Математические заметки

том 78 выпуск 1 июль 2005

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Е. В. Соколов

Получено достаточное условие аппроксимируемости классом $\mathscr{F}_p$ конечных p-групп свободного произведения $G = (A * B; H)$ групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. С его помощью доказано, что если A и B представляют собой расширения $\mathscr{N}$-аппроксимируемых групп при помощи $\mathscr{F}_p$-групп, где $\mathscr{N}$ обозначает класс конечно порожденных нильпотентных групп без кручения, и H является нормальной p'-изолированной полициклической подгруппой, то группа G аппроксимируется классом $\mathscr{F}_p$, как только $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой является факторгруппа G/H^pH'.

Библиография: 10 названий.

1. Формулировка результатов. Напомним, что *свободным произведением* групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to K$, называется группа $G = (A*B; H = K, \varphi)$, задаваемая образующими и определяющими соотношениями групп A и B, а также всеми соотношениями вида $h = h\varphi$, где элемент h пробегает подгруппу H. Как известно, группы A и B вкладываются в группу G, поэтому их можно считать ее подгруппами. При этом подгруппы H и K оказываются совпадающими, что позволяет записывать группу G в виде $G = (A * B; H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H (считая изоморфизм φ заданным). Введенные обозначения мы будем предполагать фиксированными на протяжении всей работы.

Напомним далее, что согласно общему определению А. И. Мальцева [1] подгруппа Y некоторой группы X называется *отделимой в классе групп* $\mathscr{K}$, или, короче, $\mathscr{K}$*-отделимой*, если для всякого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм ψ группы X на некоторую $\mathscr{K}$-группу такой, что $x\psi \notin Y\psi$. Если мы возьмем здесь в качестве Y единичную подгруппу, то получим определение *аппроксимируемости* группы X в классе $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$*-аппроксимируемости*).

В настоящей работе речь идет об аппроксимируемости группы $G = (A * B; H)$ классами $\mathscr{F}$ всех конечных групп и $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп. Традиционно эти свойства изучаются при тех или иных ограничениях, накладываемых на свободные множители A, B и, в особенности, на объединенную подгруппу. Здесь рассматривается ситуация, когда подгруппа H является “почти нормальной” в группе G, т.е. содержит подгруппу конечного индекса, нормальную в группах A и B.

Если X – некоторая группа, то через $\Omega(X)$ и $\Omega_p(X)$ мы будем обозначать семейства всех нормальных подгрупп группы X, имеющих в ней, соответственно, конечный индекс и конечный p-индекс. В работе [2] Р. Б. Д. Т. Олленби и Р. С. Грегорак показали, что обобщенное свободное произведение $G = (A * B; H)$ двух почти полициклических групп аппроксимируется классом $\mathscr{F}$, как только семейство $\Omega(H)$ содержит подгруппу, нормальную во всей группе G. Повторяя почти дословно их рассуждение, мы приходим к следующему более общему результату.

Теорема 1. *Пусть группы A и B $\mathscr{F}$-аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega(H)$ являются $\mathscr{F}$-отделимыми в этих группах. Если каждая подгруппа $M \in \Omega(H)$ содержит подгруппу $L \in \Omega(H)$, нормальную в G, то группа G $\mathscr{F}$-аппроксимируема.*

Попытаемся теперь получить аналогичное условие аппроксимируемости группы G классом $\mathscr{F}_p$. Ситуация здесь оказывается сложнее, поскольку в доказательстве теоремы 1 использовался тот факт, что свободное произведение $\mathscr{F}$-аппроксимируемых групп с конечным объединением всегда является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой группой. Для класса $\mathscr{F}_p$ это уже не так: даже свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой, как показывает следующий

Пример. Пусть $H = \langle a; a^2 = 1\rangle \times \langle b; b^2 = 1\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(H)$, $a\alpha = b$, $b\alpha = a$, $a\beta = ab$, $b\beta = b$. Пусть также $A = \langle\alpha\rangle H$ и $B = \langle\beta\rangle H$ – подгруппы голоморфа группы H и $G = (A * B; H)$ (изоморфизм φ здесь является тождественным отображением). Предположим, что группа G $\mathscr{F}_2$-аппроксимируема и, следовательно, существует гомоморфизм ψ этой группы на конечную 2-группу, инъективный на множестве $A \cup B$.

Заметим, что произвольная конечная p-группа F является нильпотентной и, как легко видеть, обладает некоторым нормальным рядом, все факторы которого имеют порядок p. В силу теоремы Шрайера любой нормальный ряд группы F может быть уплотнен до ряда с такими свойствами.

Отсюда вытекает, что подгруппа $H\psi$, нормальная в группе $G\psi$, должна содержать нормальную и, следовательно, центральную циклическую подгруппу порядка 2. Непосредственная проверка показывает, что это невозможно и, таким образом, группа G не является $\mathscr{F}_2$-аппроксимируемой.

Вместе с тем Г. Хигмен в работе [3] получил критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathscr{F}_p$-групп, который без труда можно распространить на свободные произведения произвольных $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечным объединением. Поэтому все приводимые ниже результаты будут сводить задачу к вопросу о том, является ли $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемым то или иное свободное произведение с конечной объединенной подгруппой.

Для удобства обозначим через $\Sigma_p(H)$ семейство всех таких подгрупп из $\Omega_p(H)$, которые нормальны в группах A и B (а следовательно, и в группе G).

Теорема 2. *Пусть группы A и B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega_p(H)$ являются $\mathscr{F}_p$-отделимыми в этих группах. Пусть также каждая подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$. Если существует такая подгруппа $Q \in \Sigma_p(H)$, что подгруппа Q^pQ' имеет в ней конечный индекс и факторгруппа G/Q^pQ' $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, то группа G является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.*

Сформулированная теорема представляет собой обобщение основных результатов работы [4]. Применяя ее к свободным произведениям с конечным объединением, мы получаем следующий критерий.

Следствие 3. *Пусть группы A и B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, подгруппа H конечна и нормальна в свободных множителях. Группа G аппроксимируется классом $\mathscr{F}_p$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой является факторгруппа G/H^pH'.*

Достаточность этого утверждения следует непосредственно из теоремы 2, для доказательства же необходимости заметим, что если группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, то этим свойством будет обладать и ее факторгруппа по конечной подгруппе H^pH'.

В действительности, условие теоремы 2 позволяет утверждать несколько большее, нежели $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы G.

Пусть X – некоторая группа; через $\Delta_p(X)$ мы будем обозначать семейство всех ее $\mathscr{F}_p$-отделимых циклических подгрупп.

Легко видеть, что если подгруппа Y принадлежит семейству $\Delta_p(X)$, то все корни p'-степеней, извлекающиеся в группе X из ее элементов, должны снова принадлежать Y (здесь и далее p' обозначает множество всех простых чисел, не равных p). Подгруппу, обладающую этим свойством, называют *p'-изолированной* в группе X.

Таким образом, если X содержит хотя бы один элемент, порядок которого не является p-числом, то все циклические подгруппы группы X уже заведомо не будут $\mathscr{F}_p$-отделимыми. Поэтому в качестве аналога свойства $\mathscr{F}$-отделимости всех циклических подгрупп данной группы имеет смысл рассматривать утверждение об $\mathscr{F}_p$-отделимости всех ее p'-изолированных циклических подгрупп. Меру отклонения группы X от этого условия характеризует семейство $\overline{\Delta}_p(X)$ всех p'-изолированных циклических подгрупп, не являющихся $\mathscr{F}_p$-отделимыми.

Обратимся теперь к группе $G = (A * B; H)$. Очевидно, что если циклическая подгруппа группы A не является $\mathscr{F}_p$-отделимой в A, то она не будет $\mathscr{F}_p$-отделимой и во всей группе G. Отсюда следует, что $\overline{\Delta}_p(A) \subseteq \overline{\Delta}_p(G)$ и точно так же $\overline{\Delta}_p(B) \subseteq \overline{\Delta}_p(G)$.

Мы будем говорить, что семейство $\Delta_p(G)$ максимально, если оно содержит все p'-изолированные циклические подгруппы группы G, не сопряженные ни с какой подгруппой из семейства $\overline{\Delta}_p(A) \cup \overline{\Delta}_p(B)$. Имеет место

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы 2 семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.*

Отметим, что если группы A и B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, то максимальность семейства $\Delta_p(G)$ влечет за собой $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость группы G и, таким образом, теорема 4 представляет собой более сильное утверждение, нежели теорема 2.

В самом деле, если свободные множители являются $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемыми группами, то семейства $\Delta_p(A)$ и $\Delta_p(B)$ содержат единичную подгруппу. Ввиду максимальности эту подгруппу содержит и семейство $\Delta_p(G)$, поэтому группа G также является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой.

Оказывается, что в случае конечной объединенной подгруппы имеет место и обратное утверждение; оно вытекает из теоремы 4, если положить $Q = 1$.

Следствие 5. *Если подгруппа H конечна и группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, то семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.*

Применим теперь теорему 4 к обобщенным свободным произведениям групп, аппроксимируемых классом $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения.

В работе [5] установлено, что в $\mathcal{N}$-аппроксимируемых группах все p'-изолированные полициклические подгруппы являются $\mathcal{F}_p$-отделимыми. Используя стандартное рассуждение из [1], нетрудно показать, что аналогичный результат справедлив и для расширений групп указанного вида при помощи конечных p-групп [6].

Теорема 6. *Пусть группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{N}$-аппроксимируемых групп при помощи конечных p-групп, H является полициклической подгруппой, нормальной и p'-изолированной в свободных множителях. Если факторгруппа G/H^pH' $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то все p'-изолированные циклические подгруппы группы G являются $\mathcal{F}_p$-отделимыми и, в частности, группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Эта теорема представляет собой обобщение ряда результатов Д.Н. Азарова [7] и Г. Кима и С. Танга [8] об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости свободных произведений с циклическим объединением, а также одного из утверждений работы [4]. Для ее доказательства нам необходимо лишь проверить, что произвольная подгруппа $M \in \Omega_p(H)$ содержит некоторую подгруппу из семейства $\Sigma_p(H)$.

Обозначим через n индекс подгруппы M в H. Поскольку группа H конечно порождена, она содержит лишь конечное число нормальных подгрупп индекса n. Следовательно, их пересечение L также имеет конечный индекс в H, являющийся к тому же p-числом. Остается заметить, что подгруппа L является характеристической в H и потому нормальной в группе G.

2. Достаточные условия максимальности семейства $\Delta_p(G)$. В работе [9] было получено

Предложение 1. *Пусть группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы, подгруппа H $\mathcal{F}_p$-отделима в этих группах, и пусть группа G удовлетворяет следующему условию*:

$$\forall M \in \Omega_p(A) \quad \forall N \in \Omega_p(B) \quad \exists L \in \Omega_p(G) \quad (L \cap A \leqslant M \wedge L \cap B \leqslant N). \tag{1}$$

Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Сейчас мы покажем, что условие (1) этого предложения можно несколько ослабить.

Нормальный ряд конечной p-группы будем называть *главным*, если все его факторы – циклические группы порядка p. С учетом этого определения упомянутый ранее критерий Хигмена [3] $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{F}_p$-групп выглядит следующим образом.

Предложение 2. *Пусть A и B – конечные p-группы. Группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существуют главные ряды*

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_m = A, \qquad 1 = B_0 \leqslant B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_n = B$$

групп A и B такие, что множества подгрупп $\{A_i \cap H\}$ и $\{B_j \cap H\}$ совпадают.

Рассматривая пример выше, мы уже отмечали, что каждая конечная p-группа F обладает главным рядом и что произвольный нормальный ряд группы F может быть уплотнен до главного. Из последнего замечания и предложения 2 вытекает

Предложение 3. *Пусть A и B – конечные p-группы, и пусть существуют нормальные ряды*

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \dots \leqslant A_n = A, \qquad 1 = B_0 \leqslant B_1 \leqslant \dots \leqslant B_n = B$$

групп A и B такие, что $A_i \cap H = B_i \cap H$ и порядки всех факторов $A_{i+1} \cap H / A_i \cap H$ делят p. Тогда группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

Действительно, поскольку порядок фактора $A_{i+1} \cap H/A_i \cap H$ делит p, для всякой подгруппы U такой, что $A_i \leqslant U \leqslant A_{i+1}$, пересечение $U \cap H$ должно совпадать либо с подгруппой $A_i \cap H$, либо с подгруппой $A_{i+1} \cap H$. Точно так же, если $B_i \leqslant V \leqslant B_{i+1}$, то $V \cap H = B_i \cap H$ или $V \cap H = B_{i+1} \cap H$. Таким образом, любые уплотнения исходных нормальных рядов групп A и B удовлетворяют условию предложения 2 и группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

Теперь мы можем, наконец, привести несколько иную формулировку предложения 1.

Предложение 4. *Пусть группы A и B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы, подгруппа H $\mathscr{F}_p$-отделима в этих группах, и пусть группа G удовлетворяет следующему условию:*

$$\forall Q \in \Omega_p(H) \quad \exists L \in \Omega_p(G) \quad (L \cap H \leqslant Q). \tag{2}$$

Тогда семейство $\Delta_p(G)$ является максимальным.

Для доказательства нам в силу предложения 1 достаточно проверить, что для любых подгрупп $M \in \Omega_p(A)$ и $N \in \Omega_p(B)$ найдется подгруппа $U \in \Omega_p(G)$, удовлетворяющая соотношениям $U \cap A \leqslant M$ и $U \cap B \leqslant N$.

Обозначим пересечение $M \cap N \cap H$ через Q и, пользуясь условием (2), выберем подгруппу $L \in \Omega_p(G)$ таким образом, чтобы $L \cap H \leqslant Q$.

Пусть $1 = G_0/L \leqslant G_1/L \leqslant \dots \leqslant G_n/L = G/L$ – некоторый главный ряд фактор-группы G/L. Положим $R_0 = L \cap M$, $S_0 = L \cap N$ и $R_i = G_i \cap A$, $S_i = G_i \cap B$, где $i = 1, 2, \dots, n$. В результате мы получим неубывающие последовательности нормальных подгрупп конечного p-индекса $R = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_n = A$ и $S = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \dots \leqslant S_n = B$, удовлетворяющие соотношениям $R_i \cap H = S_i \cap H = L_i \cap H$ для любого $i \geqslant 0$.

Напомним, что через K мы обозначали образ подгруппы H относительно изоморфизма φ. Условие $R \cap H = S \cap H$ означает, что $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Поэтому отображение $\varphi_{R,S} \colon HR/R \to KS/S$, ставящее в соответствие элементу hR, $h \in H$, элемент $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Стало быть, мы можем построить группу

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S}).$$

Заметим еще, что естественные гомоморфизмы группы A на A/R и группы B на B/S продолжаемы до гомоморфизма $\rho_{R,S}$ группы G на группу $G_{R,S}$.

Очевидно, что подгруппы $R_i\rho_{R,S}$ и $S_i\rho_{R,S}$ образуют в группах A/R и B/S нормальные ряды, удовлетворяющие условию предложения 3. Поэтому группа $G_{R,S}$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, и мы можем найти подгруппу $U_{R,S} \in \Omega_p(G_{R,S})$, тривиально пересекающуюся со свободными множителями.

Обозначая через U прообраз подгруппы $U_{R,S}$ относительно гомоморфизма $\rho_{R,S}$, мы видим, что $U \cap A = R \leqslant M$ и $U \cap B = S \leqslant N$, т.е. подгруппа U искомая.

3. Доказательство теоремы 4. Если X – некоторая группа и Y – нормальная подгруппа группы X, то ограничение на подгруппу Y произвольного внутреннего автоморфизма группы X представляет собой некоторый автоморфизм группы Y. Подгруппу группы $\mathrm{Aut}(Y)$, составленную из всех таких автоморфизмов, мы будем обозначать $\mathrm{Aut}_X(Y)$.

Легко видеть, что отображение $\alpha_Y : X \to \mathrm{Aut}_X(Y)$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ автоморфизм группы Y, индуцированный внутренним автоморфизмом $\hat{x}$ группы X, гомоморфно. Ядро этого гомоморфизма совпадает с централизатором подгруппы Y в группе X.

Нетрудно показать также, что в $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группе централизатор произвольного множества элементов является $\mathscr{F}_p$-отделимой подгруппой. Поэтому, если группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, то для любой подгруппы $Q \in \Sigma_p(H)$ группа $\mathrm{Aut}_G(Q)$ является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой. Хигмен в работе [3] показал, что наоборот, если A и B – конечные p-группы, подгруппа H нормальна в свободных множителях A, B и $\mathrm{Aut}_G(H)$ является p-группой, то группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Обобщением этого результата является

Лемма 1 [4]. *Пусть группы A и B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы и все подгруппы из семейства $\Omega_p(H)$ являются $\mathscr{F}_p$-отделимыми в свободных множителях. Если семейство $\Sigma_p(H)$ содержит такую подгруппу Q, что факторгруппа G/Q $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема и $\mathrm{Aut}_G(Q)$ является конечной p-группой, то группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

Если X – некоторая группа, Y – ее характеристическая подгруппа, то произвольный автоморфизм группы X индуцирует некоторый автоморфизм группы Y. Легко видеть, что отображение $\beta_Y\colon \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Y)$, переводящее элемент $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ в его ограничение на подгруппу Y, гомоморфно. В работе Якушева [10] доказана

Лемма 2. *Пусть X – конечная p-группа, $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$. Порядок автоморфизма σ является p-числом тогда и только тогда, когда p-числом является порядок индуцированного им автоморфизма факторгруппы X/X^pX'.*

Непосредственная проверка показывает, что справедлива также

Лемма 3. *Пусть Y – нормальная подгруппа группы X, Z – характеристическая подгруппа группы Y, $\alpha_Y : X \to \mathrm{Aut}_X(Y)$ и $\alpha_{Y/Z}\colon X/Z \to \mathrm{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$ – определенные выше гомоморфизмы, ε – естественный гомоморфизм группы X на факторгруппу X/Z, $\beta_Z\colon \mathrm{Aut}(Y) \to \mathrm{Aut}(Y/Z)$ – гомоморфизм индуцирования. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_Y} & \mathrm{Aut}_X(Y) \\ {\scriptstyle\varepsilon}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta_Z} \\ X/Z & \xrightarrow{\alpha_{Y/Z}} & \mathrm{Aut}(Y/Z) \end{array} .$$

В частности, образ группы $\mathrm{Aut}_X(Y)$ относительно гомоморфизма β_Z совпадает с подгруппой $\mathrm{Aut}_{X/Z}(Y/Z)$.

Перейдем теперь собственно к доказательству теоремы.

Пусть M – произвольная подгруппа из семейства $\Omega_p(H)$. В силу предложения 4 нам достаточно показать, что существует подгруппа $N \in \Omega_p(G)$, удовлетворяющая соотношению $N \cap H \leqslant M$.

По условию подгруппа $M \cap Q$ содержит некоторую подгруппу $L \in \Sigma_p(H)$. Так как группы G/Q и $G/Q^pQ'L$ получаются из G/Q^pQ' факторизацией по конечным и, следовательно, $\mathscr{F}_p$-отделимым подгруппам, то обе они $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы. Покажем, что $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой является и факторгруппа $G_1 = G/L$.

В силу леммы 1 нам достаточно убедиться в том, что (конечная) группа $\mathrm{Aut}_{G_1}(Q_1)$, где $Q_1 = Q/L$, является p-группой. Лемма 2 утверждает, что это верно тогда и только тогда, когда p-группой является ее образ относительно гомоморфизма индуцирования β_T, где $T = Q_1^pQ_1' = Q^pQ'L/L$. Но в соответствии с леммой 3 этот образ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$.

Факторгруппа G_1/T изоморфна группе $G_2 = G/Q^pQ'L$, и этот изоморфизм индуцирует изоморфизм групп $\mathrm{Aut}_{G_1/T}(Q_1/T)$ и $\mathrm{Aut}_{G_2}(Q_2)$, где $Q_2 = Q/Q^pQ'L$. Так как G_2 – $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая группа, то $\mathrm{Aut}_{G_2}(Q_2)$ является p-группой.

Таким образом, группа G/L $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема и потому существует подгруппа $N/L \in \Omega_p(G/L)$ такая, что $N/L \cap H/L = 1$. Отсюда $N \cap H = L \leqslant M$, и доказательство на этом закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

[2] Allenby R. B. J. T., Gregorac R. J. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes in Math. 1973. V. 319. P. 9–17.

[3] Higman G. Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.

[4] Соколов Е. В. Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых свободных произведений с объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2002. Т. 3. №1. С. 97–102.

[5] Соколов Е. В. Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π-групп // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №6. С. 904–909.

[6] Соколов Е. В. Об отделимости циклических подгрупп в свободных произведениях двух групп с объединенной подгруппой // Деп. ВИНИТИ 12.07.2002 № 1325-В2002. Иваново: Ивановский гос. ун-т, 2002.

[7] Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №1. С. 3–8.

[8] Kim G., Tang C. Y. On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.

[9] Sokolov E. V. On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. V. 11. P. 27–38.

[10] Якушев А. В. Аппроксимируемость конечными p-группами расщепляющихся расширений групп // Научн. труды Ивановского гос. ун-та. Матем. 2000. №3. С. 119–124.

Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
11.06.2004