой, порожденной элементом $h = a_i^n \in L$, и положим $g = chc^{-1} = a_{i-1}^n$. Очевидно, $g \notin H$. Если, однако, ψ — произвольный гомоморфизм из семейства $\Psi_\Pi(G_k)$ и порядок элемента $c\psi$ равен q , то

$$g\psi = (c^{-(q-1)}a_i^n c^{q-1})\psi = a_i^{nk^{q-1}}\psi \in H\psi.$$

Таким образом, подгруппа H не отделима в классе $\mathcal{F}_\Pi$.

Пусть теперь H не является конечно порожденной подгруппой. Тогда в соответствии с предложением Д.1.6 она лежит в подгруппе L . Если при этом H не совпадает с подгруппой L^n ни для какого натурального n , то в силу того же предложения Д.1.6 найдется такой элемент $h \in H$, что $chc^{-1} \notin H$. Рассуждая как и выше, мы получаем, что подгруппа H не является $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой в группе G_k .

Достаточность. Если H — нециклическая конечно порожденная подгруппа, то по предложению Д.1.3 она имеет конечный индекс в группе G_k и, следовательно, $\mathcal{F}_\Pi$ -отделима. Если же $H = L^n$, то фактор-группа G_k/H оказывается полициклической и, в частности, $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемой.

Таким образом, нам остается проверить $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимость подгруппы H , лишь когда она является циклической и не лежит в L .

Ввиду $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируемости группы G_k и предложения 1.2.3 $\mathcal{F}_\Pi$ -замыкание $\mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H)$ подгруппы H в этом случае представляет собой абелеву подгруппу. Так как H не лежит в L , то подгруппа $\mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H)$ оказывается циклической и согласно предложению Д.1.7 существует подгруппа $M \in \Omega_\Pi(G_k)$, пересекающаяся с подгруппой $\mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H)$ по подгруппе H .

С другой стороны

$$\mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H) = \bigcap_{N \in \Omega_\Pi(G_k)} HN \leq \mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H) \cap HM = H.$$

Поэтому $\mathcal{F}_\Pi\text{-}Cl_{G_k}(H) = H$ и подгруппа H $\mathcal{F}_\Pi$ -отделима. ■

Предложение Д.1.9. Если $k \equiv 1 \pmod{p}$, то произвольная p' -изолированная циклическая подгруппа группы G_k является $\mathcal{F}_p$ -отделимой.

Доказательство. Пусть H — p' -изолированная циклическая подгруппа группы G_k , порожденная элементом h . Если предположить, что $h \in L$, то элемент chc^{-1} , не принадлежащий H , оказывается корнем из элемента h степени k , что противоречит p' -изолированности подгруппы H . Таким образом, $H \not\subset L$.

Дальнейшее рассуждение совершенно аналогично соответствующей части доказательства предыдущей теоремы. Необходимо лишь отметить, что ввиду p' -изолированности подгруппа H имеет p -индекс в своем $\mathcal{F}_p$ -замыкании, и, таким образом, для отыскания подгруппы $M \in \Omega_p(G_k)$ мы можем воспользоваться предложением 2.5.2, утверждающим, что $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа является $\mathcal{F}_p$ -регулярной по любой циклической подгруппе. ■

Предложение Д.1.10. Пусть $k \equiv 1 \pmod{p}$ и H — нециклическая конечно порожденная подгруппа группы G_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -отделима в группе G_k ;
- 2) подгруппа H p' -изолирована в группе G_k ;
- 3) подгруппа H имеет p -индекс в группе G_k .

Доказательство. Применяя подходящий автоморфизм группы G_k , мы можем считать, что подгруппа H порождается элементами c^u и a^v , где $u, v > 0$ и $(k, v) = 1$. Если при этом она является p' -изолированной, то u и v , очевидно, должны быть p -числами и, следовательно, H имеет p -индекс в группе G_k .

Далее, если u и v являются p -числами, то подгруппа $N = \langle c^{uv}, a^v \rangle$, лежащая в H , принадлежит в силу предложения Д.1.5 семейству $\Omega_p(G_k)$. Отсюда сразу же вытекает, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -отделима в группе G_k . ■

Предложение Д.1.11. Пусть $k \equiv 1 \pmod{p}$ и H — подгруппа группы G_k , не являющаяся конечно порожденной. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) подгруппа H $\mathcal{F}_p$ -отделима в группе G_k ;
- 2) подгруппа H p' -изолирована в группе G_k ;
- 3) подгруппа H совпадает с подгруппой L^n для некоторого p -числа n .

Доказательство. Если подгруппа H является p' -изолированной, то вместе с каждым своим элементом h она должна содержать и элемент $h c h c^{-1}$. Отсюда ввиду предложения Д.1.6 $H = L^n$, причем n , очевидно, можно считать p -числом.

Нам остается проверить, что для каждого p -числа n фактор-группа G_k/L^n $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Для этого заметим, что из установленного выше соотношения $S(k, n) \equiv 0 \pmod{n}$ вытекают сравнения $k^n \equiv 1 \pmod{n}$ и $c^{-n} a c^n \equiv a \pmod{L^n}$. Последнее из них означает, что $c^n L^n \in Z(G_k/L^n)$ и, таким образом, группа G_k/L^n оказывается расширением бесконечной циклической группы $\langle c^n L^n \rangle$ при помощи конечной p -группы. Аппроксимируемость ее классом $\mathcal{F}_p$ обеспечивается теперь следствием 1.4.7. ■

Объединяет результаты предложений Д.1.9, Д.1.10 и Д.1.11

Теорема Д.1.12. Если группа G_k $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то все ее p' -изолированные подгруппы $\mathcal{F}_p$ -отделимы. ■

Предложение Д.1.13. Если $k \not\equiv 1 \pmod{p}$, то подгруппа H группы G_k является $\mathcal{F}_p$ -отделимой тогда и только тогда, когда она порождается подгруппой L и элементом c^u , где u либо равно 0, либо является p -числом.

Доказательство. Нам достаточно показать, что образ элемента a относительно любого гомоморфизма $\psi \in \Psi_p(G_k)$ равен 1 и потому произвольная $\mathcal{F}_p$ -отделимая подгруппа группы G_k содержит подгруппу L .

В самом деле, если $p \nmid k$, то элемент a имеет бесконечную p -высоту и сформулированное утверждение очевидно.

Пусть $(k, p) = 1$, и предположим напротив, что для некоторого $\psi \in \Psi_p(G_k)$ $a\psi \neq 1$. Обозначим через m и n порядки элементов $c\psi$ и $a\psi$, соответственно. Тогда $a\psi = (c^{-m}ac^m)\psi = (a\psi)^{k^m}$ и потому $k^m \equiv 1 \pmod{n}$. Поскольку n является неединичным p -числом, отсюда следует, что $k^m \equiv 1 \pmod{p}$.

С другой стороны, ввиду взаимной простоты чисел k и p $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Так как $(m, p-1) = 1$, то $rm + s(p-1) = 1$ для некоторых целых чисел r, s и $k = k^{rm+s(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Таким образом, мы получаем противоречие с условием предложения. ■

§ Д.2. $\mathcal{F}_\pi$ -отделимость циклических подгрупп обобщенных свободных произведений групп G_k

Пусть $G = (G_k * G_l; H = K, \varphi)$ есть свободное произведение групп $G_k = \langle a, c; c^{-1}ac = a^k \rangle$ и $G_l = \langle b, d; d^{-1}bd = b^l \rangle$ с подгруппами H и K , объединенными относительно некоторого изоморфизма φ (эти обозначения будут использоваться до конца параграфа). Приводимые ниже теоремы дают необходимые и достаточные условия максимальности двух семейств: $\Delta_\Pi(G)$ и $\Delta_p(G)$, последнего — при условии, что $k \equiv l \equiv 1 \pmod{p}$.

Поскольку группы G_k и G_l являются разрешимыми, первое утверждение вытекает непосредственно из результата М. Ширвани [31], упоминавшегося после доказательства теоремы 2.2.2 из § 2.2.

Теорема Д.2.1. *Если группа G $\mathcal{F}_\Pi$ -аппроксимируема, то подгруппы H и K $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы в свободных множителях. ■*

Теорема Д.2.2. *Если подгруппы H и K $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимы в свободных множителях, то семейство $\Delta_\Pi(G)$ является максимальным.*

Доказательство. Для начала заметим, что группа G_k $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярна по подгруппе L^v для каждого положительного v .

Действительно, произвольная подгруппа M из семейства $\Omega_\Pi(L^v)$ совпадает с подгруппой L^n для подходящего положительного n . Согласно предложению Д.1.8 эта подгруппа $\mathcal{F}_\Pi$ -отделима и потому фактор-группа G/M обладает такой подгруппой $N/M \in \Omega_\Pi(G/M)$, что пересечение $N/M \cap L/M$ тривиально. Подгруппа N в этом случае и будет искомой.

Объединяя доказанное утверждение с предложением Д.1.7, мы видим, что группа G_k $\mathcal{F}_\Pi$ -регулярна по любой $\mathcal{F}_\Pi$ -отделимой локально циклической подгруппе. Аналогичный результат имеет место и для группы G_l . Таким образом, если H и K являются локально циклическими подгруппами, то утверждение теоремы следует из предложений 2.3.16 и 2.3.14 § 2.3.

Стало быть, нам остается рассмотреть случай, когда объединяемые подгруппы имеют конечный индекс в свободных множителях. Мы будем сводить его к следствию 2.4.9 из § 2.4.

Применяя подходящие автоморфизмы групп G_k и G_l , мы можем считать,

что $H = \langle c^u, a^v \rangle$ и $K = \langle d^{u'}, b^{v'} \rangle$, где $u, v, u', v' > 0$ и $(k, v) = (l, v') = 1$. Пусть также $R = \langle c^{ut}, a^v \rangle$ и $S = \langle d^{u't}, b^{v'} \rangle$, где $t = vv' \Phi(v) \Phi(v')$, $\Phi(\cdot)$ — функция Эйлера.

Ввиду предложения Д.1.4 подгруппы R и S нормальны в свободных множителях. Напомним также, что в образующих $a_1 = a^v$, $c_1 = c^u$, $b_1 = b^{v'}$, $d_1 = d^{u'}$ подгруппы H и K имеют следующие представления:

$$H = \langle a_1, c_1; c_1^{-1} a_1 c_1 = a_1^{k''} \rangle, K = \langle b_1, d_1; d_1^{-1} b_1 d_1 = b_1^{l''} \rangle,$$

и так как подгруппы R, S порождаются, очевидно, элементами c_1^t, a_1 и d_1^t, b_1 , соответственно, то в силу того же предложения Д.1.4 они оказываются характеристическими в H и K .

Д. И. Молдаванский в работе [47] показал, что группы G_k и G_l изоморфны тогда и только тогда, когда $k = l$. Поэтому условие $H \cong K$ влечет равенство $k'' = l''$, и отображение $\theta: H \rightarrow K$, переводящее a_1 в b_1 и c_1 в d_1 , определяет изоморфизм подгрупп.

Представляя теперь изоморфизм φ в виде композиции изоморфизма θ и некоторого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(K)$, мы получаем, что $R\varphi = S\alpha = S$. Тем самым, условия следствия 2.4.9 оказываются выполнены и семейство $\Delta_{\Pi}(G)$ является максимальным. ■

Теорема Д.2.3. *Если группа G $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема, то подгруппы H и K являются $\mathcal{F}_p$ -отделимыми в свободных множителях.*

Доказательство. Предположим, что хотя бы одна из объединяемых подгрупп, скажем H , не является $\mathcal{F}_p$ -отделимой в соответствующем множителе и покажем, что в этом случае индексы подгрупп H и K в группах G_k и G_l равны 2.

Будучи двуступенно разрешимыми, обе эти группы удовлетворяют следующему тождеству:

$$w(x, y, z) = [[x, z], [y, z]] = z^{-1} x^{-1} z x z^{-1} y^{-1} z y x^{-1} z^{-1} x z y^{-1} z^{-1} y z = 1.$$

Если $[G_l:K] \geq 3$, то, выбирая в качестве z произвольный элемент множества $\mathcal{F}_p\text{-Cl}_{G_k}(H) \setminus H$, а в качестве x и y — такие элементы из $G_l \setminus K$, что $ux^{-1} \notin K$, мы получаем элемент $g = w(x, y, z)$ группы G длины 15, который при каждом гомоморфизме $\psi \in \Psi_p(G)$ оказывается в образе группы G_l и потому переходит в 1. Таким образом, группа G не может быть $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемой.

Если теперь $[G_l:K] = 2$, но $[G_k:H] \geq 3$, то x и y снова следует выбрать лежащими в различных левых смежных классах теперь уже группы G_k по подгруппе H , но не в H , а элемент z положить равным $v^{-1}uv$, где $u \in \mathcal{F}_p\text{-Cl}_{G_k}(H) \setminus H$ и $v \in G_l \setminus K$. Тогда элемент $g = w(x, y, z)$ имеет длину 31 и потому отличен от единицы. Однако при каждом гомоморфизме $\psi \in \Psi_p(G)$ образ элемента u оказывается в образе подгруппы H и, так как подгруппа K нормальна в группе G_l , то $z\psi = (v^{-1}uv)\psi \in H\psi$. Стало быть, $g\psi = 1$, и мы, тем самым, опять получаем противоречие с $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемостью группы G .

Итак, $[G_k:H] = 2$, и, следовательно, $p \neq 2$. Это означает, что либо $H = \langle c^2, a \rangle$, либо k нечетно и $H = \langle c, a^2 \rangle$ или $H = \langle ca, a^2 \rangle$. Во втором случае мы сразу же приходим к противоречию, рассматривая неединичный элемент $g = [t^{-1}at, a]$

группы G , где $t \in B \setminus K$. В самом деле, так как $[G_l : K] = 2$ и $p \neq 2$, то $t \in \mathcal{F}_p\text{-Cl}_{G_l}(K)$ и при каждом гомоморфизме $\psi \in \Psi_p(G)$ элемент $(t^{-1}at)\psi$ оказывается в образе подгруппы L группы G_k и потому коммутирует с элементом $a\psi$.

Аналогичное рассуждение применимо, разумеется, и к подгруппе K . Стало быть, мы можем считать далее, что $H = \langle c^2, a \rangle$, $K = \langle d^2, b \rangle$ и $p \neq 2$.

Положим $g = c^2(c^{-1}d)^{k+1}d^{-2}$.

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, представим изоморфизм φ в виде композиции изоморфизма $\theta: H \rightarrow K$, переводящего a в b и $c_1 = c^2$ в $d_1 = d^2$, и некоторого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(K)$.

Из описания порождающих группы $\text{Aut}(K)$, приведенного в предыдущем параграфе, видно, что $d_1\alpha^{-1} = d_1(d_1^m b^n d_1^{-m})$ для подходящих чисел $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{Z}$, откуда $d_1\varphi^{-1} = c_1^{m+1}a^n c_1^{-m}$.

Пусть N — произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(G)$ и порядки элементов a , c и d по модулю этой подгруппы равны, соответственно, u , v и w . Пусть также

$$y = \frac{1}{2}(\max\{u, v, w\} + 1)$$

(напомним, что $p \neq 2$, а u , v и w являются p -числами, поэтому y — целое число).

Тогда

$$S(k^2, y)(k+1) = \frac{k^{2y}-1}{k^2-1}(k+1) = S(k, 2y) = S(k, 2y-1) + k^{2y-1} \equiv 1 \pmod{u}$$

и

$$\begin{aligned} (c^{-1}d)^{k+1} &\equiv (c^{-2y}d^{2y})^{k+1} = \left(c_1^{-y}(c_1^{m+1}a^n c_1^{-m})^y\right)^{k+1} = c_1^m a^{nS(k^2, y)(k+1)} c_1^{-m} \equiv \\ &\equiv c_1^m a^n c_1^{-m} = c_1^{-1}d_1 = c^{-2}d^2 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, элемент g принадлежит каждой подгруппе $N \in \Omega_p(G)$. Это противоречие и завершает доказательство теоремы. ■

Теорема Д.2.4. Если группы G_k и G_l $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемы, подгруппы H и K $\mathcal{F}_p$ -отделимы в свободных множителях, то все p' -изолированные циклические подгруппы группы G $\mathcal{F}_p$ -отделимы.

Доказательство следует той же схеме, что и в теореме Д.2.2. В случае, когда объединяемые подгруппы являются (локально) циклическими, искомое утверждение сразу же вытекает из теоремы 2.5.3 § 2.5.

Пусть подгруппы H и K имеют конечный индекс в группах G_k и G_l . Применяя подходящие автоморфизмы этих групп, мы можем считать, что $H = \langle c^u, a^v \rangle$ и $K = \langle d^{u'}, b^{v'} \rangle$, где $u, v, u', v' > 0$ и $(k, v) = (l, v') = 1$. К тому же u, v, u', v' в силу предложения Д.1.10 можно считать p -числами.

Рассмотрим подгруппу $N = \langle c^m, a^n \rangle$, где m, n — положительные p -числа, удовлетворяющие условиям $n \leq v$ и

$$n \leq r = \frac{\max\{m, u\}}{u}.$$

Так как $m \geq r \geq n$, то согласно предложению Д.1.5 подгруппа N нормальна

в группе G_k . Покажем, что $N \cap H = \langle c^{ur}, a^v \rangle$.

В одну сторону включение очевидно. Обратно, если $c^x a_i^y \in N \cap H$, то $m \mid x$ и $u \mid y$. Поэтому, во-первых, число $ru = \max\{m, u\}$ также делит x и, во-вторых, $a_i^y \in N \cap H$. Отсюда следует, что $a_i^y \in H \cap L = L^v$ и, таким образом, $c^x a_i^y \in \langle c^{ur}, a^v \rangle$.

Воспользуемся теперь представлениями

$$H = \langle a_1, c_1; c_1^{-1} a_1 c_1 = a_1^{ku} \rangle, K = \langle b_1, d_1; d_1^{-1} b_1 d_1 = b_1^{lu} \rangle$$

подгрупп H и K в системах образующих $c_1 = c^u$, $a_1 = a^v$ и $d_1 = d^u$, $b_1 = b^v$.

Так как $N \cap H = \langle c_1^r, a_1 \rangle$, то в силу предложения Д.1.5 эта подгруппа является характеристической в H . Представляя, как и выше, изоморфизм φ в виде композиции изоморфизма $\theta: H \rightarrow K$, переводящего a_1 в b_1 и c_1 в d_1 , и некоторого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut}(K)$, мы видим, что подгруппа $(N \cap H)\varphi$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами $d_1^r = d^{ur}$ и $b_1 = b^v$.

Пусть теперь $v = p^s$, $v' = p^{s'}$ и $q = \max\{s, s'\}$. Положим

$$\begin{aligned} C_i &= \langle c^{up^i}, a \rangle, 0 \leq i \leq q, D_j = \langle d^{up^j}, b \rangle, 0 \leq j \leq q, \\ E_i &= \langle c^{up^q}, a^{p^i} \rangle, 1 \leq i \leq s, F_j = \langle d^{up^q}, b^{p^j} \rangle, 1 \leq j \leq s'. \end{aligned}$$

В результате мы получаем последовательности нормальных подгрупп конечного p -индекса

$$\begin{aligned} E &= E_s \leq E_{s-1} \leq \dots \leq E_1 \leq C_q \leq C_{q-1} \leq \dots \leq C_0, \\ F &= F_{s'} \leq F_{s'-1} \leq \dots \leq F_1 \leq D_q \leq D_{q-1} \leq \dots \leq D_0 \end{aligned}$$

с факторами порядка p . Из приведенных выше рассуждений следует также, что:

$$\begin{aligned} (C_i \cap H)\varphi &= \langle d_1^{p^i}, b_1 \rangle = D_j \cap K, 0 \leq i = j \leq q; \\ (E_i \cap H)\varphi &= \langle d_1^{p^q}, b_1 \rangle = F_j \cap K, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s'. \end{aligned}$$

В частности, $E \leq H \leq C_0$ и $F \leq K \leq D_0$.

Далее, легко видеть, что подгруппа $R = E^p E'$ порождается элементами c_2^p и a_2^p , где $c_2 = c^{up^q}$ и $a_2 = a^{p^s}$ — образующие подгруппы E . Из предложения Д.1.5 следует также, что подгруппа $R_1 = \langle c_2^p, a_2 \rangle$ является характеристической в E и потому нормальной в группе G_k .

Полагая $S = R\varphi = F^p F'$ и $S_1 = R_1\varphi$, мы тем самым продолжаем построенные выше последовательности до подгрупп R и S . Из предложения 2.3.11 § 2.3 теперь следует, что эти подгруппы (H, K, φ, p) -совместимы, т. е. группа $G_{R,S} \mathcal{F}_p$ -аппроксимируема. Для завершения доказательства нам остается лишь воспользоваться следствием 2.6.6 из § 2.6. ■

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначение	Описание	Стр.
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел (с нулем)	
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел	
$\mathbb{Z}_n$	кольцо вычетов по модулю n	
(m, n)	наибольший общий делитель чисел m и n	
$m n$	число m делит число n	
$\cong$	отношение изоморфизма групп	
$\ker \psi$	ядро гомоморфизма ψ	
G'	коммутант группы G	
$G^{(n)}$	n -ая производная группы G	
$\gamma_n(G)$	n -ый член нижнего центрального ряда группы G	
G^n	подгруппа группы G , порожденная множеством элементов $\{g^n \mid g \in G\}$	
$Z(G)$	центр группы G	
$C_G(M)$	централизатор множества M в группе G	
$\mathcal{N}_G(H)$	нормализатор подгруппы H в группе G	
$ g , G $	порядок элемента g , группы G	
$[G:H]$	индекс подгруппы H в группе G	
$[H, K]$	взаимный коммутант подгрупп H и K	
$[x, y, \dots, z]$	коммутатор элементов $x, y, \dots, z$	
$r(G)$	ранг абелевой группы G	12
$\langle a_1, a_2, \dots; r_1, r_2, \dots \rangle$	группа, задаваемая образующими $a_1, a_2, \dots$ и определяющими соотношениями $r_1, r_2, \dots$	
$\langle a_1, a_2, \dots \rangle, \langle M \rangle$	подгруппа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$, множеством M	
$(A * B; [H, K] = 1)$	свободное произведение групп A и B с коммутирующими подгруппами H и K	5
$(A * B; [A, K] = 1, [H, B] = 1)$	свободное произведение групп A и B с централизованными подгруппами H и K	5

$(*A_i; H_i=K_{i+1}, \varphi_i, i \in \mathbb{Z}_n)$	полигональное произведение групп A_i с тривиальными пересечениями	7
$(A * B; H=K, \varphi)$	свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ	36
$l(g)$	длина элемента g обобщенного свободного произведения	38
π	произвольное непустое множество простых чисел	
p	в зависимости от контекста произвольное простое число или множество, состоящее из одного простого числа p	
π'	множество всех простых чисел, не принадлежащих π	
$\tau(G), \tau_\Pi(G)$	периодическая часть нильпотентной группы G	11
$\tau_\pi(G)$	подгруппа нильпотентной группы G , составленная из всех элементов, порядки которых являются π -числами	11
$\mathcal{K}_\pi$	для любого класса групп $\mathcal{K}$ — класс всех групп из $\mathcal{K}$, не имеющих π' -кручения	11
$\mathcal{K}_0$	то же, что и $\mathcal{K}_\emptyset$, — класс всех $\mathcal{K}$ -групп без кручения	11
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_\Pi$	класс всех конечных групп	11
$\mathcal{F}_\pi, \mathcal{F}_p$	классы конечных π -групп, конечных p -групп	11
$\mathcal{A}_1$	класс абелевых групп конечного ранга	13
$\mathcal{A}_2$	класс абелевых групп, удовлетворяющих условию (3) на стр. 12	13
$\mathcal{A}_3, \mathcal{A}$	класс ограниченных абелевых групп	13, 19
$\mathcal{S}_i$	класс разрешимых групп, обладающих конечным субнормальным рядом с $\mathcal{A}_i$ -факторами	13
$\mathcal{N}_i$	класс нильпотентных групп, обладающих конечным центральным рядом с $\mathcal{A}_i$ -факторами	13
$\mathcal{S}$	то же, что и $\mathcal{S}_3$ — класс ограниченных разрешимых групп	13, 19
$\mathcal{N}$	то же, что и $\mathcal{N}_3$ — класс ограниченных нильпотентных групп	13, 19
$\mathcal{S}_0, \mathcal{N}_0$	классы $\mathcal{S}$ -групп без кручения, $\mathcal{N}$ -групп без кручения	11
$\mathcal{N}_\pi, \mathcal{N}_p$	классы $\mathcal{N}$ -групп, периодические части которых являются, соответственно, π -группами, p -группами	11
$\Psi_{\mathcal{K}}(G)$	семейство всех гомоморфизмов группы G на группы из класса $\mathcal{K}$	19

$\Omega_{\mathcal{K}}(G)$	семейство всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$	19
$\Psi_{\Pi}(G), \Psi_{\pi}(G), \Psi_p(G)$	то же, что и $\Psi_{\mathcal{F}_{\Pi}}(G), \Psi_{\mathcal{F}_{\pi}}(G), \Psi_{\mathcal{F}_p}(G)$	19
$\Omega_{\Pi}(G), \Omega_{\pi}(G), \Omega_p(G)$	то же, что и $\Omega_{\mathcal{F}_{\Pi}}(G), \Omega_{\mathcal{F}_{\pi}}(G), \Omega_{\mathcal{F}_p}(G)$	19
$\mathcal{K}\text{-}Cl_G(H)$	$\mathcal{K}$ -замыкание подгруппы H в группе G	20
$\pi'\text{-}\mathcal{I}_G(H)$	π' -изолятор подгруппы H в группе G	30
${}_G\sqrt[\pi']{H}$	множество π' -корней, извлекающихся в группе G из элементов подгруппы H	30
$\Delta_{\pi}(G)$	семейство всех $\mathcal{F}_{\pi}$ -отделимых циклических подгрупп группы G	8
$\bar{\Delta}_{\pi}(G)$	семейство всех π' -изолированных циклических подгрупп группы G , не являющихся $\mathcal{F}_{\pi}$ -отделимыми в этой группе	8
■	конец доказательства	

Обозначения, действующие на протяжении второй части

G	свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K , объединенными в соответствии с изоморфизмом φ	36
A, B	свободные множители	36
H, K	объединяемые подгруппы групп A и B	36
φ	изоморфизм подгрупп H и K , в соответствии с которым происходит объединение	36
Θ_{π}	семейство пар подгрупп, получаемых пересечением с группами A и B всевозможных подгрупп из $\Omega_{\pi}(G)$	43
$\Theta_{\pi}(A), \Theta_{\pi}(B)$	проекции семейства Θ_{π} на группы A и B	43
$\Lambda_{\pi}(A), \Lambda_{\pi}(B)$	семейства всех циклических подгрупп групп A и B , отделимых подгруппами из семейств $\Theta_{\pi}(A)$ и $\Theta_{\pi}(B)$, соответственно	43
$\bar{\Lambda}_{\pi}(A), \bar{\Lambda}_{\pi}(B)$	семейства всех π' -изолированных циклических подгрупп групп A и B , не являющихся отделимыми подгруппами из семейств $\Theta_{\pi}(A)$ и $\Theta_{\pi}(B)$, соответственно	43

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Allenby R. B. J. T.* Polygonal products of polycyclic by finite groups // *Bull. Aust. Math. Soc.* 1996. V. 54, № 3. P. 369–372.
2. *Allenby R. B. J. T., Doniz D.* A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable // *Proc. Am. Math. Soc.* 1996. V. 124, № 4. P. 1003–1005.
3. *Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J.* On locally extended residually finite groups // *Lecture Notes Math.* 1973. V. 319. P. 9–17.
4. *Allenby R. B. J. T., Tang C. Y.* Subgroup separability of generalized free products of free-by-finite groups // *Can. Math. Bull.* 1993. V. 36, № 4. P. 385–389.
5. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // *Comm. Algebra.* 1978. V. 6. P. 179–194.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1963. V. 106. P. 193–209.
7. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1962. V. 68. P. 199–201.
8. *Brunner A. M., Burns R. G., Solitar D.* The subgroup separability of free products of two free groups with cyclic amalgamation // *Contributions to group theory. Contemp. Math.* 1984. V. 33. P. 90–115.
9. *Burns R. C.* On finitely generated subgroups of free products // *J. Austral. Math. Soc.* 1971. V. 12. P. 358–364.
10. *Collins D.* The automorphism towers of some one-relator groups // *Proc. London. Math. Soc.* (3). 1978. V. 36. P. 480–493.
11. *Evans B.* Cyclic amalgamations of residually finite groups // *Pacific J. Math.* 1974. V. 55. P. 371–379.
12. *Gitik R.* Graphs and separability properties of groups // *J. Algebra.* 1997. V. 188, № 1. P. 125–143.
13. *Gitik R., Rips E.* A necessary condition for $A *_{a=b} B$ to be LERF // *Isr. J. Math.* 1991. V. 73, № 1. P. 123–125.
14. *Gitik R., Rips E.* On separability properties of groups // *Int. J. Algebra Comput.* 1995. V. 5, № 6. P. 703–717.
15. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // *Proc. London Math. Soc. Ser. 3.* 1957. V. 7. P. 29–62.

16. *Hall M. Jr.* Coset representation in free groups // Trans. Am. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 421–432.
17. *Hall M. Jr.* Subgroup of finite index in free groups // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 187–190.
18. *Higman G.* Amalgams of p -groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
19. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups (IV) // J. Lond. Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
20. *Kim G.* On polygonal products of finitely generated abelian groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1992. V. 45, № 3. P. 453–462.
21. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Canad. Math. Bull. 1993. V. 36 (3). P. 296–302.
22. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p -finite groups // J. Algebra. 1993. V. 162, № 1. P. 1–11.
23. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p -groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.
24. *Kim G., Tang C. Y.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Can. Math. Bull. 1999. V. 42, № 3. P. 335–343.
25. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 259–280.
26. *Meskin S.* Non-residually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 105–114.
27. *Neumann B. H.* An assay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. V. 246. P. 503–554.
28. *Neumann H.* Generalized free products with amalgamated subgroups II // Am. J. Math. 1949. V. 31. P. 491–540.
29. *Niblo G. A.* HNN-extensions of a free group by $\mathbb{Z}$ which are subgroup separable // Proc. Lond. Math. Soc. III. 1990. Ser. 61, № 1. P. 18–32.
30. *Rips E.* An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Isr. J. Math. 1990. V. 70, № 1. P. 104–110.
31. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Am. Math. Soc. 1988. V. 104, № 3. P. 703–706.
32. *Stebe P.* Residual finiteness of a class of knot groups // Comm. Pure and Applied Math. 1968. V. 21. P. 563–583.
33. *Tang C. Y.* Conjugacy separability of generalized free products of certain conjugacy separable groups // Can. Math. Bul. 1995. V. 38. P. 120–127.
34. *Wong P. C., Tang C. K.* Residual finiteness of generalized free products of isomorphic groups // Algebra Colloq. 1997. V. 4, № 2. P. 133–139.
35. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость некоторых свободных произведений групп с циклическим объединением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 1 (1997). С. 4–10.

36. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 1. С. 3–8.
37. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения ограниченных разрешимых групп с циклическим объединением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 3–4.
38. *Азаров Д. Н.* Финитная аппроксимируемость и другие аппроксимационные свойства свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Иванов. гос. ун-т. – Иваново, 1999, – 55 с. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 28.04.99 № 1371-B99.
39. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10.
40. *Логонова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.
41. *Логонова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 101–104.
42. *Логонова Е. Д.* Финитная отделимость циклических подгрупп свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 49–55.
43. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М., 1974. 456 с.
44. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 347–366.
45. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Матем. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 567–588.
46. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
47. *Молдаванский Д. И.* Об изоморфизмах групп Баумслага-Солитэра // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43, № 12. С. 1684–1686.
48. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p -группами HNN-расширений // Вестн. ИвГУ. Сер. «Биология, Химия, Физика, Математика». Вып. 3 (2000). С. 129–140.
49. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.
50. *Якушев А. В.* Аппроксимируемость конечными p -группами расщепляющихся расширений групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 119–124.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Соколов Е. В.* Фinitная аппроксимируемость некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // Матер. XXXVIII Межд. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс», 10–14 апреля 2000 г. Математика. Ч. II. Новосибирск: НГУ, 2000. С. 6–7.
2. *Соколов Е. В.* Фinitная аппроксимируемость некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // «Молодая наука – 2000». Сборник научных статей аспирантов и студентов ИвГУ. Часть 1. Иваново: ИвГУ, 2000. С. 229–238.
3. *Соколов Е. В.* Фinitная отделимость циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: теория, методология, практика. Матер. науч. конф., Иваново, 6 февраля 2001 г. Иваново: ИвГУ, 2001. С. 156–157.
4. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп в обобщенных свободных произведениях групп // Молодая наука в классическом университете. Тез. докл. науч. конф., Иваново, 15–19 апреля 2002 г. Ч. 3. Иваново: ИвГУ, 2002. С. 85.
5. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Иванов. гос. ун-т. – Иваново, 2002, – 23 с. – Библиогр. 13 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 12.07.2002 № 1325-B2002.
6. *Соколов Е. В.* Фinitная отделимость циклических подгрупп в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестник молодых ученых ИвГУ. Вып. 2. Иваново: ИвГУ, 2002. С. 7–10.
7. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2002. V. 11. P. 27–38.
8. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп в классе конечных π -групп // Лобачевские чтения – 2002. Матер. межд. молод. науч. школы-конф., Казань, 28 ноября – 1 декабря 2002 г. Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 18. Казань: Казанское математическое общество, 2002. С. 83–84.
9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p -группами неко-

торых свободных произведений с объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, вып. 1. С. 97–102.

10. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп обобщенного свободного произведения групп // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ – 2003. Матер. науч. конф., Иваново, 19–21 февраля 2003 г. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 6–7.

11. *Соколов Е. В.* Полицикличность конечно порожденных ограниченных разрешимых групп // Молодая наука в классическом университете. Тез. докл. науч. конф. фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых, Иваново, 21–25 апреля 2003 г. Ч. 1. Иваново: ИвГУ, 2003. С. 87–88.

12. *Соколов Е. В.* Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π -групп // Математические заметки. 2003. Т. 73, вып. 6. С. 904–909.

13. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп / Иванов. гос. ун-т – Иваново, 2003, – 90 с. – Библиогр. 49 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 22.07.2003 № 1433-B2003.